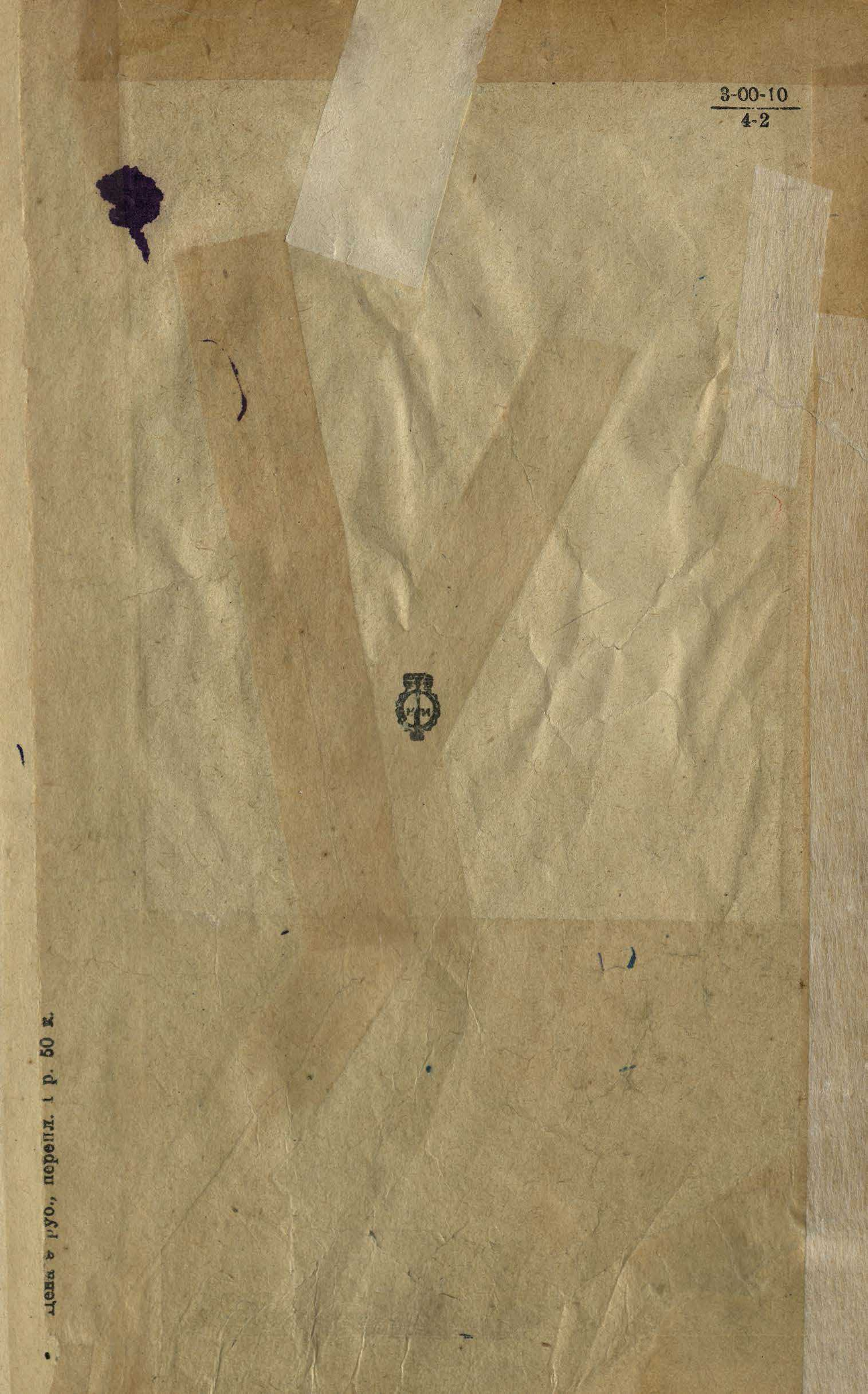


Цена 4 руб., перепл. 1 р. 50 к.

FELIX KLEIN

VORLESUNGEN ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK IM 19. JAHRHUNDERT

TEIL I

FÜR DEN DRUCK BEARBEITET VON

R. Courant und O. Neugebauer

Mit 48 Figuren

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

ФЕЛИКС КЛЕЙН

ЛЕКЦИИ О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ В XIX СТОЛЕТИИ

ЧАСТЬ I

ПОДГОТОВЛЕНО К ПЕЧАТИ
Р. Курантом и О. Нейгебауером

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Б. Лившица, А. Лопшица, Ю. Рабиновича,
Л. Тумермана

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД



Редакция *Г. Ф. Рыбкина.* Оформление *В. Ф. Зазульской.*

Изд. № 131. Тираж 7000. Сдано в набор 20/XII 1935 г. Подп. в печ. 20/II 1937 г. Формат бум. 62 × 94. Уч.-авт. л. 30,2. Бум. лист. 13,5. Печ. зн. в бум. листе 101 000. Заказ № 1979. Уполном. Главл. № Б-9165. Выход в свет март 1937 г.

3-я тип. ОНТИ. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

3

СОДЕРЖАНИЕ.

Глава третья.

Основание журнала Крелля и расцвет чистой математики в Германии.

Глава четвертая.

Развитие алгебраической геометрии после Мебиуса, Плюкера и Штейнера.

Глава пятая.

Механика и математическая физика в Германии и Англии до 1880 года.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Общая теория функций комплексного переменного у Римана и Вейерштрасса.

Глава седьмая.

Исследование природы алгебраических многообразий с более глубокой точки зрения.

Глава восьмая.

Теория групп и теория функций. Автоморфные функции.

ФЕЛИКС КЛЕЙН И ЕГО ИСТОРИЧЕСКАЯ РАБОТА.

М. Я. Выгодский.

Недавно исполнилось десять лет со дня смерти Клейна. Уже по одному этому было бы уместно предпослать переводу работы Клейна «Развитие математики в XIX столетии» краткий обзор его многосторонней деятельности. Но и помимо этого внешнего повода полувековая научная и общественная деятельность Клейна заслуживает того, чтобы уделить ей должное место в истории математики XIX столетия, тем более что влияние идей и произведений Клейна и сейчас еще очень велико.

В своей книге, ныне предлагаемой вниманию советского читателя, Клейн уделяет много внимания своим работам и развитию тех идей, которые были особенно близки ему в его творчестве. Можно даже сказать, что вся его работа написана под углом зрения личных научных интересов. Но систематического изложения своей биографии Клейн, руководясь, повидимому, чувством скромности, не дает, и потому в его книге ощущается несомненный пробел, который я хотел бы заполнить хотя бы отчасти. С другой стороны, достоинства и недостатки исторической работы Клейна будут для нас яснее и понятнее, если мы предварительно хотя бы в самых общих чертах охарактеризуем жизнь и творчество автора.

Феликс Клейн родился в 1849 г. в семье чиновника: отец его был казначеем в Дюссельдорфе. Это был человек чрезвычайно консервативного образа мышления; в семье Клейна господствовал «старопрусский» дух, и в этом духе был воспитан и Феликс Клейн. В гимназии, в которую определил его отец, царил классический стиль; естествознанию и математике уделялось очень малое место в преподавании. Уже с юношеских лет Клейн стал проявлять стремление к разностороннему и углубленному изучению мира, и узкая программа гимназии не могла его удовлетворить. Он обращается к самообразованию, а по окончании гимназии в 1865 г. поступает в университет в Бонне для специального изучения естествознания и математики.

На талантливого студента Клейна сразу обратил внимание профессор Боннского университета Плюкер. В то время уже глубокий старик, Плюкер занимал одновременно кафедры математики и физики. Наряду с чисто математическими исследованиями, преимущественно в области геометрии, в которой имя его связано с целым рядом плодотворных идей, и поныне сохранивших свою актуальность («плюкеровы координаты», идея

метрической двойственности, линейчатая геометрия и др.), Плюкер был талантливым экспериментатором и сделал выдающиеся открытия в различных отделах физики, значительная часть которых, правда, не получила должной оценки у современников.

Понятно, насколько соответствовали интересам молодого Клейна научное руководство Плюкера и личное общение с ним. В свою очередь, и Плюкер был заинтересован в помощи молодого Клейна, и в 1866 г. Клейн становится ассистентом Плюкера по кафедре физики.

В 1868 г. Плюкер умер, и на девятнадцатилетнего Клейна пала задача подготовить к печати оставшиеся не вполне отделанными работы Плюкера, в частности вторую часть его замечательного сочинения «Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии как элемента пространства». В 1869 г. эта работа уже вышла из печати. Отсюда берет свое начало и самостоятельная работа Клейна в области геометрии. Прошло еще каких-нибудь два-три года, и Клейн уже оформил тот круг идей, который определил всю дальнейшую его научную работу.

После смерти Плюкера Клейн оставил Бонн и в течение следующего года побывал в Геттингене и в Берлине, где имел возможность войти в личное общение с выдающимися учеными, возглавлявшими влиятельные научные школы: в Геттингене он познакомился с Клебшем (1833—1872) и Вильгельмом Вебером (1804—1890), а в Берлине — с Вейерштрассом (1815—1897).

Чрезвычайно интересно для характеристики самостоятельности молодого Клейна то обстоятельство, что с первыми двумя из вышеназванных лиц Клейн вступил в тесный научный и личный контакт, тогда как при первых же попытках общения с Вейерштрассом обнаружилась непроходимая пропасть, отделявшая научное мировоззрение молодого математика от мировоззрения главы берлинской математической школы.

Оба геттингенских профессора — сравнительно молодой математик Клебш и уже достигший шестидесятипятилетнего возраста физик Вебер, в молодости бывший ассистентом Гаусса, — были носителями традиций математики эпохи французской революции. Математика являлась для них составной и нераздельной частью науки о природе, не только в том смысле, что они сами искали и находили многочисленные применения математики, но и в том, что в чисто математическом исследовании они не покидали почвы конкретных образов геометрии, механики и физики. Что касается Вейерштрасса, то для него мир математических наук был замкнутым в себе миром чистой абстракции, его творчество покоилось на педантично-строгом логическом анализе аналитических соотношений; на приложения же математики он смотрел как на нечто побочное, для самой математики несущественное.

Как ни велик был авторитет Вейерштрасса в конце 60-х годов прошлого века, он не только не оказал никакого воздействия на образ мышления молодого Клейна, но, напротив, заострил его на-

учное кредо и поставил Клейна в резкое оппозиционное отношение к школе Вейерштрасса.

В 1870 г. Клейн познакомился с Софусом Ли, и это знакомство оказало на Клейна большое влияние: знаменитый норвежский математик ввел Клейна в круг своих идей, и с тех пор между Клейном и Ли (который был старше его на семь лет) не прекращался личный и научный контакт. В первый же период их знакомства этот контакт дал плодотворные результаты для развития новой области математики, в настоящее время включившей в себя ряд разрозненных прежде областей, — абстрактной теории групп. И Клейн был первым, кто подчинил понятию группы столь обширную область математики, какой является геометрия.

В том же 1870 г. Клейн совместно с Ли предпринимает поездку в Париж, где вступает в личную связь с Дарбу и Жорданом. Франко-прусская война заставила Клейна покинуть Францию. В войне Клейн не принимал никакого участия, так как в самом ее начале заболел тифом. Оправившись от последствий тяжелой болезни, он вновь поселяется в Геттингене. Высоко ценивший таланты Клейна Клебш выхлопотал ему вскоре самостоятельное академическое положение, и двадцати трех лет от роду Клейн становится профессором математики в Эрлангене (1872).

К этому времени идеи Клейна уже вполне оформляются, и его работа «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen» («Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований», октябрь 1872 г.) дает настолько ясную и отчетливую перспективу дальнейшего развития геометрии, что она по праву получила в обиходе математиков название «Эрлангенской программы». В течение полустолетия тезисы Эрлангенской программы были ведущим началом в развитии математики, да и поныне, хотя математика обогатилась рядом новых плодотворных идей, делающих в некоторых отношениях Эрлангенскую программу превзойденной, она продолжает оставаться не только важнейшим историческим документом, но и живым источником математического творчества.

Основная идея Эрлангенской программы состоит в том, что объектом геометрии является система инвариантов некоторой группы преобразований непрерывного многообразия и что различные системы геометрии отличаются друг от друга постольку, поскольку отличны структуры положенных в их основу групп.

Эта идея, в настоящее время легко доступная каждому математику, отнюдь не была таковой 60 лет тому назад, несмотря на то, что понятия, на которые она опирается, каждое в отдельности уже стали достоянием науки. Действительно, понятие группы было введено в математику уже Лагранжем, а в руках Галуа оно получило плодотворное применение в общей теории алгебраических уравнений. Незадолго до появления Эрлангенской программы теория групп подстановок была систематически изложена Жорданом, книга которого «Traité des substitutions» (1870) представляет собой первый учебник теории конечных групп. Идея

единства геометрических систем, представляющих различные интерпретации одной и той же системы метрических соотношений, содержалась уже в работе Бельтрами (1868), в которой была дана интерпретация плоской неевклидовой геометрии как геометрии псевдосферы в евклидовом пространстве; наконец, теория алгебраических инвариантов вместе с ее приложением к аналитической геометрии была в течение 1850—1870 гг. развита рядом авторов, между прочим Кели и Клебшем. В частности, Кели выдвинул идею подчиненности метрической геометрии (евклидового пространства) геометрии проективной и ввел проективное мероопределение, основанное на рассмотрении алгебраических квадратичных форм.

Может показаться, что при этих обстоятельствах идеи Эрлангенской программы не содержали ничего нового и что оставалось только сформулировать их во всей полноте, чтобы они были приняты как нечто само собой разумеющееся. Что такое представление было бы в корне ошибочно, показывает лучше всего тот прием, который встретили идеи Клейна со стороны многих видных математиков.

Из работы Клейна, перевод которой здесь дается, читатель увидит, что первый прием, оказанный его идеям, был не только холодно-равнодушным, но и сопровождался прямым сопротивлением со стороны такого, например, математика, как Вейерштрасс. Я не буду воспроизводить соответствующее место, — читатель найдет его на стр. 189—192. Я замечу лишь, что причиной непонимания, проявленного Вейерштрассом, было не только различие психологий, как полагает Клейн; несомненно здесь имело значение также и другое, и притом более существенное, обстоятельство.

Я уже говорил о том стремлении к многостороннему охвату действительности, которое характерно для Клейна; оно проявилось, быть может, всего сильнее именно в данном случае, когда Клейн осознал единство в многообразии математических фактов и методов, на первый взгляд весьма далеких друг от друга. Здесь мы имеем яркий пример того, как крупнейший мыслитель в своем творчестве стихийно становится на позиции диалектического материализма, — факт, всегда подчеркивающийся основоположниками марксизма. То сопротивление, которое встретили идеи Клейна, имеет своей более глубокой причиной общую ограниченность мировоззрения буржуазного ученого, оно представляет собой проявление метафизического образа мышления, не раз служившего в истории науки препятствием к усвоению новых идей: вспомним хотя бы те трудности, которые встретила неевклидова геометрия или — в более близкое к нам время — теория относительности.

Идеи Эрлангенской программы представляют собой очень высокую ступень математической абстракции. Они уносят мысль математика далеко от тех «физических» объектов, с которыми в элементарной геометрии связываются основные геометрические понятия. Они предоставляют стороннику «чистого мышления» соблазнительную возможность покинуть вовсе область конкрет-

чого, объявив, что физическая интерпретация геометрии не входит в компетенцию математика. Ничто не было более чуждо Клейну, чем эта тенденция отграничения области математики от области технической практики. Он умел соединять подъем на высоты абстракции с яркостью образного геометрического и физического мышления.

Так, в руках Клейна риманова «геометрическая» теория функций комплексного переменного получила не только геометрическую, но и физическую интерпретацию. С большой степенью вероятности можно утверждать, что уже сам Риман исходил из тех же соображений, которые развил, опираясь на работы Римана, Клейн, но лишь Клейн, не страшась упреков в нарушении чистоты метода, привлек «открыто» физические соображения к решению чисто математических вопросов. Уже задолго до Клейна была известна та роль, которую уравнения Коши-Римана, а следовательно, и вся теория функций комплексного переменного играют в теории потенциала и теории теплоты. Но до Клейна эти физические теории были лишь полем применения математической физики. Клейн привлек их на помощь для создания «физической математики». В самых общих чертах строй мыслей Клейна в этом направлении обрисован им в «Развитии математики в XIX столетии» (*см. стр. 296*); *рамки настоящей статьи не позволяют* входить в бо́льшие подробности, но уже сказанного достаточно, чтобы показать, что взору Клейна было доступно раскрытие не только внутренних связей между отдельными ветвями математики, но и двустороннего взаимодействия между математикой и физикой. И здесь мы также видим наличие диалектического элемента, ярко окрашивающего все творчество знаменитого германского математика.

Вернемся, однако, к биографии Клейна. За появлением Эрлангенской программы следует интенсивнейшая научная работа Клейна в целом ряде областей математики. Лишь часть своей богатой продукции Клейн опубликовал немедленно, и все же за три года (1872—1875) им было опубликовано более 20 научных работ. Его внимание в этот период привлекают особенно вопросы неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебраических уравнений и теории эллиптических функций. К этому времени относятся и первые работы Клейна по теории икосаэдра и ее применение к теории алгебраических уравнений пятой степени.

В 1875 г. Клейн покинул Эрланген, чтобы занять место профессора Мюнхенской высшей технической школы. Здесь Клейн вел большую педагогическую работу. Он, не ограничиваясь чтением общего курса математики, читал лекции, знакомившие слушателей, интересовавшихся математикой, с более специальными вопросами, далеко выходившими за пределы обязательного курса. Наряду с этим Клейн продолжал вести напряженную исследовательскую работу: преимущественное его внимание занимает созданная им в связи с теорией икосаэдра теория автоморфных функций; подробно об этих своих работах сообщает сам Клейн в

посвященной специально автоморфным функциям главе VIII «Развития математики в XIX столетии».

Эти работы Клейн продолжает и в течение первых лет своего пребывания в Лейпциге, куда он переехал из Мюнхена в 1880 г. и где он получил университетскую кафедру геометрии. Эти годы были годами наибольшего напряжения научного творчества Клейна. Напряжение это не прошло безнаказанным для его здоровья: в 1882 г. от переутомления Клейн тяжело заболел. Хотя болезнь и не отразилась на количественных показателях его продукции, однако преждевременно вызвала резкое падение его творческих сил.

Деятельная натура Клейна нашла себе теперь иной выход и проявилась в организационной, педагогической, литературной и общественной деятельности, поражающей своей продуктивностью. На этих поприщах Клейном были созданы ценности, не только не уступающие по своему историческому значению ценности его специальных работ, но, пожалуй, еще более значительные.

В промежутке между 1882 и 1898 гг. были изданы монографии Клейна, в которых синтетически излагались методы и результаты его обширных исследований. Так, в 1882 г. появилась «Риманова теория алгебраических функций и их интегралов», в 1888 г. — «Об икосаэдре и решении уравнения пятой степени», в 1890 г. — «Теория эллиптических модулярных функций» (совместно с Фрике), в 1897 г. — первая часть «Теории автоморфных функций» (совместно с тем же автором; эта работа была закончена выходом третьей части в 1912 г.); наконец в 1898 г. совместно с Зоммерфельдом Клейн выпустил первую часть своего фундаментального сочинения по теории волчка; последняя, четвертая, часть его вышла в 1910 г.

В 1886 г. Клейн переезжает в Геттинген, который становится постоянным его местопребыванием до конца жизни. Здесь он с жаром отдается педагогической работе; избавленный от чтения основных обязательных курсов (их читал в Геттингенском университете Шварц), Клейн ведет в течение ряда лет факультативные курсы по самым разнообразным областям и вопросам, начиная от теории чисел и кончая технической механикой. И каждый из этих курсов блещет мастерством изложения, глубиной и оригинальностью постановки вопросов и, главное, многосторонностью связей, ведущих от одних вопросов науки к другим, казалось бы, совершенно особо стоящим.

Лекции Клейна привлекали многочисленных слушателей, съезжавшихся в Геттинген буквально со всех концов света. Многие из этих лекций, тщательно записанные, в течение ряда лет издавались сначала литографским способом, а затем и типографским. Эти книги, а также приватные записи лекций читались и перечитывались несколькими поколениями математиков, и много имеется таких математиков, которые могут назвать себя, — прямо и косвенно через своих учителей, учениками Клейна.

В этих лекциях ярче всего проявляются синтетические тенденции Клейна; имея в виду показать научную дисциплину в ее це-

лостности, Клейн старается возможно шире охватить область различных применений науки и вместе с тем представить математические науки как составную часть человеческой культуры. Один из учеников Клейна, Курант, так передает в посвященном памяти учителя некрологе собственные слова Клейна: «Мне становилось все яснее, что если игнорировать отдаленные перспективы, то и чисто научное творчество должно пострадать, и что научное творчество, оторванное от многостороннего, живо пульсирующего, общего духовного развития, осуждено на захирение, как хиреет растение, помещенное в погреб и лишенное солнечного света».

Обрисованное в этих словах научное мировоззрение Клейна, а также его напряженная и многосторонняя педагогическая деятельность невольно заставляют провести параллель между ним и другим знаменитым геометром — я имею в виду Гаспара Монжа, жизнь и деятельность которого я описал в недавно вышедшей работе[1]). Недаром Клейн посвящает Монжу и его школе почетное место на страницах своей исторической работы. Как и Монж, Клейн является типичным представителем научной идеологии индустриальной буржуазии; конечно, целое столетие, на которое Монж старше Клейна, вносит значительную модификацию в характеристику *обоих математиков (можно было бы, например, указать на различие в их политических взглядах)*, но, с другой стороны, более позднее развитие Германии объясняет нам, почему, несмотря на разделяющий двух геометров промежуток времени, в их деятельности можно найти так много общих черт.

Сходство между Монжем и Клейном проявляется и в других отношениях. Оба они по своему происхождению связаны с наиболее развитыми в промышленном отношении областями своих стран (Дюссельдорф находится в Рейнской области); оба они, далее, обнаруживали не только глубокое понимание связи между математикой и техникой, но и большой интерес к самой технике. Правда, Клейн не был, подобно Монжу, практическим инженером, но, как свидетельствуют современники и ученики Клейна, он стремился к овладению техникой на практике; это стремление ему не удалось осуществить из-за недостатка времени.

Наука и техника за сто лет настолько разветвились и усложнились, что даже для Клейна оказалось невозможным совместить свою научную работу с технической практикой. Но интерес к технике никогда не покидал Клейна, и его многочисленные личные связи охватывали широкий круг инженеров. Благодаря этому Клейн мог живо чувствовать связь между математической теорией и технической практикой. Эту связь он неоднократно подчеркивал в своих публичных выступлениях уже в лейпцигский период своей деятельности.

---

[1]) См. Гаспар Монж, Приложение анализа к геометрии. Вводная статья М. Я. Выгодского, „Возникновение диференциальной геометрии“, ОНТИ, 1936, стр. 28—47.

См. также „Архив истории науки и техники“, т. 6 (1935), стр. 63—96.

С переездом в Геттинген Клейн придал этим своим устремлениям организационное оформление. Он выдвинул идею приближения университетского преподавания к интересам техники. По его мысли при университете должен был быть создан факультет технической физики, в котором завершали бы свое образование руководящие кадры инженеров и преподаватели технических учебных заведений.

Нельзя не обратить внимания на сходство между проектировавшимся Клейном типом высшей школы и Политехнической школой эпохи Монжа. Но прусское министерство народного просвещения, вниманию которого предложил свой план Клейн, мало походило на конвент французской республики. Неудивительно, что Клейну не удалось осуществить свой план в полной мере: прусские капиталисты отказались поддержать мероприятие Клейна необходимыми средствами, университетские круги оказали сильное сопротивление попытке внедрения технических дисциплин в тихие стены «храма чистой науки» — и проект Клейна в общегосударственном масштабе осуществлен не был. Но Клейну удалось заинтересовать в своих планах небольшую группу геттингенских капиталистов, найти поддержку отдельных лиц в прусском министерстве и на собранные небольшие сравнительно суммы организовать в 1896 г. преподавание «технической физики» в Геттингенском университете.

За этим последовал дальнейший шаг — создание при Геттингенском университете научно-исследовательских институтов по отдельным областям техники: электротехнике, аэро- и гидродинамике, прикладной математике (математическая статистика) и др. Эти геттингенские институты получили мировую известность; они привлекали к себе ученых и техников, желавших повысить свою научную квалификацию, из всех стран мира. Конечно, для нас, участников великого социалистического строительства, масштабы этих институтов, в сравнении с теми масштабами, в которых развертывается деятельность наших научно-исследовательских учреждений, должны показаться очень скромными; но, оценивая деятельность Клейна, мы не должны забывать, что в условиях капиталистической страны то, чего ему удалось добиться с огромной затратой энергии, представляло максимум возможного.

Добавим еще, что в 1898 г. по инициативе Клейна образовался «Геттингенский союз поощрения прикладной физики и математики» («Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik»), бессменным председателем которого Клейн оставался до конца своей жизни.

Говоря об общественно-педагогической деятельности Клейна, нельзя пройти мимо его активнейшего участия в реорганизации всей германской системы образования. И здесь ему не удалось, несмотря на затраченную им огромную энергию, добиться осуществления своих планов полностью; но многое из его предложений было проведено в жизнь, несмотря на сильное сопротивление консервативных кругов. Мы не будем входить здесь в подробности

истории этого интересного вопроса, отсылая читателей, желающих получить более детальные сведения, к книге Клейна «Элементарная математика с точки зрения высшей» (русский перевод, ГТТИ, 1933 г., стр. 401—418). Заметим только, что в основе программы Клейна лежала идея, что всему образованию должен быть придан естественнонаучный уклон, в противовес тому «классическому» уклону, который господствовал в дореформенной германской школе. Что касается постановки преподавания математики, то Клейн требовал, чтобы математика преподавалась не как замкнутая в себе логическая дисциплина, но как составная часть общей системы человеческих знаний; он настаивал на том, что преподавание должно начинаться с наглядных вещей и лишь постепенно и медленно вести ученика к абстрактным идеям. Вместе с тем Клейн стремился к тому, чтобы основные идеи современной математики — идея функциональной зависимости в первую очередь — усваивались учащимися уже на школьной скамье. Чтобы предостеречь учителей от легко возможных на этом новом пути ошибок и увлечений в ту и другую сторону, Клейн настоятельно рекомендовал преподавателям изучение истории математики, постоянно подчеркивая неблагополучие в этом отношении.

С этой программой Клейна тесно связано колоссальное по замыслу предприятие, основанное в 1908 г. по инициативе Клейна и американского математика и историка математики Е. Смита, — организация международной комиссии по изучению постановки преподавания математики во всех странах мира. Публикация материалов, собранных комиссией, должна была лечь в основу реорганизации преподавания математики на всех ступенях обучения. Мировая война прервала работу комиссии, но германское отделение ее, возглавлявшееся Клейном, довело свою работу до конца, выпустив пять томов в течение 1909—1916 гг.

Уже перечисленных выше областей деятельности было бы более чем достаточно, чтобы полностью поглотить силы самого энергичного человека. Но Клейн обладал поистине гигантской энергией и умел совместить указанные нами обязанности с целым рядом других.

После смерти Клебша (1872) Клейн вошел в редакцию журнала «Mathematische Annalen» и руководил этим журналом до самой смерти в течение более чем 50 лет. В течение целой четверти века Клейн руководил еще двумя литературными предприятиями. Первое из них — издание полного собрания работ Гаусса — потребовало большой работы по собиранию и изучению неопубликованного литературного наследства Гаусса. О том, какое значение имела эта работа и какие трудности были с ней сопряжены, читатель может составить себе представление из тех страниц печатаемой здесь книги, которые посвящены Гауссу. Начатое в 1898 г. это издание было закончено лишь в 1918 г.

Другое литературное предприятие Клейна, несравненно более грандиозное, — издание энциклопедии математических наук, — было начато почти одновременно с первым и остается поныне еще

незаконченным. Эта энциклопедия обнимает, как известно, не только математику в узком смысле, но и теоретическую и прикладную механику, физику, астрономию, геодезию и т. д., т. е. по крайней мере по замыслу осуществляет ту идею единства науки, горячим поборником которой Клейн был всю свою жизнь.

Наш очерк жизни Клейна был бы неполным, если бы мы не упомянули о его политической деятельности в качестве члена «палаты господ», т. е. верхней палаты прусского парламента, в которой он был представителем Геттингенского университета. К сожалению, в нашем распоряжении нет материалов, которые позволили бы характеризовать ближе эту деятельность. Клейн, повидимому, не состоял ни в какой политической партии и не находился в оппозиции к довоенному режиму Германской империи. Этот консерватизм Клейна в вопросах общеполитических на первый взгляд может показаться несовместимым с его передовыми взглядами в вопросах науки и ее преподавания; но не нужно забывать, что значительная часть германской буржуазии, выразителем взглядов которой Клейн являлся, нераздельно связала свою судьбу с судьбой гогенцоллернской монархии.

Справедливость требует, однако, отметить, что личная честность Клейна часто приводила его к конфликтам с господствующими в его среде взглядами. В качестве примера приведу такой замечательный факт. Когда вспыхнула мировая война, влиятельная группа немецких ученых во главе с Оствальдом выпустила воззвание, насквозь проникнутое духом шовинизма; в нем с правительства Германии снималась всякая ответственность за возникновение войны и ее ужасы. Это воззвание было покрыто подписями многих выдающихся ученых. Но тайный советник, член палаты господ, Клейн своей подписи под этим воззванием не поставил.

Клейну был совершенно чужд шовинизм, свивший себе прочное гнездо в консервативных кругах немецкой буржуазии и юнкерства и достигший своего «расцвета» в наши дни, когда германские фашисты сделали так называемую «расовую теорию» альфой и омегой своей убогой идеологии. Вопреки этому шовинистическому течению Клейн демонстративно подчеркивал, что в создании культурных ценностей немецкая нация не играла какой-либо особой роли. Характерно в этом отношении то место в «Развитии математики в XIX столетии» (стр. 149—150), где Клейн подчеркивает плодотворное влияние на немецкую науку ученых еврейского и французского происхождения. И в выдвижении молодых и талантливых ученых Клейн никогда не руководился национальными соображениями; недаром нынешняя фашистская печать метала громы и молнии против «охвостья» Клейна в германских университетах; недаром многие из учеников Клейна как арийского, так и неарийского происхождения, либо были удалены, либо сами предпочли удалиться из пределов фашистской Германии; кстати сказать, в числе этих учеников находятся оба соавтора, подготовившие к печати предлагаемую вниманию читателя книгу, — Курант и Нейгебауер.

В 1918 г. по инициативе группы учеников Клейна, желавших отметить приближающуюся семидесятилетнюю годовщину со дня рождения учителя, был выпущен первый том полного собрания его научных мемуаров. В 1923 г. вышел третий и последний том этого собрания, и Клейн мог иметь удовольствие видеть подытоженной свою долгую научную жизнь. В 1924 г. состоялось чествование Клейна по случаю его семидесятипятилетнего юбилея, в следующем же году памяти Клейна посвящались многочисленные некрологи: 22 июня 1925 г. Феликс Клейн скончался.

Я уже говорил о том значении, которое придавал Феликс Клейн истории математики. Совершенно естественно, что в плане своей обширной литературной деятельности Клейн намечал создание обширной исторической работы. Совершенно естественно также, что внимание его должна была привлечь в первую очередь математика XIX в. В самом деле, по истории математики до XVIII в. включительно существует ряд работ, написанных лицами, изучавшими основательно первоисточники. Зная научные взгляды Клейна, мы можем с большой степенью вероятности предположить, что Клейна не удовлетворяли даже лучшие из этих работ, ибо они, как правило, рассматривают математику в отрыве от тесно связанных с нею областей науки и техники. Но, так или иначе, много добросовестного и кропотливого труда было затрачено в течение столетия, предшествовавшего деятельности Клейна, на систематизацию и разыскание историко-математического материала, доходящего до XIX в. Но даже первые десятилетия XIX в. никогда до Клейна не освещались в исторических работах. Основной причиной этого является исключительная трудность такой работы. Вспомним, что уже для второй половины XVIII в. оказалось невозможным одному человеку справиться с таким обилием материала; и такой крупный специалист, каким является Мориц Кантор, автор большого курса истории математики, вынужден был поручить написание четвертого, последнего тома этого курса ряду математиков-специалистов, распределивших материал сообразно научным интересам каждого из них. Сам Кантор оставил за собой только общее руководство этой работой. Естественно, что по отношению к XIX в. с его разветвленной специализацией науки эта задача должна быть неизмеримо более трудной. Даже о частичном ее разрешении мог помышлять лишь такой человек, который обладал бы энциклопедическим образованием и широким взглядом на научное здание в его целом, позволяющим из огромной, поистине необозримой массы материала выбрать наиболее значительное и показать связи, объединяющие многочисленные кирпичи этого здания в одно величественное целое. Никому, кроме Клейна, такая работа не оказалась бы по плечу. Клейн отважился взяться за нее, хорошо понимая те трудности, которые с этой работой связаны.

Как возникла настоящая работа Клейна, об этом рассказывают Курант и Нейгебауер в своем предисловии к ней, и мне нет нужды

повторять их рассказ. Из упомянутого предисловия и из введения автора мы узнаем, что работа не была доведена Клейном до конца. Таким образом в ней остаются значительные пробелы, наличие которых обусловливается обстоятельствами, от автора не зависевшими.

Но несмотря на это и на другие обстоятельства, которые ниже будут отмечены мною, работа Клейна представляет собой исключительный интерес. При чтении ее перед нами развертывается настоящая панорама, на которой ясно различаются большие дороги развития науки и рельефно показаны отдельные фигуры и группы людей, прокладывавших эти дороги. Дела и люди, описываемые Клейном, зарисованы с необычайной живостью и глубиной. Перед нами встает живой образ Гаусса, мы знакомимся с интимнейшими приемами его творчества, так заботливо охранявшимися автором от взоров стороннего наблюдателя, перед нами развертывается бурная деятельность Политехнической школы, закаленной в огне французской буржуазной революции и наполеоновских войн; Клейн вводит нас в дом Дирихле или Якоби; он знакомит нас с личными отношениями между творцами современной математики, и мы имеем возможность видеть столкновение различных тенденций в развитии науки так, как они преломляются в сознании людей, делающих науку. Иногда одно крылатое слово, запечатленное Клейном, освещает как вспышкой магния общую картину и в кратком афоризме резюмирует характерные черты того или иного направления творческой мысли. Для примера возьмем хотя бы приводимую Клейном реплику Якоби: «Для гауссовой строгости мы не имеем времени, господа!».

Эта яркость изображения обусловливается не только блестящими литературно-педагогическими талантами Клейна, но и тем, что для самого автора люди и факты, о которых он повествует, — живые люди и живые факты. Большинство деятелей науки, о которых Клейн говорит, либо были его современниками и лично общались с ним, либо, как Гаусс и Риман, оставили после себя глубокий след в научных кругах, в которых вращался молодой Клейн.

После того, что было сказано мной о деятельности и взглядах самого Клейна, мне нет надобности доказывать, что в книге Клейна мы можем ожидать найти не только яркость красок, но и глубину охвата многосторонних связей. Это ожидание оправдывается с первых же страниц книги, и мне нет необходимости приводить здесь отдельные цитаты или группировать обобщающие высказывания Клейна. Пожалуй, укажу в этой связи лишь на одно обстоятельство: обычно буржуазный историк математики, как только доходит до того пункта, где математика соприкасается с естествознанием так ясно, что нельзя не упомянуть об этой близости, ставит точку и заявляет, что здесь он должен был бы выйти за пределы истории математики. В противоположность этому Клейн посвящает в своей работе целые разделы специально физике, астрономии, геодезии с целью показать, как проблематика этих наук стимулировала развитие математической мысли. Более того, он рассматривает и влияние техники на развитие математических наук, не

ограничиваясь при этом констатированием «заказов», идущих со стороны техники, но отмечая и оформляющее влияние технической практики на образование научных понятий (см., например, стр. 109 о возникновении понятия работы).

От других историков математики Клейна отличает еще одна ценная для нас черта: в своих поисках широких обобщений он не останавливается и перед постановкой общеисторических проблем; он констатирует, например, что французская математика после эпохи Монжа переживает полосу господства формальных методов исследования, приносящих с собой бо́льшую продуктивность в вопросах «чистой» математики; вслед за этим периодом наступает новый, когда интерес к абстрактным вопросам математики падает, уступая место тенденции к развитию прикладной математики. И вот Клейн ставит вопрос: чем объяснить эту поразительную смену тенденций?

Для Клейна ясно (см. стр. 122), что эту причину нельзя видеть в особенностях личных вкусов Пуассона и других учеников Лапласа; он хочет, напротив, объяснить появление этих вкусов общими закономерностями исторического развития. Это стремление Клейн проявляет в целом ряде мест своей работы.

Сама постановка общеисторических вопросов представляет для нашего читателя, ищущего диалектико-материалистического освещения развития математики, огромный интерес; но те пути, на которых Клейн ищет ответа на подобные вопросы, в целом ряде случаев оказываются весьма далекими от марксистского метода. Взять хотя бы тот же пример с французской математикой. Клейн отвечает на вышеприведенный вопрос следующим образом: в жизни народа, как и в жизни отдельного человека, имеет место психологический закон, состоящий в том, что периоды подъема чередуются с периодами упадка. Этот ответ кажется вполне удовлетворительным Клейну; к «психологическому закону» он прибегает неоднократно, объясняя, например, им на стр. 359 «появление итальянцев в рядах крупнейших математиков». Конечно, такое объяснение общеисторических вопросов не удовлетворит ни в какой мере нашего читателя.

На этом примере мы видим, что стихийного проявления диалектико-материалистических тенденций, которое мы отмечали у Клейна, еще далеко недостаточно. Будем, однако, справедливы и не будем требовать от Клейна того, чего нельзя требовать от буржуазного историка. Замечательно уже и то, что Клейн формулирует те проблемы, которые являются наиболее интересными для историка-марксиста.

Мне хотелось бы отметить и другие недостатки работы Клейна. Один из них составляет как бы оборотную сторону тех преимуществ, которыми обладает книга, составленная живым участником исторического развития: это — преобладание субъективного элемента в выборе материала. Нетрудно заметить, что с особенной любовью Клейн говорит о тех вопросах, которые были близки ему в его личной работе. Это влечет за собой невнимание как к от-

дельным областям математики, так и к отдельным течениям. Нетрудно, например, заметить, что вопросам развития теории вероятностей Клейн почти не уделяет никакого внимания. С другой стороны, не случайно, например, то, что среди трехсот имен математиков XIX в. ни разу не упоминается имя такого крупного математика, как Чебышев. Таким образом Клейн при всей своей многосторонности все же оказался не в силах при составлении своей книги выполнить тот мудрый совет, который, по его словам (стр. 151), был дан ему Людвигом: удалиться от изучаемого объекта на расстояние 600 километров, чтобы освободиться от влияния привычного окружения.

Вторым принципиальным недостатком книги Клейна я считаю ту беглость, с которой он касается чисто математических вопросов, им затрагиваемых. Конечно, нельзя, оставаясь в рамках общего очерка, входить в подробности математических доказательств, но все же по отношению к важнейшим методам математики необходимо войти в некоторые детали, чтобы эти методы предстали в своей специфичности, в своем отличии от того облика, в котором они знакомы современному математику. Так, например, по отношению к фундаментальным операциям теории функций комплексного переменного книга Клейна совершенно оставляет в стороне вопрос о том, как постепенно возникало понятие функции в комплексной области. Несколько небольших цитат из Гаусса, Коши и Римана могли бы бросить свет на этот интересный вопрос. Отмечу, что и здесь Клейн делает исключение в пользу особенно ему близких тем, как, например, в разделе, посвященном автоморфным функциям. Благодаря этому работа Клейна приобретает еще более резко выраженный субъективный характер.

Замечу, наконец, что в книге Клейна можно указать и отдельные фактические ошибки. Одна из них отмечена издателями в подстрочном примечании к стр. 5 немецкого оригинала; она состоит в неверной характеристике литературного стиля математиков XVIII в.; к этому примечанию я добавил бы еще, что и по отношению к XIX в. Клейн допускает аналогичную ошибку: он считает для XIX в. характерным стремление автора ввести читателя в лабораторию творческой мысли; это безусловно верно по отношению к самому Клейну и к некоторым другим математикам XIX в. (например Якоби), но господствующим стилем изложения является стиль Гаусса, Коши, Вейерштрасса, характеризующийся тем, что автор поучает читателя, но не будит в нем творческой мысли. Ошибается Клейн и тогда, когда (стр. 88) говорит, что уже у Евдокса «во всей ясности существовала теорема непрерывности». На самом деле античные математики никогда не замечали, что в числе предпосылок геометрического доказательства находится понятие непрерывности. При всем своем скрупулезном стремлении оговорить максимальное число самых очевидных положений (как, например, величины, равные третьей, равны между собой; между двумя точками можно провести одну прямую, и т. д.) Евклид в первом же предложении первой книги «Начал» пользуется совер-

шенно незаметно для себя принципом непрерывности и, конечно, никак не оговаривает этого. Нельзя также безоговорочно согласиться и с той оценкой, которую Клейн дает средневековой математике (стр. 83).

Эти неточности, однако, ни в какой мере не умаляют значения книги Клейна. Относительно же вышеотмеченных более существенных дефектов я хотел бы повторить то, что я уже говорил в другой связи. Написание истории математики XIX в. — непосильная задача для одного человека, хотя бы этим человеком был и Клейн. То, что мы имеем в книге Клейна, нужно рассматривать как мемуары крупнейшего математика, бросающие яркий свет на целый ряд интереснейших вопросов, связанных с развитием математики XIX в.; эти мемуары далеко не исчерпывают, несмотря на все богатство их содержания, совокупности вопросов, которые стоят перед историком науки и разрешить которые в состоянии только коллектив людей, владеющих всеми средствами современной математики, с одной стороны, и марксистским методом исследования — с другой.

Работа Клейна послужит, несомненно, ценным материалом для предстоящей работы такого коллектива. Но, пожалуй, еще большее значение имеет она для широкого круга математиков и любителей математики. Ибо она будит интерес к широкой постановке вопросов истории математики, дает огромный фактический материал и своим увлекательным изложением способствует возрастанию интереса к изучению истории математических наук. Вот почему выход русского перевода книги Клейна представляет собой большое научное событие.

ПРЕДИСЛОВИЕ К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ.

Вряд ли какой-нибудь исторический труд может вызвать такой живой интерес и дать возможность такого глубокого проникновения в суть исторических событий, как мысли и воспоминания крупного государственного деятеля, который сам в течение долгих лет своей жизни руководил судьбами мира, человека, наделенного всеми чертами яркой индивидуальности и владеющего мастерством художественного изложения.

Подобные сочинения, редкие даже в области политической истории, были до сих пор почти неизвестны в истории точных наук. Тем более необходимым представилось нам, когда год тому назад скончался Феликс Клейн, не задерживать издания его лекций по истории математики и математической физики XIX столетия.

Эти лекции являются зрелым плодом богатой жизни, проведенной в центре научных событий, выражением проникновенной мудрости и глубокого исторического понимания, высокой человеческой культуры и мастерского дара изложения; они несомненно будут иметь большое влияние на всех математиков и физиков, а также далеко за пределами этого круга. В эпоху, когда и в области науки взгляды людей слишком прикованы к событиям сегодняшнего дня и когда многие склонны видеть частности неестественно преувеличенными по сравнению с целым,— книга Клейна может многим снова открыть глаза на связи и линии развития нашей науки в целом.

Еще при жизни Клейна эти лекции, распространявшиеся в многочисленных копиях, напечатанных на пишущей машинке, производили сильное впечатление. Клейн читал их в первый год войны в тесном кругу, собиравшемся в его квартире, и продолжал чтение с перерывами до 1919 г. Толчком к собеседованиям послужил план создания большой книги в серии „Современная культура“ („Kultur der Gegenwart“). Но осуществить это намерение не удалось. В последние годы своей жизни Клейн думал о том, чтобы еще раз основательно пересмотреть и пополнить эти лекции — завершение дела своей жизни — и опубликовать их в виде самостоятельной книги.

Его болезнь и затем смерть помешали осуществлению намеченного плана, и это возложило на тех, кому поручено было издание литературного наследия Клейна, тяжелую обязанность решить вопрос, вносить ли и если вносить, то в какой мере, дополнения и изменения в эти лекции. Мы решили подвергнуть

возможно меньшим изменениям оставшийся после Клейна текст и ограничиться лишь фактическими поправками, небольшими дополнениями и необходимыми чисто внешними переделками. Несомненно, что в том виде, в каком она выходит, эта книга несет на себе отпечаток фрагментарности и незаконченности; она является скорее наброском, чем законченным и отделанным историческим сочинением. Изложение здесь отнюдь не однородно. Наряду с материалом, имеющим широкий общий интерес и носящим более популярный характер, имеется ряд пунктов — особенно к концу книги, — посвященных деталям; второй том будет полностью посвящен изложению только одной дисциплины — общей теории инвариантов и теории относительности в их историческом развитии. Не всюду историческое изложение равномерно развито во всех направлениях; характерно, например, что теория чисел, алгебра и теория множеств не получили должной оценки; имеется и ряд других замечаний и оценок, которые могут показаться несколько субъективными. Задуманные первоначально главы о Пуанкаре и Ли отсутствуют вовсе. Но что означает все это по сравнению с живым духом, который веет на нас с каждой страницы рукописи Клейна? Уже по одному этому нам казалось ненужным исправлять и дополнять ее, если бы даже должное выполнение этой задачи и не превышало в такой мере наши силы.

Бо̀льшую часть все же очень значительной работы взял на себя младший из издателей.

Кроме того мы должны принести свою благодарность ряду коллег за ценные указания и помощь при корректуре, в частности — Каратеодори в Мюнхене, Струику в Дельфте, Мюллеру в Ганновере и прежде всего Бессель-Гагену в Геттингене; внимание и тщательная работа последнего при просмотре корректуры и проверке многих исторических фактов имели для издателей неоценимое значение.

Р. Курант.

О. Нейгебауер.

Геттинген, август 1926.

ВВЕДЕНИЕ.

В настоящее время обнаруживается стремление представить всю широко разветвленную духовную жизнь наших дней, по крайней мере в главных ее проявлениях, в связном и удобном для обозрения виде. Всякому интересующемуся математикой ясно, что при таком обзоре культурных факторов современности не может быть обойдена и наша наука. Более того, необходимо сделать попытку отвести ей то место, которое надлежит занимать математике как одной из самых древних и самых благородных форм деятельности человеческого разума и как одной из сил, имеющих решающее влияние на направление его развития; к сожалению, она очень редко занимает это место в сознании образованных людей, по крайней мере в Германии. Причиной такого малоутешительного положения вещей является прежде всего одно обстоятельство, сильно осложняющее решение нашей задачи. В математике, как ни в одной другой науке, все здание построено на немногих основных принципах по законам, обладающим характером принудительной необходимости. Этот исключительный характер построения, выделяющий ее из среды других творений человеческого ума и придающий ей столь прославленную „ясность“, делает ее вместе с тем наименее доступной из всех наук. Действительно, человек, желающий глубоко в нее проникнуть, должен сам собственным трудом шаг за шагом пройти весь путь ее развития; совершенно невозможно овладеть хотя бы одним математическим понятием, если не уяснить себе предварительно все предыдущие понятия и все взаимоотношения между ними, которые привели к образованию этого понятия.

Эта резкая замкнутость математики естественно способствует тому, что она может очень мало привлечь внимание неспециалиста, интересующегося обычно лишь вопросами общего характера; его задачи идут не дальше того, чтобы приблизительно и в самых общих чертах понять сущность чуждой ему отрасли знания и кое-что из ее своеобразия и красоты. Чтобы дать все же нечто пригодное для этой цели, необходимо во всяком случае ограничить выбор из самого по себе обширного, интересного и важного материала. Речь может итти лишь о том, чтобы дать наглядное представление о вопросах, которыми занимаются математики, и о неограниченной шири тех проблем, которые наша наука в своем непрерывном развитии постепенно пытается

втянуть в подвластную ей область. При этом нельзя обойтись, как я сказал бы, без некоторого „pia fraus“ (благочестивого обмана). Систематическое изложение, понимание которого потребовало бы самостоятельной работы читателя, должно быть сведено к минимуму; напротив, историческое развитие должно быть выдвинуто на первый план. Естественный интерес к процессу созидания невольно увлекает читателя; ему кажется, что он подошел к пониманию этих вещей, тогда как он уловил только их внешнюю форму, и в этом-то заключается тот „благочестивый обман“, без которого едва ли может обойтись популярное изложение этой строго замкнутой области знаний. Наконец, точкой соприкосновения со всяким образованным читателем будет подчеркнутое отражение влияния математики на смежные области и выпуклое изображение ее связи со всей нашей культурной жизнью.

Изложить историю развития математики в XIX веке значительно труднее, чем представить ее развитие в древности, в средние века или в XVI, XVII и XVIII столетиях. Действительно, история математики в древности и в средние века имеет дело с относительно элементарными вещами, а XVI, XVII и XVIII столетия образуют эпоху, которая в основном отличается однородным характером и результаты которой, благодаря их связи со смежными отраслями, легко понятны и людям, стоящим в стороне от математики; в XIX веке дело обстоит совершенно иначе, как тотчас же обнаружится при сравнении этих эпох.

Главным содержанием предыдущей эпохи является начавшееся приблизительно с 1700 г. развитие диференциального и интегрального исчислений, которое открыло совершенно новые возможности для решения проблем механики и астрономии. Кульминационный пункт этого развития достигается в двух сочинениях французских математиков; хотя указанные сочинения были закончены только в XIX столетии, но и по форме и по содержанию они принадлежат XVIII веку. Это — Lagrange, *Mécanique analytique*. 2 vol. 1811—1815 (Лагранж, Аналитическая механика)[1]; Laplace, *Mécanique céleste*. 5 vol. 1799—1825 (Лаплас, Небесная механика).

Каждый математик, интересующийся историей развития своей науки, должен ознакомиться с этими работами. Следует, быть может, еще наряду с ними назвать книгу Legendre, *Exercices de calcul intégral*. 3 vol. 1811—1819 (Лежандр, Упражнения по интегральному исчислению). Здесь собраны результаты исследования интегралов соответственно состоянию этой дисциплины в то время, причем они изложены главным образом с точки зрения практического выполнения вычислений (таблицы эллиптических и эйлеровых интегралов; напомним кстати, что с начала XVI столетия началось распространение десятичных дробей, а приблизительно около 1600 г. были изобретены логарифмы).

[1]) Первое издание в одном томе вышло в 1788 г.

Наряду с этими великими творениями в области прикладной математики в XVIII столетии не было, конечно, недостатка в открытиях и в области чистой математики. Чтобы ограничиться только несколькими важнейшими вещами, я напомню о сочинении Ньютона *Enumeratio linearum tertii ordinis* („Перечисление кривых третьего порядка“), об Эйлере и Лагранже, которым мы обязаны крупными успехами в области алгебраических уравнений, весьма многими достижениями в теории чисел и теоремой сложения эллиптических интегралов. Но в общем в сравнении с теми мощными творениями, которыми, объединившись, чистая и прикладная математика отвечали на требования своей эпохи, независимая работа в области чистой математики отступает здесь на второй план.

Характер развития математики в XIX столетии совершенно иной. Прикладная математика не останавливается, конечно, в своем развитии; наоборот, она охватывает все более обширные новые области. Чтобы убедиться в этом, достаточно только напомнить о создании всей „математической физики“, т. е. нашего орудия теоретического исследования во всех областях физики, лежащих за пределами механики.

Но наряду с этим мощно развивается чистая математика, притом в равной мере в двух направлениях: с одной стороны, создаются совершенно новые области, как теория функций комплексного переменного и проективная геометрия; с другой — подвергаются критическому рассмотрению научные ценности, полученные по наследству от предшествующих поколений; это соответствует вновь пробудившемуся чувству строгости, которое отошло было несколько на второй план в изобиловавшем новыми открытиями XVIII столетии.

Наряду с этими новыми направлениями мысли на научную жизнь оказывают свое влияние те крупные общественные сдвиги, которые повлекла за собой французская революция и последовавшие за ней исторические события. Демократизация мировоззрения ведет к распространению культуры и строгой специализации отдельных ветвей науки. Соответственно требованиям времени приобретает важное значение преподавательская деятельность. Жизнь, не стесняемая более сословными различиями, создает совершенно немыслимый прежде наплыв лиц, стремящихся к научным занятиям и руководствующихся при этом совершенно новой целью — желанием подготовиться к преподавательской деятельности, которая получила теперь такое важное значение. Тем самым начинается перемещение центра тяжести научной жизни; главными центрами ее становятся теперь не академии, а высшие школы. Во Франции развитие в этом направлении, после первых шагов в Нормальной школе („École Normale“), начинается с Монжа (Monge) и с основания Политехнической школы („École Polytechnique“) в 1794 г., в Германии — с Якоби (Jacobi), который в 1827 г. вызвал к жизни нечто аналогичное в Кенигсберге.

Под влиянием разнообразнейших и чрезвычайно разросшихся проблем начинается упомянутая уже специализация наук. Математика обособляется от астрономии, геодезии, физики, статистики и т. д.

Число специалистов-математиков неизмеримо возрастает и заполняется представителями самых различных и отдаленных наций. При этом широком развитии отдельных исследований даже самый всеобъемлющий ум уже не в состоянии произвести в себе синтез всего материала и плодотворно проявить его вовне.

Вместо прежнего живого личного общения между учеными возникает огромная литература, особенно периодическая, устраиваются большие интернациональные конгрессы и другие организации, стремящиеся поддерживать хотя бы внешнюю связь.

Не подлежит никакому сомнению, что при этом новом и крайне быстром темпе развития научная жизнь потеряла много ценных черт. Какое чувство восхищения возбуждает небольшая группа избранников, которая представляла нашу науку в XVIII столетии! Свободные от национальной ограниченности, в тесном интеллектуальном общении, поддерживаемом путем оживленного обмена мыслей в личной переписке, эти академики сочетают плодотворнейшее научное творчество с идеальным всесторонним развитием своей личности. Одной из характерных черт в этой картине является то, что ученый того времени обладал обширнейшими познаниями и вне собственной области и всегда чувствовал живую связь своей работы с развитием науки как целого. Напомним, что теория притяжения Ньютона получила признание во Франции благодаря Вольтеру.

Стремление к универсальности, свойственное этой эпохе, выходит за пределы науки и ищет связи со всеми культурными ценностями, с религией, искусством и философией. Во всем чувствуется стремление к великой цели усовершенствования человечества. Об этом свидетельствует тенденция излагать каждую отдельную научную работу в связном и обработанном виде, чтобы представить таким образом образованному читателю нечто цельное и законченное. Лаплас сопровождает свою *Mécanique céleste* предназначенным для широкой публики сочинением *Exposition du système du monde* („Изложение системы мира"), свою *Théorie analytique des probabilités* („Аналитическая теория вероятностей") — сочинением *Essai philosophique sur les probabilités* („Опыт философии теории вероятностей"; имеется русский перевод, Москва 1908). Конечно, большая красота этой кристально ясной, законченной, классической манеры изложения достигается не без потерь в другом направлении: по этим мастерским произведениям почти невозможно уяснить себе, каким образом они возникли. Благодаря этому читатель лишается своеобразного, а для самостоятельного ума величайшего удовольствия самостоятельно разыскать под руководством автора полученные результаты. В этом смысле в произведениях классической эпохи

чувствуется недостаток внимания к воспитательному моменту. Мысль, что читателя нужно не только занимать и поучать, но и побуждать к самодеятельности, пробуждать в нем силы, которые повели бы его дальше данного сочинения (такое влияние, например, оказывают сочинения Монжа, Якоби или Фарадея), принадлежит целиком XIX столетию [1]).

Если мы по многим причинам отказались или должны были отказаться от универсализма XVIII столетия, то это все же не мешает нам при обозрении современной научной деятельности вспомнить подчас о его преимуществах. Теперь в каждой культурной стране имеются сотни творчески работающих математиков, каждый из которых владеет только очень небольшим участком своей науки, и этот уголок естественно представляется ему наиболее важным. Результаты своей работы он публикует в разрозненных отрывочных статьях, в разных журналах, если возможно, на различных языках. Изложение, рассчитанное на немногих специалистов, работающих в той же области, не содержит и намека на связь с более крупными общими вопросами и поэтому с трудом доступно математику, круг интересов которого стоит несколько дальше, а для более широкого круга читателей оно совершенно непригодно.

Мы, *конечно, далеки* от того, чтобы желать возрождения утраченного или перечислять те преимущества, которые эти утраты компенсируют. Я не имею в виду также предлагать какие-нибудь меры к улучшению существующего положения. Нет, для нас при этих обстоятельствах возникает только следующий вопрос: как нам быть при таком сложном и запутанном положении вещей? Как построить изложение, чтобы уяснить широким слоям этот ход развития, в котором еще так мало единства и связи?

Я хотел бы по этому поводу высказать следующие соображения. Само по себе, конечно, важно в первую очередь собрать воедино основной материал. Однако это является задачей нашей большой „Энциклопедии математических наук" („Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen", Leipzig), от поля деятельности которой мы прежде всего должны отмежеваться. Ибо цель, которую ставит себе настоящее сочинение, отнюдь не была бы достигнута, если бы оно содержало только нечто вроде сокращенной обработки энцикло-

[1]) Положение дел, описанное в этом абзаце, соответствует, строго говоря, лишь концу XVIII столетия. Так, например, Эйлер ведет читателя тем же путем, каким шел сам, предостерегает даже от возможных ошибок и довольно часто рассказывает о тех безуспешных попытках, которые он делал, пока не нашел правильного пути. Он сообщает также о еще неразрешенных затруднениях и указывает, поскольку это возможно, путь, который следует, по его мнению, испытать, тем самым стараясь дать толчок самодеятельности читателя. То, что Клейн не оценил этой манеры изложения Эйлера, объясняется просто тем, что ему, по его собственным словам, не приходилось серьезно изучать сочинений Эйлера. (*Прим. ред. нем. изд.*)

педии. Но я отклоняю также и естественно напрашивающуюся мысль выделить основные отрасли и дать их *систематическое* изложение. Напротив, я хочу дать только ряд набросков, в которых то излагается жизнь и деятельность отдельных выдающихся личностей, то характеризуются цели и приводятся результаты определенных научных школ. При этом я совершенно не претендую на какую бы то ни было полноту изложения и заранее отказываюсь от предварительного педантичного изучения всех деталей исторического прошлого. Дело будет итти только о том, чтобы более или менее точно определить общий характер и смысл того или иного творческого достижения.

Я начну с первого большого отдела, посвященного исключительно Гауссу. Труды Гаусса не только в хронологическом смысле знаменуют начало XIX столетия, но и являются также исходным пунктом для различных новых отраслей науки этого столетия. Изучение великой личности Гаусса тем более подходит для введения в излагаемый здесь предмет, что в этом человеке мы встречаемся с исключительным и весьма счастливым сочетанием духа обеих эпох, на грани которых он стоит.

В своих внешних проявлениях, т. е. в характере своего воздействия на современников, Гаусс всецело является типичным представителем XVIII столетия. Как раз у него мы встречаем научную связь с немногими избранными математиками в форме обширной переписки; классическая форма изложения характеризует его сочинения в значительно большей мере, чем у кого бы то ни было из его предшественников. К этим чертам присоединяется резко выраженное отвращение к преподавательской деятельности, которую он, правда, понимал только как элементарное обучение; руководства отдельными незаурядно одаренными учениками Гаусс от себя не отклонял. Как раз в этом отношении он оказывается более консервативным, чем, например, Монж, который был старше его и который, как уже указывалось выше, основанием Политехнической школы (1794) предвосхитил характер развития XIX столетия. Однако в то время как круг математических идей Монжа остается еще в рамках XVIII века, Гаусс открывает своими совершенно оригинальными работами новую эпоху.

Глава первая.

Гаусс.

Прежде всего приведем несколько биографических дат.

Гаусс родился в 1777 г. в Брауншвейге.

1795—1798 гг. — студент в Геттингене.

1799 г. — получает докторскую степень в Гельмстеде и звание приват-доцента в Брауншвейге.

С 1807 г. и до самой смерти был директором обсерватории [1]) и ординарным профессором Геттингенского университета.

Умер в 1855 г.

Все научное наследие Гаусса стало легко доступным благодаря изданному Геттингенским научным обществом полному собранию его сочинений [2]).

I. Прикладная математика.

Я склонен начать с работ Гаусса по прикладной математике, потому что в этой области легче всего прийти к оценкам, не вызывающим возражений. Стимулы к деятельности Гаусса в этом направлении каждый раз являлись извне; но затем, конечно, в постановке проблем и в их решении проявляется свойственная ему своеобразная сила творчества, которую он развил в себе на вопросах чистой математики и которая получила выражение в его словах: „Nil actúm reputans si quid superesset agendum“ („Не считать ничего сделанным, если еще кое-что осталось сделать“) [3]).

Его деятельность в этом направлении можно примерно уложить в хронологические рамки следующим образом: 1800—

---

[1]) Геттингенская обсерватория начала организовываться в 1811 г. во время царствования Жерома Бонапарта; она была вполне закончена только в 1816 г. уже после возвращения Ганноверской династии.

[2]) Материал расположен в следующем порядке: т. 1 — Disquisitiones Arithmeticae („Арифметические исследования“); т. 2 — Высшая арифметика; т. 3 — Анализ; т. 4 — Теория вероятностей и геометрия; т. 5 — Математическая физика; т. 6 — Работы по астрономии; т. 7 — Теоретическая астрономия; т. 8 — Дополнения к т. 1—4; т. 9 — Геодезия, продолжение т. 4; т. 10, 1 — Дополнения к работам по чистой математике. Дневник; т. 11, 1 — Дополнения к работам по физике; томы 10, 2 и 11, 2 содержат статьи о научном наследии Гаусса.

[3]) Werke, т. 5, стр. 629.

1820 гг. — астрономия, 1820—1830 гг. — геодезия, 1830—1840 гг. — физика, причем на эти даты, конечно, следует смотреть только как на расплывчатые границы широких периодов.

Для астрономии важное значение имело то обстоятельство, что Гаусс с 1807 г. был директором Геттингенской обсерватории; занимаемое им положение побуждало его к углубленным исследованиям в этой науке. Эти исследования достигают своего кульминационного пункта в двух крупных результатах:

1. Разыскание малой планеты Цереры и связанное с этой задачей усовершенствование методов определения орбит.

2. Работы по теории возмущений, особенно связанные с вычислениями возмущений Паллады.

Как лично для Гаусса, так и для господствовавшего в то время отношения к науке, когда еще не было перегородок между практическими потребностями и стремлениями к чисто теоретическому творчеству, чрезвычайно характерно то обстоятельство, что исчерпывающие, весьма плодотворные в чисто математическом отношении работы по этим двум проблемам были непосредственно связаны с внешними поводами практического характера.

1 января 1801 г. Пиацци (Piazzi) открыл первую из малых планет, которые, как мы теперь знаем, сотнями рассеяны между Марсом и Юпитером. Однако наблюдение орбиты новой планеты Цереры было ограничено очень коротким промежутком времени; после наблюдений над ней приблизительно на протяжении 9° она исчезла в солнечных лучах и больше не появлялась на утреннем небе. Возникла, таким образом, задача определить орбиту новой планеты по немногим данным наблюдения. Здесь нельзя было применить прежние методы определения орбит, так как они были основаны на обильном и постоянно проверявшемся материале наблюдений, относившемся к большим планетам, известным со времен глубокой древности.

Гаусс ставит себе задачу вычислить кеплерово движение по трем полным наблюдениям (время, прямое восхождение и склонение). Математически это означает определение в пространстве конического сечения, один фокус которого (Солнце) известен и которое пересекает три данные в пространстве прямые (лучи зрения, идущие от движущейся по эллипсу Земли к рассматриваемой планете), если дуги между этими прямыми пробегаются планетой в согласии со вторым законом Кеплера в известные промежутки времени. Задача приводит к уравнению восьмой степени, одно решение которого (именно сама земная орбита) известно. Искомое решение отделяется от остальных шести при помощи физических условий.

Решение этой задачи и проведение вычислений во всех деталях является крупной заслугой Гаусса, которому в то время было 24 года. Он очень широко пользовался при этом приближенными методами, которые были придуманы им для этой цели. В дальнейшем он определил орбиту на основании четы-

рех неполных наблюдений и связал оба результата с помощью метода наименьших квадратов, который к тому времени еще не был им опубликован, но которым, по его собственным словам, он владел уже с 1795 г. Таким образом он пришел к результатам настолько точным, что Церера была по его указаниям вновь найдена, и притом не менее чем на 7° восточнее того места, в котором следовало бы ее искать, исходя из грубого приближения с помощью круговой орбиты. Этот блестящий успех, доступный также пониманию широких кругов, впервые прославил имя молодого Гаусса и поныне принадлежит к самым популярным его достижениям.

Опираясь на работы, касающиеся Цереры, и развивая дальше примененные в них методы, Гаусс создал свой большой труд *Theoria motus* [„Теория движения небесных тел“ [1]) (вышел в 1809 г. в издании Perthes)], который стал как бы сводом законов вычислительной астрономии благодаря образцовому способу изложения задач небесной механики и доведению до конца их числового решения. Это сочинение также написано Гауссом в той классической манере, которая имеет целью, как мы уже охарактеризовали выше, произвести *впечатление совершенством формы и законченностью построения*, а не удовлетворить *интерес читателя относительно процесса создания* этого научного произведения путем раскрытия основ и конструктивных деталей творческой работы.

Методы, которыми пользовался Гаусс, были конечно в дальнейшем развиты и усовершенствованы; были у него также и предшественники в этой области.

Если ограничиться только двумя именами — в качестве предшественника можно назвать Лагранжа (Lagrange) и как преемника Гиббса (Gibbs). Подробная история этой ветви науки дана в „Энциклопедии“ (Enzykl. VI, 2) в статье Герглоца (Herglotz) *Bahnbestimmung des Planeten und Kometen* („Определение орбит планет и комет“).

Обратимся теперь ко второй группе астрономических работ, — к работам, посвященным теории возмущений. Поводом к этим работам также послужило открытие, именно отыскание Паллады 28 марта 1802 г. Ольберсом (Olbers), другом отца Гаусса. Эта планета, также принадлежащая к астероидам, отличается особенно большим эксцентриситетом $\left(e=\frac{1}{5}\right)$ и наклонением ($i=34°$) своей орбиты; ввиду указанных обстоятельств возмущающее влияние других планет в данном случае особенно сильно, они придают изучению этой планеты особый интерес, но вместе с тем чрезвычайно затрудняют вычисление ее орбиты. Парижская академия наук делала неоднократные попытки путем назначения премии привлечь внимание к разработке этой проблемы, но безуспешно. Нужны были виртуозное вычислительное

[1]) Werke, т. 7, стр. 1 и сл.

искусство и упорная, настойчивая энергия Гаусса, чтобы дерзнуть на преодоление такой задачи. И действительно трагично, что даже ему не удалось притти к окончательному результату. Поразительно, что его работы на эту тему, которым он уделял живейший интерес и многие годы неутомимого труда, сохранились в виде отдельных отрывков. После больших усилий, о которых свидетельствуют обширные вычисления, опубликованные в 1906 г. Бренделем (Brendel) в седьмом томе полного собрания сочинений Гаусса, и после того как вычисления возмущений Юпитера и Сатурна были закончены с помощью его ученика, Николаи (Nicolai), которого сам Гаусс называет „iuvenem in calculis parficiendis indefessum“ („юношей неутомимым в вычислениях“), работа обрывается и остается незаконченной.

Эти обстоятельства тем более поразительны, что имеются многочисленные указания на то, что Гаусс живейшим образом интересовался этим предметом. В 1812 г.,—представьте себе на мгновение политическое положение Германии в то время, — он опубликовал таинственную анаграмму, заключающуюся в определенной последовательности цифр 1 и 0 и содержащую очень важный результат относительно движения Паллады [1]). Эта анаграмма, несмотря на усилия Бренделя, не расшифрована до сих пор, но содержание ее Гаусс сам излагает в письме к Бесселю [2]) (Bessel). Судя по письму, анаграмма содержит в себе теорему: отношение средних движений Юпитера и Паллады колеблется около постоянного рационального значения $\frac{7}{18}$, т. е. здесь имеет место либрация.

Какие же методы привели Гаусса к этому и к другим столь же важным результатам? Как все математики и астрономы до него, он пользуется бесконечными *тригонометрическими рядами*, в которых аргументы целесообразно выбраны, а коэфициенты получаются путем вычисления определенных интегралов (механические квадратуры). Но здесь нельзя не испытать чувства некоторого разочарования, если исходить из предположения, что Гаусс, который первый дал точные критерии сходимости в работе о гипергеометрическом ряде (1812), должен был бы производить оценку погрешности, получающейся в том случае, когда взято только конечное число членов ряда. Однако такого исследования мы не находим. Напротив, следуя общему обычаю того времени, Гаусс обрывает в этой работе, как и позднее в своих геодезических вычислениях, ряды, как только отдельные члены становятся на его взгляд достаточно малыми.

Опубликованная в последние годы диссертация Струве [3]) (Struve) доказала, что орбита Паллады за годы 1803—1910 в действительности недостаточно согласуется с гауссовыми воз-

[1]) Werke, т. 6, стр. 350.

[2]) Werke, т. 7, стр. 421.

[3]) G. Struve, Die Darstellung der Pallasbahn durch die Gausssche Theorie in dem Zeitraum 1803 bis 1910, Berlin 1911.

мущениями первого порядка; Струве полагает, что для получения достаточного совпадения с результатами наблюдений следовало бы ввести возмущения до третьего порядка включительно.

Математику современной школы с ее абстрактным направлением покажется чрезвычайно странным, что Гаусс, основатель строгой теории сходимости рядов, на практике ведет себя совершенно не так, как этого требует теория. Ясно ведь, что вышеуказанные приемы, будучи логически не обоснованными, могут привести в некоторых случаях к совершенно ложным результатам.

Это противоречие можно разрешить только с помощью психологических соображений: исследователя интересует только то, что служит для достижения поставленной цели. Целью чистого математика является полная, до конца исследованная и глубоко продуманная система всех возможностей, которую представляет избранный предмет. Основным вспомогательным средством для этого являются строгое логическое разделение и классификация отдельных случаев. Поэтому искусственно построенные исключительные случаи представляют для него такой же, если не больший интерес, как и естественно развертывающиеся образы. *Практическим применениям, которые выделяют именно эти общие случаи, он совершенно не уделяет внимания.*

Между тем целью вычислителя-практика является получение числового результата. Он опускает поэтому логически отточенное доказательство законности своих приемов, т. е. он полагается более или менее бессознательно на свой математический инстинкт, который диктует ему молчаливое допущение необходимых предпосылок, в данном случае, например, чередование знаков и неограниченное уменьшение абсолютного значения членов ряда. Скорее инстинктивно чувствуемое, чем осознанное, право так поступать — а так поступать он должен, если он вообще хочет продвинуться вперед, — подтверждается для него постоянным сравнением результатов вычисления с результатами наблюдения.

Укажу еще между прочим, чтобы облегчить изучение произведений Гаусса (как и вообще более старой литературы), на то, что термин „сходимость“ употребляется им в значении, отличающемся от современного. Гаусс называет ряд сходящимся, если его члены, начиная с определенного места, неограниченно убывают, в то время как мы под сходимостью подразумеваем, что конечные суммы ряда стремятся к определенному пределу. Гаусс первый обратил внимание на это различие, и он же дал первые критерии сходимости в современном смысле этого слова; то и другое сделано в его работе о гипергеометрическом ряде (1812). О ряде, который обладает свойством сходимости в современном смысле, он как-то говорит, что такой ряд „summam finitam ex asse determinatam praebet“ [1]).

[1]) Werke, т. 3, стр. 126.

После этого небольшого отступления я хотел бы вернуться к вопросу о том, почему же Гаусс прекратил работы над вычислением орбиты Паллады, которые он столь энергично и успешно производил.

Явление, с которым мы здесь встречаемся, не является единичным в творчестве Гаусса; он часто не опубликовывал самых прекрасных своих результатов. Что могло вызвать эту странную остановку почти у самой цели? Может быть, причину надо искать в ипохондрии, которая иногда овладевала Гауссом среди самой успешной творческой работы. Своеобразное свидетельство таких настроений можно найти, например, в заметках к работам по эллиптическим функциям, которые относятся примерно к периоду с 1807 по 1810 г. Здесь среди заметок чисто научного характера вдруг попадается написанная карандашом мелким почерком фраза: „Der Tod ist mir lieber als ein solches Leben“ („Смерть мне милее такой жизни“). Можно, пожалуй, искать повод к таким настроениям в чрезвычайно печальных обстоятельствах, в которых он находился в то время. Его новая должность в Геттингене не давала ему пока никакого дохода, между тем как французы наложили на него значительную контрибуцию, которая поставила его в очень тяжелое материальное положение. Он жил в то время в убогой квартире на Turmstrasse (Башенной улице) вблизи еще поныне стоящей башни, на которой были установлены весьма несовершенные астрономические инструменты. Окружающая его среда и прежде всего его собственная семья не обнаруживали ни малейшего понимания его гигантской и на взгляд профанов совершенно бессмысленной и бесцельной работы, которая отвлекала его от всех остальных интересов и не доставляла ему никакого внешнего успеха. Его осыпали горькими упреками и некоторые считали его даже не вполне нормальным.

Я, однако, склонен искать источник его душевного недуга глубже, чем в гнетущем убожестве повседневности. Мне кажется, что это скорее была реакция после чрезвычайно напряженной творческой деятельности, своего рода временный паралич активности и воли, это был неизбежный удел столь рано и столь сильно развившейся творческой натуры, которая беспрестанно находилась во власти мощно прорывавшегося дарования. Жертвой такой душевной усталости, вероятно, и стала проблема вычисления орбиты Паллады.

Однако, хотя непосредственная цель этой работы и не была достигнута, все же она принесла богатые чисто научные плоды. Об этом свидетельствуют три опубликованные Гауссом работы:

в 1812 г.: *Über die hypergeometrische Reihe* („О гипергеометрическом ряде“);

в 1814 г.: *Über mechanische Quadratur* („О механических квадратурах“);

в 1818 г.: *Über Säkularstörungen* („О вековых возмущениях“).

Первая уже неоднократно цитированная работа (Werke, т. 3, стр. 123—196) имеет чисто аналитический характер, но содержит также некоторые разложения в ряды и некоторые соотношения, которые были получены при вычислениях возмущений. Эта работа включает проблемы астрономии в систему общих вопросов анализа.

Работы о приближенном вычислении интегралов собраны под заглавием: *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* [1]) („Новый метод приближенного вычисления значений интегралов"). Они возникали из потребности в определении числовых значений коэфициентов отдельных членов тех рядов, которые встречались при вычислениях возмущений, и дают общие соображения, которыми целесообразно руководствоваться при практических вычислениях.

В частности „метод Гаусса" решает вопрос о наилучшем приближении площади, ограниченной кривой, двумя ординатами и осью абсцисс, с помощью возможно меньшего числа значений ординат, и дает для каждого наперед заданного числа значений ординат наиболее целесообразный выбор соответствующих абсцисс. Таким образом можно было бы, например, ответить на вопрос, как распределить три измерения температуры в течение дня, чтобы по возможности более точно охарактеризовать состояние температуры за весь день.

В третьей из указанных работ [2]) Гаусс дает наглядное истолкование и вычисление так называемых вековых возмущений, производимых планетой; при этом он попутно излагает свой метод вычисления периодов для эллиптического интеграла первого рода. Характер этой работы можно представить себе уже по ее названию: *Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispartita* („Определение притяжения, которое производила бы планета в какой-либо заданной точке, если бы масса планеты была непрерывно распределена по всей орбите пропорционально времени, в течение которого проходятся отдельные части орбиты"). Оно указывает, как Гаусс наглядно представляет себе возмущающее действие планеты: представим себе, что масса планеты распределена вдоль всей орбиты и притом обратно пропорционально скорости в каждой точке этой орбиты; тогда притяжение, оказываемое таким кольцом на другое тело, и дает величину векового возмущения.

Эта интерпретация служит примером своеобразного пластического мышления, которое то и дело проявляется у Гаусса. Он был не только виртуозным вычислителем, победоносно преодолевавшим все трудности, но также охотно воплощал свои числа в образы, которые были для него полны жизни.

---

[1]) Werke, т. 3, стр. 163—196.
[2]) Werke, т. 3, стр. 331—360.

Из научной деятельности Гаусса за эти годы кроме того, что содержится в этих трех работах, нам известны только разрозненные факты, да и то в общих чертах. О долголетних вычислениях возмущений Паллады мы ближе узнали в последнее время, благодаря опубликованным Бренделем в седьмом томе материалам. Томы шестой и седьмой впрочем указывают, что наряду с этими гигантскими вычислениями Гаусс проделал множество других, а также произвел огромное количество наблюдений. Напрасно задаешь себе вопрос, каким образом Гаусс, только в зрелом возрасте обратившийся к практической астрономии, мог приобрести нужный навык в обращении с инструментами, как он чисто физически находил время для такой огромной работы при тех серьезных математических проблемах, которые его непрерывно занимали. Почти непостижимая энергия и сверхчеловеческая работоспособность, о которых говорят эти оставленные им страницы, ставят этого несравненного по гениальности человека выше всякой обычной меры оценки.

Я обращаюсь теперь ко второй области прикладной математики, которой Гаусс посвятил свои силы, именно к *геодезии*. Задача, которая стояла здесь перед ним в первую очередь, была тоже чисто практического характера. Дело шло о геодезической съемке ганноверского королевства.

Точные геодезические измерения были впервые предприняты в XVII и XVIII столетиях из чисто научного интереса к форме земли. Прежде всего надо было путем точных градусных измерений разрешить спорный вопрос, представляет ли Земля сжатый или удлиненный эллипсоид вращения. После того как окончательно убедились в справедливости первого допущения, в XIX веке началось более детальное изучение формы Земли; оно привело к представлению, что поверхность Земли есть неправильная поверхность, которую Листинг назвал „геоидом“. Впрочем, уже Гауссу было известно, что эллипсоид вращения представляет только приближение к истинной форме Земли.

Этот чисто научный характер развития геодезии нарушается в конце XVIII столетия благодаря огромному перевороту во всех областях жизни. Как и во многих других областях, Наполеон и здесь дал первый толчок к крупным достижениям и открытиям. Для стратегических целей и для нужд реорганизованного распределения налогов были необходимы точные географические карты, которые можно было составить только на основании планомерных и точных измерений соответствующих местностей. Отдельные страны начинают поэтому систематически проводить решение этой задачи. Ганновер был побужден к этому Данией, где живший в Киле Шумахер (Schumacher) (директор тамошней обсерватории, издатель журнала „Astronomische Nachrichten“), бывший ученик Гаусса, уже приступил к работе, исходя из находившегося вблизи Гамбурга геодезического базиса, которым позднее воспользовался и Гаусс.

В 1816 г. Гауссу было предложено правительством выполнить аналогичную работу для Ганновера. Его собственные измерения приходятся на промежуток с 1821 по 1825 г., дело было доведено до конца его помощниками только в 1841 г. Результатом этой деятельности являются опубликованные им две важные научные работы:

в 1828 г.: *Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona* („Определение разности широт между обсерваториями Геттингена и Альтоны", Werke, т. 9, стр. 1 и сл.) и

в 1843 г.: *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* („Исследования по вопросам высшей геодезии", там же, т. 4, стр. 259 и сл.).

Первое из этих сочинений между прочим содержит указание на то, что истинная форма земли отличается от эллипсоида, дающего только его приближенную форму. Второе сочинение надо рассматривать как отрывок более широко задуманной работы[1]).

В этих работах я хотел бы отметить только два пункта, которые стали особенно популярными. Отметим прежде всего знаменитое измерение наибольшего из известных до того времени и геодезически обработанных треугольников, образованного тремя горными вершинами: Высокий Гаген, Брокен, Инсельсберг. Далее в этом сочинении описывается изобретенный и многократно употреблявшийся Гауссом *гелиотроп*, прибор, дающий путем концентрации отраженных солнечных лучей хорошо видимые и удобные для измерений точки визирования.

Подобно тому, как этот аппарат уже давно вытеснен нашими современными интенсивными точечными источниками света и электрическими прожекторами, так и во многих других пунктах работа Гаусса в настоящее время, конечно, далеко превзойдена в смысле усовершенствования методов и уточнения результатов. В измерениях Гаусса замечается, например, недостаток единого целесообразного общего плана, что, разумеется, можно объяснить многочисленными трудностями различного рода (недостатком денежных средств, трудностью найти хорошие наблюдательные пункты в ровной и лесистой местности и т. д.), которые стояли на пути этой впервые предпринятой работы, растянувшейся более, чем на 20 лет.

Несмотря на то, что отдельные части работы Гаусса в настоящее время, конечно, устарели, она имеет крупные непреходящие заслуги, которые по своему значению отнюдь не ограничиваются тем, что Гаусс первый с помощью несовершенных инструментов действительно выполнил измерения, преодолев огромные препятствия практического характера. Гаусс дал методы и схемы, в рамках которых до сих пор движутся геодезические измерения. В качестве важнейшего момента приходится

[1]) Другая работа на эту же тему появилась в 1847 г. (Werke, т. 4 стр. 301 и сл.).

назвать последовательное применение метода наименьших квадратов. Особенностью метода Гаусса является также применение определенной конформной проекции эллипсоида на плоскость: в связи с задачей градусного измерения, при котором меридиан Геттинген-Альтона был взят за основное направление, Гаусс сам производил вычисления отклонений геодезических линий от прямых с чрезвычайно большой точностью. Обе эти идеи и способ их проведения имели такое решающее значение при дальнейшем развитии геодезии, что представители этой науки считают Гаусса всецело своим[1]).

В эти годы практической деятельности, которые внесли отрадную перемену в образ жизни Гаусса и благотворно повлияли на его здоровье (напомним, что понятие „каникулярного путешествия" было тогда еще неизвестно), он проявил также интенсивнейшую внутреннюю творческую деятельность. В 1821 и 1823 гг. он опубликовал свой *метод наименьших квадратов*[2]). Но прежде всего Гаусса в это время занимали глубокие размышления из области диференциальной геометрии, опубликованные им в 1827 г. в большой работе *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827. („Общие исследования о кривых поверхностях", Werke, т. 4, стр. 217 и сл.). Попытаюсь несколькими выдержками охарактеризовать ее содержание.

Исходя из сферического отображения любых поверхностей, здесь устанавливается важное понятие о *мере кривизны* в данной точке поверхности $\left(\frac{1}{R_1 \cdot R_2}\right.$, где R_1 и R_2 означают главные радиусы кривизны в этой точке поверхности). Затем следует основная теорема о *постоянстве кривизны* при любом изгибании поверхности (без сжатия и растяжения), к которой далее примыкает важная теорема о том, что площадь сферического отображения геодезического треугольника пропорциональна сферическому избытку или соответственно дефекту этого треугольника. Далее уточняется также теорема Лежандра, согласно которой каждый угол сферического треугольника с данными сторонами a, b, c, на $\frac{1}{3}$ сферического избытка больше соответствующего угла плоского треугольника, имеющего стороны такой же длины.

Последние соображения, как установил Штекель (Stäckel), относятся еще к 1816 г., когда Гаусс составлял первые планы, относящиеся к геодезическим съемкам[3]). Теорему об инвариантности кривизны при изгибании Гаусс в 1822 г. выводит из формы элемента дуги

$$ds^2 = m^2(dt^2 + dn^2)$$

---

[1]) Для ознакомления с влиянием Гаусса в этом направлении и со всеми затронутыми здесь вопросами отсылаю к реферату Пицетти: Pizetti, Höhere Geodesie (Enzykl. VI, 1). Далее: Galle, Über die geodätischen Arbeiten von Gauss, Gauss'Werke, т. 11, 2.

[2]) Werke, т. 4. Особенно стр. 1—108.

[3]) См. Stäckel, Gauss als Geometer, Gauss'Werke, т. 10,2, Abh. IV.

(Werke, т. 8, стр. 381, 385); гораздо менее наглядный вывод из общей формы

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

который Гаусс изложил в *Disquisitiones*, имеет, таким образом, более позднее происхождение (там же, т. 4, стр. 236).

Влияние *Disquisitiones* было чрезвычайно велико. Эта работа знаменовала первое крупное движение диференциальной геометрии за пределы трактата Монжа (Monge) и определила основное направление развития этой дисциплины до настоящего времени (см. реферат Фосса (Voss) об изгибании поверхностей, Enzykl. *III*, *D* 6a).

Но в этих рассуждениях ничто не обнаруживает, что Гаусс и здесь воздержался от опубликования самых смелых своих идей. Переписка с Ольберсом, Шумахером, Бесселем и другими, а также оставленные Гауссом заметки с несомненностью устанавливают, что Гаусс владел *неевклидовой геометрией*. Хотя он об этом открытии не опубликовал ни слова, но мысль о нем, как явствует из его писем, не покидала его ни в одной из его работ. В связи с этим измерение большого треугольника, составленного из световых лучей, приобретает совершенно иной характер. Пользуясь терминологией Г. Кантора, мы можем сказать, что Гаусс интересовался не только „имманентной" стороной математики, но для него имела существенное значение и ее „транзиентная" сторона. Его интересовало не только свободное от противоречий построение науки в себе, но и возможность с ее помощью связать между собой явления природы и овладеть ими. Эксперимент должен был решить, какая из двух геометрических систем, с его точки зрения одинаково живых и реальных, является наиболее подходящей для последней цели. Именно, так как отклонение суммы углов в треугольнике от 180° в неевклидовых геометриях возрастает при увеличении размеров треугольников (Гаусс в ту пору говорил только о возможности отрицательного отклонения), то Гаусс надеялся с помощью измерения такого большого треугольника получить ответ на свой вопрос. Между тем результат оказался отрицательным, так как полученное отклонение суммы углов от 180° целиком лежало в пределах возможной погрешности измерений.

Как известно, этот поставленный Гауссом вопрос остается открытым до сих пор. Предложение Лобачевского об измерении треугольника, составленного неподвижной звездой и двумя диаметрально противоположными точками земной орбиты, не было осуществлено из-за осложнений, связанных с аберрацией света, собственным движением неподвижной звезды и солнечной системы и т. д.

В одном из следующих отделов мы подробно поговорим о том, в какой мере Гаусс уже в это время владел своей „антиевклидовой" геометрией. Теперь же я займусь теми результатами, которыми ему обязана *физика*.

Прежде чем приступить к рассмотрению этой области, я хотел бы напомнить о человеке, который, хотя и не был математиком, но имел в свое время очень большое значение для развития точных наук в своей стране. Я имею в виду Александра фон-Гумбольдта (A. v. Humboldt). Приведу в качестве опорных пунктов несколько биографических дат. Гумбольдт родился в 1769 г. в Тегеле, около Берлина. Наиболее плодотворным периодом его жизни нужно считать его поездку в Южную Америку с 1799 по 1804 г., откуда он привез множество научных материалов. После этого он жил долгое время в Париже в общении со всеми выдающимися умами той эпохи; с 1827 г. он жил в Берлине, где и умер в возрасте 90 лет в 1859 г.

Гумбольдт сам был географом и биологом, как мы бы сказали теперь, т. е. представителем описательного, а не точного естествознания. Но он обладал редким даром постигать значение далеких от него областей, не имея о них точного представления; более того, руководствуясь своим общим мировоззрением и верным чутьем требований времени, он нередко оказывал плодотворное влияние на чуждые ему науки. В связи с этим свойством находится его способность безошибочно распознавать инстинктом молодые многообещающие таланты еще до того, как они себя вполне проявили.

Так как Гумбольдт к тому же занимал в Берлине выдающееся общественное положение и пользовался чрезвычайным влиянием благодаря связям со двором и самыми различными кругами общества, то он был человеком, который в течение многих лет оказывал решающее влияние на развитие интересовавших его наук в Пруссии. Он является основоположником движения в области математики и естественных наук, аналогичного тому, которое в области гуманитарных наук началось уже приблизительно на десять лет раньше, а именно с основания Берлинского университета в 1810 г. Это — та эпоха развития, которую я назвал бы „немецким научным ренессансом". В 1824 г. он провел Либиха (Liebig) в возрасте 21 года на кафедру в Гиссен, а в 1827 г. 23-летнего Дирихле (Dirichlet) в Бреславль, преодолев в том и в другом случаях сильнейшее сопротивление со стороны факультетов. Гумбольдт хотел привлечь в Пруссию также и Гаусса; он попытался в начале 20-х годов привлечь его на должность директора Политехнической школы, которую собирались основать в Берлине. Предполагалось, что Гаусс не будет читать лекций, но будет главным образом следить за постановкой научной работы во всех государственных исследовательских институтах. Несмотря однако на такое предупредительное отношение, Гаусс отклонил это предложение. Только в 1828 г. по случаю съезда естествоиспытателей в Берлине Гумбольдту удалось лично познакомиться с Гауссом, которого он пригласил к себе в гости. Значение этого знакомства, которое постепенно перешло в дружбу целой жизни [см. переписку Гаусса и Гумбольдта, изданную в 1877 г. Брунсом (Bruhns)],

заключается для науки прежде всего в том, что Гумбольдт дал первый толчок работам Гаусса над проблемами земного магнетизма.

Вернувшись из своего путешествия в Южную Америку, Гумбольдт основал *Союз для наблюдений над земным магнетизмом*, охвативший весь земной шар. По его предложению Гаусс, как мы увидим ниже, подверг собранный материал тщательной математической обработке.

В доме Гумбольдта и при его посредстве завязалось в 1828 г. и другое знакомство, которое имело очень большое значение для дальнейшего развития физики, именно знакомство Гаусса с Вебером (Weber). Вильгельм Вебер (родился в 1804 г.) был тогда приват-доцентом в Галле. В 1831 г. он был по предложению Гаусса приглашен в Геттинген, где он, за исключением нескольких лет профессуры в Лейпциге (1843—1849), оставался до своей смерти в 1890 г. [см. посвященную его памяти речь Рике (Riecke) в „Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften"].

С переходом Вебера в Геттинген начинается чрезвычайно плодотворная совместная работа этих двух глубоко различных людей. Гауссу было тогда 54 года, и он стоял уже на вершине славы. Веберу же было только 27 лет, и он сперва был только искусным помощником Гаусса при работе с приборами и при наблюдениях. Постепенно в процессе работы он приобретает все больше самостоятельности и значения. Наивысшей точки в своей деятельности он достигает несколько позже этого периода, именно в 1846 г. в Лейпциге своими первыми работами по электродинамическим измерениям. Внутреннее различие этих людей достаточно выражалось также и в их внешнем облике. Гаусс — приземистый, крепкого телосложения, настоящий представитель Нижней Саксонии, малоразговорчивый и замкнутый в себе. Своеобразной противоположностью ему является небольшой, изящный, подвижной Вебер, чрезвычайная любезность и разговорчивость которого сразу же обнаруживали коренного саксонца; он был действительно родом из Виттенберга, этой страны „саксонцев в квадрате" („Doppelsachsen"). На геттингенском памятнике Гауссу и Веберу эта противоположность из художественных соображений смягчена и даже по возрасту они кажутся более близкими, чем это было в действительности.

Чтобы правильно оценить совместную работу этих двух исследователей, я хотел бы дать краткое обозрение *электродинамики* — области, в которой они работали, — за период, непосредственно предшествовавший их работам.

В 1820 г. Эрстед (Oersted) открывает основное явление электромагнетизма, именно влияние тока на магнитную стрелку.

В 1821 г. Био (Biot) и Савар (Savart) устанавливают первый точный закон этого воздействия, вычислив силу, с которой круговой ток действует на магнитный полюс. Далее Ампер (Ampère), в промежуток времени с 1822 по 1826 г., с успехом изучив факты

взаимодействия двух токов и исходя из этого, объяснил магнетизм с помощью молекулярных токов. С необычайной быстротой идет дальнейшее развитие. В 1827 г. была опубликована работа Ома (Ohm) о математической обработке явлений в гальванической цепи, главным результатом которой является известный *закон Ома*. В 1828 г. Грин (Green) дает первые начала *теории потенциала*, которые долго остаются неизвестными, так как Грин, родившийся в семье бедного пекаря в Ноттингеме, в начале располагал весьма ограниченными возможностями и влиянием. К сожалению, то обстоятельство, что его талант был обнаружен и призван к деятельности, не послужило ему на пользу; после приглашения на кафедру в Кембридж он спился. Интересно, и с исторической точки зрения важно отметить, что́ именно он понимает в своем сочинении под названной его именем *„функцией Грина“*. Это не что иное, как экспериментально важный частный случай электростатического потенциала, именно потенциал того распределения электричества, которое индуцируется точечным электрическим зарядом на поверхности проводника, соединенного с землей. Грин употребляет для этого также термин „потенциальная функция“ („potential function“) в смысле „функции сил“. Как мы дальше увидим, Гаусс дает определение термина „потенциал“ совершенно иначе. Поэтому мало вероятно, чтобы Гаусс знал об этой нигде им не упоминаемой работе Грина; это объясняется, конечно, поздним распространением работы Грина [лишь после переиздания ее Вильямом Томсоном (W. Thomson)]. Работы этой нет также в библиотеке Гаусса. Упомянем еще о том, что в настоящее время термин „функция Грина“ понимается в гораздо более широком смысле. Теперь этим термином обозначают функцию точки в пространстве, которая имеет одну особенную точку и удовлетворяет заданному линейному диференциальному уравнению при соответственно взятых граничных условиях. В это понятие гриновский „потенциал“ входит как частный случай.

В 1831 г. электродинамика делает чрезвычайно важный шаг вперед благодаря открытию Фарадеем (Faraday) индуцированных токов. (Заметим, что и этот исследователь вышел из бедноты. Он начал свою работу „мальчиком“ у переплетчика, затем был служителем в лаборатории.)

В таком положении находилась эта наука, когда к ней обратились Гаусс и Вебер. Еще до появления Вебера в Геттингене Гаусс занимался вопросами физики. В пятом томе полного собрания сочинений находятся две его статьи, написанные им к концу 20-х годов: в 1829 г. *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik* („Об одном новом общем основном законе механики“ — начало наименьшего отклонения) и в 1830 г. *Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibrii* („Общие начала теории равновесия жидкостей“ — теория капиллярности), которые непосредственно примыкают к работам Лагранжа и Лапласа. С этого времени начинается десятилетие

совместной его работы с Вебером,— один из самых славных периодов Геттингенского университета, который кладет начало длительному содружеству математики и физики в Геттингене.

Первым крупным результатом этого времени является статья Гаусса (1832 г.) об абсолютном измерении магнитных величин [1]). Она представляет огромный шаг вперед в том отношении, что сводит всякое измерение к трем основным величинам: массе m, длине l и времени t. Здесь математик выступает в роли законодателя измерительной физики (ср. общую схему на стр. 630 пятого тома). Вместе с тем эта работа благодаря введению зеркального отсчета (в качестве отдельной характерной черты отметим применение подвеса магнита на нити вместо укрепления стрелки на острие) дает усовершенствование приборов для магнитных измерений до пределов астрономической точности.

Теперь я хочу отметить результат, который, конечно, выходит за пределы побочного достижения, полученного в процессе работы с Вебером, и который пользуется особенной известностью в широких кругах благодаря своему большому практическому значению, именно изобретение электромагнитного телеграфа. Самое достижение заключалось в том, что они воспользовались *для телеграфирования* в отличие от того, что уже делалось *раньше*, не оптическими (гелиотроп Гаусса) или электрохимическими [Земмеринг (Soemmering)] действиями, а электромагнитными, которые могут быть точно переданы на гораздо бóльшие расстояния. Впрочем, оба исследователя приступили к относящимся сюда экспериментам, имея в виду проверку закона Ома и законов разветвления цепей [последние были в окончательном виде формулированы позднее Кирхгофом (Kirchhoff)]. Однако они вполне ясно сознавали практическое значение своего изобретения. Гаусс высказывается об этом в письме к Шумахеру в том смысле, что установление системы передачи сообщений во всем мире является теперь только вопросом техническим и финансовым [2]).

Конструкция в деталях была выполнена Вебером. Передаточный и приемный аппарат были установлены в обсерватории и физическом институте (находившемся на месте нынешней университетской библиотеки); башня св. Иоганна служила опорой для соединительной линии. В собрании сочинений Гаусса встречаются заметки относительно этих работ на стр. 338, 356, 369 пятого тома.

С чисто научной точки зрения работы следующего (1834) года представляют, пожалуй, еще больший интерес. В них сказывается побуждающее влияние Гумбольдта.

На территории астрономической обсерватории строится магнитная обсерватория, и Гаусс посвящает свои силы дальней-

[1]) Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata („Интенсивность земной магнитной силы, выраженная в абсолютной мере“, Werke, т. 5, стр. 79 и сл.).

[2]) См. Briefwechsel Gauss-Schumacher, т. II, стр. 411 и 417.

шему расширению и развитию Магнитного союза; нужно сказать, что этой организационной работой Гаусс занимался с особым удовольствием. В 1836/37 г. вышел под редакцией Гаусса и Вебера первый номер „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins“ („Наблюдения Магнитного союза“); всего же вышло семь номеров. В первом номере содержатся указания и данные об особенностях конструкции приборов и о способах наблюдения.

На основе главных результатов, полученных Гауссом и Вебером, уже можно было позже перейти к отдельным вопросам более тонкого характера, средства к решению которых давала развившаяся тем временем техника. Гауссу и Веберу удалось при помощи наблюдений через каждые пять минут (до этого времени наблюдения производились через каждый час) установить в главных чертах ход суточного изменения напряженности земного магнетизма; такие же наблюдения, произведенные во многих и притом различных местах земного шара, обнаружили с полной очевидностью, что это изменение происходит одновременно на всем земном шаре и поэтому должно быть отнесено к явлениям земного происхождения. На основании этого результата можно было при более частых наблюдениях с более точными приборами обнаружить небольшие локальные вариации.

В следующих номерах журнала напечатаны основные работы Гаусса в этой области:

в 1838/39 г.: *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus* („Общая теория земного магнетизма“, Werke, т. 5, стр. 119);

в 1839/40 г.: *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte* („Общие предложения о силах притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“, т. 5, стр. 195).

Заглавие первой работы может, пожалуй, ввести в заблуждение. Речь идет не о физической теории, а об интерполяционном представлении результатов наблюдений с помощью шаровых функций, что до некоторой степени соответствует птолемеевскому представлению о движении планет. Замечательно, что сам Гаусс был совершенно иного мнения о значении своей работы. Он полагал, что здесь дается объяснение самой сущности магнитной силы (приблизительно в духе закона Ньютона), и определенно высказывается в предисловии против метода изображения земного магнетизма в виде налагающихся действий нескольких магнитов, как это делал до него хотя бы Тобиас Майер (T. Mayer).

Между тем, в действительности метод Гаусса по существу совпадает с этим приемом, так как каждую шаровую функцию можно рассматривать как действие мультиполюсной системы, если только перейти к исчезающе малым размерам. Благодаря этому произведенному им предельному переходу способ Гаусса гораздо удобнее и точнее, чем способ, основанный на изучении

наложения действий конечных магнитов, но принципиально он от него не отличается.

В этом порядке идей Гаусс выражает потенциал земного магнетизма конечным рядом шаровых функций, а именно он доходит до функций четвертого порядка включительно:

$$V=\frac{P_1}{r^2}+\frac{P_2}{r^3}+\frac{P_3}{r^4}+\frac{P_4}{r^5},$$

где P_n означает однородный полином относительно x, y, z степени n, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta P_n=0.$$

Такой полином имеет $2n+1$ независимых постоянных; поэтому для вышеуказанного представления необходимо вычислить 24 коэфициента[1]). Из этого ряда путем диференцирования выводятся компоненты силы X, Y, Z.

Гаусс, повидимому, предчувствовал, что как эти ряды, так и те, которые из них получаются диференцированием, должны находиться в прекрасном согласии с наблюдениями. Впоследствии по этому плану неоднократно производились вычисления, основанные на большем числе наблюдений, и каждый раз обнаруживалось, что целесообразнее всего оборвать ряд на членах четвертого порядка; если принимать во внимание и члены пятого порядка, то коэфициенты становятся слишком неточными, временные и локальные возмущения слишком значительными и уже не дают общего представления, которое имело бы какую-либо ценность. Здесь же отметим еще один результат, получивший большую известность, именно вычисление положения южного магнитного полюса земли, которое оказалось довольно точным.

Переходим теперь ко второй работе, в которой заложены основы *теории потенциала* в ее современном виде. [За историческими справками отсылаю к Математической Энциклопедии (Enzykl. II A 7b).] Термин „потенциал" вводится на стр. 200 пятого тома и определяется в „Атласе земного магнетизма"[2]) как „возможная работа", т. е. как та работа, которую следовало бы затратить, чтобы привести точечный электрический единичный заряд из бесконечности в данное место.

Откуда Гаусс взял слово „потенциал", не совсем ясно. Идея силовой функции, из которой с помощью нахождения производной по определенному направлению получаются ньютоновские силы притяжения, встречается впервые у Лагранжа в 1773 г. Уравнение $\Delta V=0$ рассматривалось Лапласом в 1782 г.[3]),

---

[1]) Подробные сведения об этих коэфициентах даются в Werke, т. 5, стр. 150, 151.

[2]) Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen, Supplement zu den Resultaten..., hezausgeg. von C. F. Gauss und W. Weber. Lpz. 1840.

[3]) Это уравнение встречается уже у Эйлера. Ср. E. Hoppe, Geschichte der Physik, Braunschweig, 1926, стр. 80 и сл. (*Прим. ред. нем. изд.*)

уравнение $\Delta V = -4\pi\rho$ внутри действующих масс рассматривалось впервые Пуассоном в 1813 г. для частного случая. Следовательно, эти подходы Гаусс уже имел перед собой. Возникает еще вопрос, интересный с исторической точки зрения, именно: знал ли Гаусс о связи теории потенциала с теорией функций комплексного переменного? Есть много оснований считать утвердительный ответ на этот вопрос весьма вероятным; однако Гаусс никогда не высказывался по этому поводу в какой бы то ни было форме.

Наряду с этими крупными математическими работами Гаусса занимали также размышления о сущности сил, встречающихся в электродинамике, размышления, представляющие для нас большой интерес. Сюда относятся различные замечания за годы 1833—1836; вероятно, найдется еще кое-что достойное внимания и в не обработанном еще до конца наследии Гаусса[1]). Здесь я хотел бы обратить внимание только на письмо к Веберу, относящееся к 1845 г. (т. 5, стр. 627—629). Там имеется заслуживающее внимания замечание, что добавочные силы взаимодействия движущихся частиц электричества должны быть выведены из воздействия, распространяющегося с конечной скоростью (аналогично свету). В этих словах несомненно выражается предчувствие современной связи электродинамики и оптики. К сожалению, эта мысль не была воспринята Вебером; наоборот, она была вытеснена появившимся вскоре, в 1846 г., *законом Вебера*, согласно которому между движущимися частицами e и e' действует мгновенная сила

$$K = e \cdot e' \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2 r^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{c^2 r} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \right\}$$

(которая зависит, следовательно, от относительной скорости и относительного ускорения обеих частиц). Здесь c есть так называемая веберовская постоянная, которая имеет размерность скорости и равна $439\,450 \cdot 10^6$ *мм/сек*, как это было найдено Вебером и Кольраушем (Kohlrausch) в 1855 г. Этот закон в течение 30 лет считался последним словом в области физического объяснения природы, пока не был вытеснен после упорного сопротивления теорией Максвелла. Кирхгоф еще в 1857 г. нашел замечательное соотношение, что $\frac{c}{\sqrt{2}}$ равно скорости света, но не сделал никаких замечаний по этому поводу. Вебер также отмечает этот факт в своей работе 1864 г. об электрических колебаниях (Werke, т. 4, стр. 105 и сл.), но полагает (стр. 157), что вследствие различия этих явлений здесь нет оснований предполагать наличие дальнейших зависимостей. Впрочем, и Кирхгоф и Вебер наблюдали только колебания вдоль проводящей проволоки; факт электрических колебаний в диэлектрике, как и вообще

[1]) Материал в отпечатанных листах готов и вошел в т. 11, 1 сочинений Гаусса. (*Прим. ред. нем. изд.*)

понятие диэлектрика, созданное Фарадеем, было им незнакомо. В 1858 г. Риман (Riemann) в сообщении Геттингенскому научному обществу [1]) решился высказать по этому поводу некоторые мысли, которые можно охарактеризовать как предвосхищение теории, созданной Максвеллом в 1865 г. Однако Риман взял это сообщение из-за небольшой ошибки в вычислениях обратно, и оно было поэтому опубликовано только после его смерти. Таким образом прошло много лет, пока идеи Масквелла проникли в Германию, так как и полемика Гельмгольца (Helmholtz) против закона Вебера не имела решающего успеха. Однако косвенным образом Гельмгольц оказал большое влияние на современное развитие: он настойчиво обращал внимание своего ученика Г. Герца (H. Hertz) на идеи, идущие из Англии, и ободрял и побуждал его к продолжению опытов. Блестящий успех смелых опытов этого гениального молодого физика доставил, наконец, в 1888 г. окончательную победу теории Максвелла и в Германии.

II. Чистая математика.

Перечисленные выше работы Гаусса в области прикладной математики я охарактеризовал бы как увенчание дела его жизни. Главное же содержание его достижений и центр тяжести его творчества лежат в области *чистой математики*, которой он посвятил себя в годы молодости.

В качестве опорных пунктов я приведу опять некоторые биографические данные, о которых я уже частично упоминал, и остановлюсь на них здесь несколько подробнее.

Гаусс родился 30 апреля 1777 г. в Брауншвейге и рос в очень скромной обстановке. Существует множество анекдотов по поводу раннего развития одаренного мальчика, который, несмотря на крутое обращение и сопротивление со стороны окружающих, с упорной энергией продолжал развивать свой ум, тайно урывая для этого время, пока ему не посчастливилось обратить на себя внимание высокопоставленных лиц своими необыкновенными успехами. Здесь прежде всего надо отметить герцога Фердинанда Брауншвейгского, который дал мальчику возможность посещать гимназию, а затем и университет. В 1788 г. Гаусс поступает в Екатерининскую школу, по окончании которой в 1793 г. он посещает училище Карла, являвшееся истинным предверием к университету (оно было впоследствии преобразовано в нынешнее высшее техническое училище). Затем следует краткое время обучения в Геттингенском университете (1795—1798), после которого Гаусс снова возвращается на родину к своему покровителю. Здесь в Брауншвейге с 1798 по 1807 г. Гаусс переживает свой героический период,—сказал бы я,—период безудержной творческой деятельности и великих фундаментальных открытий.

---

[1]) Werke, 1-е изд., стр. 270 и сл., 2-е изд., стр. 288 и сл.

Области, к которым он обращается в первую очередь, — это „три великих А“: *арифметика, алгебра* и *анализ*. Геометрия, если не принимать во внимание его интереса к вопросу о ее основах, лишь позже вошла в круг его интересов, и потому о ней мы пока говорить не будем.

Одно крупное открытие знаменует начало математической деятельности Гаусса и побуждает его окончательно посвятить себя этой науке; до этого он в течение долгого времени полагал, что питает столь же сильное влечение к филологии. 30 марта 1796 г. ему удается доказать, что можно циркулем и линейкой построить *правильный семнадцатиугольник* или, другими словами, он доказал, что уравнение

$$x^{17}-1=0 \text{ или } x^{16}+x^{15}+x^{14}+\cdots+x+1=0$$

решается в квадратных радикалах. Гауссу еще не было 19 лет, когда он сделал это открытие, которое одним ударом далеко продвинуло вперед проблему построения правильных многоугольников, остававшуюся без движения в течение 2000 лет. Более того, он разрешил эту проблему до конца, так как ему вскоре удалось дать критерий возможности построения любого правильного n-угольника, показав, что разрешимость задачи зависит только от теоретико-числовых свойств n; если n — простое число, то оно должно быть вида $n=2^{2^\nu}+1$.

Этим поразительным открытием молодой, невзрачный, несколько неуклюжий студент, который жил в Геттингене весьма уединенно, поглощенный почти исключительно своей личной работой, сразу привлекает к себе общественное внимание. Циммерман (Zimmerman) опубликовал о нем краткое сообщение в „Jenenser Intelligenzblatt“ за 1796 г., к которому он сам добавил примечание, отмечающее исключительную заслугу Гаусса[1]). Это первая опубликованная работа Гаусса, хотя, как мы увидим ниже, она далеко не была первой научной работой. Затем следует в 1799 г. гельмштадтская диссертация, посвященная доказательству *основной теоремы алгебры*. Уже в эти молодые годы Гаусс очень осторожно выбирает форму изложения, скрывая самые глубокие свои идеи, чтобы разработать их предварительно для себя. Так, в отмеченной нами только что работе он тщательно избегает упоминания о мнимых величинах, хотя ясно, что мысль о них лежит в основе всего рассуждения, и говорит лишь о разложении каждого полинома на действительные множители первой или второй степени. Он оперирует при этом в плоскости xy, нигде не отмечая, что речь здесь идет о геометрической интерпретации комплексных чисел $x+iy$.

К этим работам, опубликованным Гауссом отдельными статьями, примыкает изданное в 1801 г. его первое крупное мастерское произведение *Disquisitiones arithmeticae* („Арифметические исследования“).

[1]) Gauss'Werke, т. 10, 1, стр. 3.

Вследствие чрезвычайной медлительности печатания в Госларе выход в свет сочинения сильно задержался, так что начало связанных с ним работ можно отнести на несколько лет раньше. Этим крупным шагом заканчивается полоса чисто математических открытий, и Гаусс, как мы видели, все более и более начинает заниматься вопросами прикладной математики, прежде всего астрономии. Изданное в 1809 г. сочинение *Theoria motus*, как по времени возникновения, так и по математическому содержанию, нужно также отнести к периоду пребывания в Брауншвейге.

В своих *Disquisitiones arithmeticae* (Werke, т. 1) Гаусс в полном смысле этого слова создал современную теорию чисел и предопределил все ее дальнейшее развитие до нынешнего дня. Восхищение этим трудом возрастает еще больше, когда наблюдаешь, как Гаусс без всякого внешнего побуждения с самого начала черпает весь этот мир идей из самого себя. Действительно, историческое исследование показывает, как мы еще увидим, что Гаусс уже владел большей частью своих открытий, прежде чем ознакомился в Геттингене с соответствующей литературой, именно с Эйлером, Лагранжем и Лежандром, которые углубили в нем страстный интерес к тому, что он сам создал. Если не считать этого чтения и довольно редкого посещения лекций Кестнера (Kaestner), Гаусс не подвергался никакому влиянию; он повиновался только велениям своего внутреннего непреодолимого стремления к творчеству.

Прежде всего я изложу в общих чертах содержание этого сочинения. Оно делится на три части. Первая посвящена вопросу о *квадратичных вычетах* и содержит первое доказательство *квадратичного закона взаимности*, этой основной теоремы теории чисел. Если, пользуясь удобным символом Лежандра, выразить равенством $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$ тот факт, что q является вычетом некоторого квадрата по модулю p, а равенством $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ тот факт, что это не имеет места (q есть „невычет" по модулю p), то закон взаимности можно выразить следующим образом:

$$\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

т. е. $\left(\frac{q}{p}\right)$ и $\left(\frac{p}{q}\right)$ имеют общий знак, за исключением того случая, когда оба числа имеют вид $4n+3$. Эту теорему Гаусс, сознавая ее большое значение, назвал „theorema aureum" („золотая теорема"). Предложение это уже было известно Эйлеру, но он не мог его доказать. Гаусс также нашел его сперва чисто индуктивным путем, исходя из наблюдений над числами, и только затем упорнейшим трудом добился дедуктивного доказательства. С этим характерным для Гаусса методом работы нам еще придется неоднократно встречаться.

Во второй части *Disquisitiones arithmeticae* Гаусс занимается теорией *квадратичных форм*, т. е. вопросом о том, какие значения может принимать при целых значениях m и n выражение $am^2+2bmn+cn^2$, где a, b, c — целые числа.

Наконец, в третьей части речь идет о *разрешимости уравнения деления круга* $x^n=1$ в *квадратных радикалах*. О критерии $n=2^{2^k}+1$ мы уже говорили.

Этими беглыми замечаниями мы должны здесь ограничиться[1]), они не исчерпывают содержания этого великого труда и меньше всего, конечно, могут дать представление о воплощенной в нем необыкновенной энергии мысли, преодолевающей все препятствия и приводящей, нередко самым трудным путем, к полному доказательству. Конечно, тот, кто хочет получить представление об истории возникновения изложенных здесь великих открытий, не будет чувствовать себя удовлетворенным при изучении *Disquisitiones arithmeticae*. Дедуктивное изложение, безупречно проведенное с неукоснительной строгостью, не дает никакого представления о пути, который привел к открытию, и о трудностях, которые пришлось при этом одолеть. Изложение не исходит из какой либо общей точки зрения и не затрагивает вопроса о значении тех проблем, которые так мастерски разрешены; поэтому его крайне трудно читать. И только благодаря интерпретирующим лекциям Дирихле, которые дают прекрасное введение в постановку проблем у Гаусса и выясняют характер его мышления, это сочинение получило то влияние, которого оно заслуживает.

Наряду с этими законченными и отдельно изданными трудами появился позже целый ряд отдельных статей, опубликованных большей частью в изданиях Геттингенского научного общества.

В *алгебре* Гаусса занимала преимущественно *основная теорема*, к которой он неоднократно возвращался. За доказательством, данным в диссертации в 1799 г., следует в 1815 г. совершенно новое доказательство, а в 1816 г. еще другое, основанное на использовании совершенно иных методов. В то время как в статье 1815 г. доказательство проводится так, что приходится рассматривать только действительную область, в работе 1816 г. Гаусс пользуется двойными интегралами в комплексной плоскости. В 1849 г. в связи с пятидесятилетием получения им степени доктора Гаусс еще раз вернулся к доказательству 1799 г.[2]).

В теории чисел, так же как и в алгебре, все дальнейшие работы по существу примыкают к основной проблеме, к „theo-

---

[1]) Это одно из тех мест, в которых ясно обнаруживается отрывочный характер настоящих лекций, о котором упоминалось в предисловии. Для подробного знакомства отсылаем к написанной по предложению Клейна статье Бахмана: P. Bachmann, Über Gauss'zahlentheoretische Arbeiten, Gauss' Werke, т. 10, 2, Abh. I (*Прим. ред. нем. изд.*).

[2]) Переиздано в Werke, т. 3, стр. 1 и сл., 31 и сл., 57 и сл., 71 и сл.

rema aureum", для которой Гаусс дал не менее шести различных доказательств. Все они опубликованы в работах, относящихся к 1808 и 1817 гг.; в этих работах даются также указания относительно кубичных и биквадратичных вычетов. Теоремы относительно биквадратичных вычетов, соответствующие „theorema aureum", содержатся в работах 1825 и 1831 гг.; эти работы вместе с тем чрезвычайно расширяют область теории чисел благодаря введению чисел вида $a+bi$ (где a и b обозначают целые числа)[1].

Наконец, работы по *анализу* я буду рассматривать, руководствуясь указанием Шлезингера (Schlesinger), как части большого распадающегося на три отдела труда, который не был, правда, закончен. Часть первую составляет появившаяся в 1812 г. статья о *гипергеометрическом ряде*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

особенное значение которого заключается в том, что он содержит в качестве частных случаев очень многие из известных нам рядов. Как уже было упомянуто при изложении астрономических работ, эта статья между прочим заключает в себе первые точные критерии сходимости рядов. Вторая часть должна была бы трактовать *теорию диференциальных уравнений* с коэфициентами, рационально зависящими от x, для которых гипергеометрический ряд представляет частный интеграл. С этим было бы связано изучение эллиптических модулярных функций и их обращений, которые также можно представить с помощью гипергеометрических рядов.

Наконец, третья часть должна была содержать теорию общих эллиптических функций.

Но о вещах, которые должны были заключаться во второй и третьей частях, Гаусс ничего не опубликовал, и только исследование неопубликованного наследия выявило эти сокровища, обладанием которыми мир раз навсегда обязан Абелю (1825) и Якоби (1827). Дальнейшие подробности об отношении работ Гаусса к результатам, найденным позднее Абелем и Якоби, см. в главе третьей. У Гаусса встречаются только небольшие намеки; так в *Disquisitiones arithmeticae* есть намек относительно лемнискаты[2], а в „Вековых возмущениях" (1808 г.) дана связь между периодом лемнискаты и арифметически-геометрическим средним, выражаемая формулой

$$\omega_1 = \frac{1}{\mu(m, n)} = \int_{0^\circ}^{360^\circ} \frac{dt}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 t + n^2\sin^2 t}}.$$

[1]) Ср. Werke, т. 2, а также стр. 68, ниже.

[2]) Art. 335; Werke, т. 1, стр. 412 и сл.

И здесь Гаусс снова проявляет крайнюю сдержанность. Тем не менее даже и немногие опубликованные им отрывки из результатов его творческой деятельности в этой области произвели на современников огромное впечатление как новизной и значительностью их математического содержания, так и безукоризненной строгостью изложения. Вскоре распространились слухи, что Гаусс владеет кроме того гораздо более важными и неожиданными результатами, что горячо оспаривалось другими. Вследствие этого к тому безграничному уважению, которым Гаусс пользовался у своих более молодых последователей, присоединилось все же некоторое недоверие, которое в связи с необщительным его характером не могло способствовать, конечно, установлению с ним более близких отношений. Так, например, Абель при своей поездке из Парижа в Берлин в 1827 г. намеренно не заехал в Геттинген, чтобы избежать встречи с Гауссом. Вероятно, Гаусс встретил бы робкого, неловкого молодого человека вполне любезно. Так, Дирихле сразу получил доступ к нему, как позже и Эйзенштейн (Eisenstein), оба по горячей рекомендации Гумбольдта. Напротив, Гаусс весьма неблагосклонно отнесся к Якоби, резкий саркастический характер которого был ему весьма антипатичен.

Лишь позднейшие поколения могли решить вопрос о научном богатстве, которым владел Гаусс, и они обнаружили такие сокровища, которые далеко превзошли всякие ожидания. Чем больше мы постепенно вникаем в наследие Гаусса, тем больше растет наше изумление перед этим необычайным гением, перед которым в конечном счете падали все затруднения и преграды.

Первые отрывки из тех частей наследия Гаусса, которые нас здесь интересуют, были уже в начале 70-х годов опубликованы Шерингом во втором и третьем томе собрания сочинений; но они были при этом только частично расположены в хронологическом порядке, потому что еще не были известны все те опорные пункты, которыми мы обладаем в настоящее время. Затем постепенно следует издание важнейшей переписки Гаусса; так еще в 1860—1862 гг. издается Петерсом переписка с Шумахером; в 1880 г. выходит переписка Гаусса—Бесселя, которая затрагивает главным образом астрономические вопросы, но содержит также много математически ценного материала. Например, в 1811 г. Гаусс в одном из писем[1]) говорит об интеграле $\int \frac{dx}{x}$ в плоскости комплексной переменной и дает значение этого интеграла по контуру, k раз огибающему начало координат, в виде $\oint \frac{dx}{x} = 2k\pi i$, и это задолго до великого труда Коши об интегралах в комплексной области! Наконец, остается здесь еще упомянуть о переписке Гаусса с Ольберсом, изданной в 1900 г. Шиллингом в Бремене (поскольку мы здесь не ка-

[1]) Werke, т. 8, стр. 90 и сл.

саемся геометрии, мы оставляем пока в стороне переписку с Больяи и Герлингом).

С 1898 г. руководство изданием сочинений Гаусса, которое возникло из обработки всего литературного наследия Гаусса, включая и неопубликованного, переходит ко мне. Я должен здесь указать на некоторые неприятные обстоятельства, которые далеко не способствовали успеху этого дела. После смерти Гаусса в 1855 г. оставленное им наследство было куплено правительством, но лишь поскольку оно „имеет научное значение“; „частная“, главным образом беллетристическая, часть библиотеки перешла к семье Гаусса и здесь с годами раздробилась до того, что ее совершенно невозможно было собрать. Насколько этот факт заслуживает сожаления, ясно видно из одного, к счастью благополучно окончившегося случая, именно из случая с *дневником Гаусса*[1]). Этот документ несравненной важности для истории развития Гаусса и всей математики вообще был передан семье в качестве невзрачной маленькой тетрадки „частного“ характера. В 1899 г. его обнаружил Штекель у внука Гаусса, в Гамельне, причем с трудом удалось получить его для научной обработки. Он содержит в непрерывно следующих датах почти полностью открытия с 1796 по 1801 г., а затем с большими пропусками открытия по 1814 г. Сколько же других важных материалов могло пропасть? Эта мысль особенно волнует, когда просматриваешь те из немногих книг, принадлежавших Гауссу в юности, которые дошли до нас. В силу совершенно своеобразной манеры экономить бумагу, коренящейся может быть в тяжелых условиях его юношеской жизни, Гаусс покрывает каждое свободное место заметками, написанными очень мелким почерком.

В этом отношении особенно важен сам по себе малоинтересный учебник арифметики Лейста, в котором было много белых страниц и который принадлежал Гауссу еще до геттингенского периода; этот учебник наряду с дневником служит ему до 1798 г. для всякого рода заметок. Таким необычайным образом дошло до нас, например, представление эллиптических функций с помощью бесконечного произведения.

Начиная с 1798 г. приходится изучать: записи на отдельных листах, записные книжки Гаусса и много отдельных записок, которые удается частично датировать с помощью остального материала.

Представление о творчестве Гаусса, полученное путем обработки этого наследия, конечно, не является вполне законченным. Многое в этом материале остается еще достаточно загадочным и запутанным; дальнейшее исследование, быть может, принесет с собою ключ к уяснению всех этих темных мест. Однако мы не могли в ожидании этого отложить опубликование уже найденного материала. Наоборот, мы должны были полученные

---

[1]) Werke, т. 10, 1, стр. 483 и сл.

крайне интересные результаты сделать по возможности скорее всеобщим достоянием, не останавливаясь перед возможностью того, что при дальнейшем изучении обнаружатся допущенные нами в отдельных пунктах ошибки. Как иногда может ввести в заблуждение установившаяся семейная традиция, показывает замечательный случай с мнимым портретом Гаусса, относящимся ко времени его знакомства с Ольберсом и помещенным в издании его дневника. Вопреки всем подтверждающим заявлениям этот портрет, как это теперь твердо установлено, оказался портретом Бесселя, часто бывавшего в то время у Ольберса.

При теперешнем состоянии наших знаний о жизни и творчестве Гаусса ход его математического развития рисуется следующим образом.

Первый, так сказать, *доисторический период*, — это время до начала его дневника.

Естественный интерес, какое-то, я сказал бы, детское любопытство приводит впервые мальчика независимо от каких-либо внешних влияний к математическим вопросам. Первое, что его привлекает, — это чистое искусство счета. Он беспрестанно считает с прямо-таки непреоборимым упорством и неутомимым прилежанием. Благодаря этим постоянным упражнениям в действиях над числами, например, над десятичными дробями с невероятным числом знаков, он не только достигает изумительной виртуозности в технике счета, которой он отличался всю свою жизнь, но его память овладевает таким колоссальным числовым материалом, он приобретает такой богатый опыт и такую широту кругозора в области чисел, какими навряд ли обладал кто-либо до или после него. Наряду с действиями над числами его интересует численное оперирование с бесконечными рядами. Путем наблюдений, делаемых им над своими числами, стало быть индуктивным, „экспериментальным" путем он уже рано постигает общие соотношения и законы. Об этом методе работы мы уже упомянули выше, по поводу „золотой теоремы". Этот метод, стоящий в резком противоречии с современными навыками математического исследования, был, однако, довольно распространен в XVIII столетии и встречается, например, также у Эйлера.

Одним из первых вопросов, пробудивших в Гауссе жажду творчества, был вопрос о так называемом *арифметически-геометрическом среднем*. Чтобы объединить преимущества каждого из двух средних:

$$m' = \frac{m+n}{2} \quad \text{и} \quad n' = \sqrt{m \cdot n},$$

путем, если можно так выразиться, смешения их, Гаусс продолжает процесс их образования и полагает

$$m'' = \frac{m'+n'}{2}, \quad n'' = \sqrt{m' \cdot n'},$$

и т. д.

Оперируя, понятно, с определенными числами, например, полагая $m=1$, $n=\sqrt{2}$, Гаусс замечает, что этот процесс сходится к некоторому пределу, и вычисляет его с большим числом десятичных знаков. Само собой разумеется, что Гаусс в это время еще и не подозревал, какое значение этот факт приобретет впоследствии в теории эллиптических функций. Однако мы здесь встречаемся с замечательным и, наверное, не случайным явлением. Все эти ранние, придуманные только для собственного удовольствия забавы ума являются подходами к значительной, лишь позже осознанной цели. В том-то именно и заключается подсознательная мудрость гения, что он уже при первых пробах сил, полуиграя, еще не сознавая всего значения своих действий, попадает, так сказать, своей киркой как раз в ту породу, которая в глубине своей таит золотоносную жилу. Но вот наступает 1795 год, о котором мы имеем более точные показания. По собственным словам Гаусса, он открыл в этом году метод наименьших квадратов; и с еще большей силой, чем до сих пор (все еще до геттингенского периода), его охватывает страстный интерес к целым числам, ярким свидетельством чего является предисловие к *Disquisitiones arithmeticae*. Незнакомый с какой бы то ни было литературой, он должен был все создавать себе сам. И здесь он вновь проявляет себя как неутомимый вычислитель, пролагающий пути в неизвестное. Гаусс составляет большие таблицы простых чисел, квадратичных вычетов и невычетов, выражает дроби $\frac{1}{p}$ от $p=1$ до $p=1000$ десятичными дробями, доводя эти вычисления до полного периода, что в иных случаях требовало нескольких сотен десятичных знаков.

При составлении последней таблицы Гаусс задался целью изучить зависимость периода от знаменателя p. Кто из современных исследователей пошел бы этим странным путем, чтобы получить новую теорему! Гаусса же привел к цели именно этот путь, по которому он следовал с неимоверной энергией. (Он сам утверждал, что отличается от других людей только своим прилежанием.) Таким же численно-индуктивным путем он получает, как и Эйлер до него, квадратичный закон взаимности — свою „золотую теорему“. Осенью 1795 г. Гаусс переезжает в Геттинген и прямо-таки проглатывает впервые попавшую в его руки литературу: Эйлера и Лагранжа.

30 марта 1796 г. наступает для него день его творческого крещения, с которого начинается *второй период* его научной деятельности, являющийся периодом регулярного ведения дневника (с 1796 по 1801 г.).

Гаусс занимался уже с некоторого времени группировкой корней из единицы ($x^n=1$) на основании своей теории „первообразных“ корней. И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника. Как уже было упомянуто, это

открытие явилось поворотным пунктом жизни Гаусса. Он принимает решение посвятить себя не филологии, а исключительно математике. С этой даты начинается его дневник, самый интересный документ, которым мы располагаем о ходе развития Гаусса. Здесь мы видим перед собой не того недоступного, замкнутого, осторожного Гаусса, каким мы его знаем по опубликованным им работам. Мы видим здесь Гаусса таким, каким он переживал и воспринимал свои великие открытия. Он живейшим образом выражает свою радость и удовлетворение, наделяет себя похвальными эпитетами и выражает свое настроение восторженными восклицаниями. Перед нашими глазами проходит гордый ряд великих открытий в арифметике, алгебре и анализе (правда не полный), и мы переживаем процесс возникновения *Disquisitiones arithmeticae*. И среди всех этих проявлений, мощных порывов гениального духа, можно сказать, трогательно находить до мелочей добросовестно выполненные ученические работы, от которых не освобождены и такие люди, как Гаусс. Мы находим здесь записи добросовестных упражнений в диференцировании, и непосредственно перед делением лемнискаты здесь встречаются совершенно банальные подстановки в интегралах, в которых должен упражняться любой студент.

Я хотел бы привести маленькую сводку наиболее замечательных записей дневника. Я указываю их номера, согласно нумерации в десятом томе полного собрания сочинений.

1. 30 марта 1796 г.: геометрическое деление окружности на 17 частей.

2. 8 апреля: первое строгое доказательство „theorema aureum". Это крайне сложное доказательство, содержащее восемь по-разному трактуемых случаев, замечательно неутомимой последовательностью своего проведения. Кронекер (Kronecker) называет это доказательство „пробой сил гауссова гения".

51. 7 января 1797 г. Гаусс приступает к изучению лемнискаты.

60. 19 марта 1797 г. он открывает происхождение показателя n^2 в уравнении лемнискаты. Это значит, что он, пользуясь комплексной областью, обнаружил двойную периодичность интеграла для дуги лемнискаты

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-ix)(1+ix)}}.$$

80. В октябре он находит доказательство фундаментальной теоремы алгебры, которое дает ему степень доктора.

98. 30 мая 1799 г. он получает крайне важный результат: он находит связь между арифметически-геометрическим средним и длиной лемнискаты, опять-таки путем непосредственного вычисления этих величин, определив при этом значение $\frac{1}{M(1, \sqrt{2})}$ с 11 десятичными знаками. Не уяснив себе еще вполне всех обстоятельств, он прекрасно понимает все значение этого откры-

тия, кладущего начало „совершенно новой области анализа“. С этого момента его успехи в области эллиптических функций развиваются быстрым темпом. Вначале он еще занимается только „лемнискатической“ функцией, т. е. частным случаем, в котором параллелограмом периодов является квадрат.

Но уже номера 105—109 от 6 мая до 3 июня 1800 года отмечают открытие общих двояко-периодических функций. Квадрат заменяется произвольным параллелограмом. Создается полная теория эллиптических и модулярных функций, и одним ударом Гаусс предвосхищает будущее развитие науки, подвинувшись дальше, чем Абель и Якоби.

С усилением занятий Гаусса астрономией заканчивается великий период открытий. Я хотел бы еще упомянуть номер 144,— от 23 октября 1813 г., — когда была фактически открыта теория биквадратических вычетов и числа $a + bi$ были также введены в теорию чисел. Это открытие очевидно доставило Гауссу особую радость. Он отмечает в дневнике, что решение этой задачи, которого он безуспешно добивался в течение семи лет, ему суждено было получить как раз к моменту рождения сына.

Я хотел бы, прежде чем закончить рассмотрение этого единственного в своем роде документа, присовокупить несколько замечаний общего характера.

Многим, вероятно, кажется достойным сожаления, что Гаусс потратил столько сил на решение проблем, уже разрешенных другими, и что ему приходилось без всякой помощи и руководства еще раз преодолевать все трудности, победа над которыми стала уже всеобщим достоянием науки. Я хотел бы в противовес этому взгляду подчеркнуть благодетельную роль самостоятельного творчества. Именно этот пример подтверждает ту глубокую педагогическую истину, что для успешного развития личности приобретение знаний имеет гораздо меньшее значение, чем развитие способностей. Упорство, с которым Гаусс следовал по избранному им пути, бурный, юношеский натиск, с которым он каждый раз, не взирая ни на что, преодолевал самые крутые подъемы, ведущие к цели, — все эти трудные испытания закаляли его силы и делали его способным, после победы над препятствиями, уже устраненными другими, неудержимо итти вперед, опережая их.

К этой хвале творческой самодеятельности я должен присоединить второе: похвалу юности. Я этим хочу сказать только то, что развитие математического гения подчиняется тем же законам, что и развитие всякой другой творческой способности. Для гениально одаренной личности годы юности, период, когда только что завершается процесс физического роста, являются эпохой великих, в изобилии сменяющих друг друга откровений; именно в эти годы гениально одаренный дух создает те новые, ему одному принадлежащие ценности, которые им будут впоследствии преподнесены миру, несмотря на то, что богатство всех рождающихся в нем в изобилии идей еще далеко превосходит имею-

щиеся в его распоряжении средства выражения. Следующий за тем, обычно менее благодатный период больших жизненных трудностей представляет время оформления и реализации, для которых зрелость суждения, опыт, чувство меры и владение собственными силами, — достоинства, даваемые возрастом, — являются необходимыми условиями. Так, часто мир узнает о достижении, зародившемся лет 20 тому назад, и считает человека стоящим на вершине его творческой деятельности, в то время как он занят только оформлением дела своей жизни и уже не в состоянии обогатить его ни одной новой чертой.

После этой, преимущественно внешней, характеристики работ Гаусса в области чистой математики я перехожу теперь к рассмотрению некоторых пунктов несколько глубже по существу, чтобы обеспечить себе необходимую в дальнейшем свободу изложения. Я выбираю в качестве примера творческих достижений Гаусса некоторые вопросы из *теории эллиптических функций* и *теории чисел*; затем для характеристики его строгого критического подхода я приведу несколько примеров из его работ по *основаниям геометрии*.

Легче всего ввести читателя в первую из упомянутых областей, если напомнить о совершенно элементарной фигуре, а именно о разбиении плоскости посредством двух систем равноудаленных параллельных прямых. Из кристаллографии всякий знаком с тем пространственным образом, который соответствует этой сети конгруэнтных параллелограмов, с так называемой *решеткой*. Эта важная, не только внешняя связь подчеркивается также и Гауссом в его отзыве о книге Зебера (Seeber) о тернарных квадратичных формах (1831)[1], в котором Гаусс впервые наглядно интерпретирует факты теории чисел при помощи геометрических соотношений.

Мы здесь ограничимся бинарной областью и рассмотрим определенно положительные формы, т. е. такие формы

$$f = am_1^2 + 2bm_1m_2 + cm_2^2,$$

которые для всех действительных пар значений m_1, m_2 имеют положительное значение.

Для этого является необходимым и достаточным, чтобы a, b, c удовлетворяли следующим условиям:

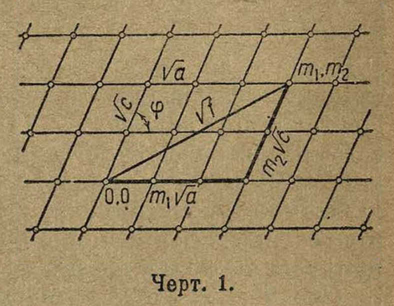
$$a > 0,\ b > 0,\ b^2 - ac = -D < 0.$$

Мы считаем пока a, b, c любыми вещественными числами, тогда как числа m_1 и m_2, как того требует все последующее рассуждение, предполагаются целыми.

Свойства такой формы мы изучаем геометрически на упомянутой фигуре (черт. 1). Приняв за координатные оси какую-нибудь пару пересекающихся прямых этой решетки, мы видим, что

[1]) Werke, т. 2, стр. 188.

каждой вершине решетки соответствует определенная пара значений m_1, m_2. Мы даем сторонам основного параллелограма значения $\sqrt{a}$ (в направлении m_1) и $\sqrt{c}$ (в направлении m_2), а образуемый ими угол φ определяем из соотношения $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{ac}}$. Тогда длина диагонали основного параллелограма определяется выражением $\sqrt{a+2b+c}$, и вообще форма $f = am_1^2 + 2bm_1m_2 + cm_2^2$ выражает квадрат расстояния вершины решетки (m_1, m_2) от начала координат. При помощи этой решетки оказывается возможным решать задачи теории чисел экспериментально-геометрическим путем. Так, например, чтобы решить вопрос о том, можно ли определенное целое число A представить посредством заданной формы f и какая пара чисел m_1, m_2 нужна для этого, мы описываем из начала координат круг радиуса $\sqrt{A}$ и смотрим, проходит ли этот круг через какую-нибудь вершину решетки. Точно так же величина D, важная с точки зрения теории чисел, получает простое геометрическое значение: $\sqrt{D} = \sqrt{ac - b^2}$ выражает площадь элементарного параллелограма.



Черт. 1.

Переходим теперь к основным понятиям теории чисел, встречающимся уже у Лагранжа. Сюда прежде всего относится понятие об *эквивалентности*. Эквивалентными называются такие решетки параллелограмов, у которых вершины — одни и те же, но которые отличаются между собою способом соединения этих вершин прямыми. Такие решетки переходят друг в друга путем преобразования

$$m_1' = \alpha m_1 + \beta m_2, \quad m_2' = \gamma m_1 + \delta m_2,$$

где α, β, γ, δ — любые целые числа, удовлетворяющие условию

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

При этом преобразовании площадь $\sqrt{D}$ не меняется, но это условие само по себе еще недостаточно, чтобы обеспечить эквивалентность. Интуитивно во всяком случае ясно, что имеется бесконечное множество эквивалентных решеток, среди которых существует по крайней мере одна такая, основной параллелограм которой наименее отличается от прямоугольника. Такую решетку мы называем *приведенной*; мы строим ее, принимая за стороны параллелограма отрезки, выходящие из начала координат: один, идущий к ближайшей вершине решетки, мы принимаем за $\sqrt{a}$ и другой, направленный к ближайшей из оставшихся вершин, но идущий в другом направлении, мы полагаем равным $\sqrt{c}$.

Ввиду того, что в этом случае каждая из диагоналей $\sqrt{a+2b+c}$ и $\sqrt{a-2b+c}$ больше чем $\sqrt{c}$, мы получаем отсюда следующий точный критерий для приведенной решетки или приведенной формы: $|2b| \leqslant a \leqslant c$. Так как, оставляя в стороне вопрос о симметрии, всякое семейство эквивалентных решеток всегда содержит только одну приведенную решетку, то мы можем также сказать: формы эквивалентны, если они преобразуются в одну и ту же приведенную форму. Подобное семейство эквивалентных форм называется *классом форм*.

Перейдем теперь к тому специальному случаю, когда a, b, c суть *целые* числа. В этом случае говорят о *целочисленной* или лучше об *особенной* решетке. Мы уже видели, что площадь $\sqrt{D}$ является инвариантом преобразования. Возникает вопрос: сколько классов форм с целочисленными значениями a, b, c существует при заданном D? Или, что то же самое: сколькими способами можно удовлетворить условиям $|2b| \leqslant a \leqslant c$, если $D = ac - b^2$ имеет заданное постоянное значение. Так как a, b, c должны быть целыми числами, то получается конечное число h приведенных форм; число h называют соответствующим детерминанту D *числом классов*.

Среди всех форм, принадлежащих детерминанту D, всегда имеется одна, так называемая *главная форма*. Для нее $b=0$, $a=1$, а потому $c=D$; она имеет, следовательно, вид $m_1^2 + Dm_2^2$, и ее элементарным параллелограмом служит прямоугольник. Эта форма является приведенной формой класса, носящего название *главного класса* форм.

Оставляя область элементарной теории чисел, я перехожу теперь к высшей теории чисел, отличающейся от первой одной существенно новой идеей. Употребляя принятую у физиков терминологию, я сказал бы: до сих пор распределение чисел на плоскости рассматривалось с точки зрения скалярной, тогда как теперь мы хотим, учитывая направление, стать на векторную точку зрения.

Мы рассматриваем плоскость как носительницу комплексных чисел $x+iy$, при помощи которых мы изображаем вершины решетки в прямоугольной системе координат. Если повернуть сторону параллелограма $\sqrt{a}$ так, чтобы она совпала с направлением оси x, и обозначить стороны через ω_2 и ω_1, то $\omega_2 = \sqrt{a}$ будет вещественным, а $\omega_1 = \dfrac{b+\sqrt{-D}}{\sqrt{a}}$ комплексным числом. При этом

$$\frac{b+\sqrt{-D}}{\sqrt{ac}} = e^{i\varphi},$$

так что $\omega_1 = \sqrt{c}\cdot e^{i\varphi}$ и $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ имеют положительную мнимую часть. Каждая вершина решетки характеризуется числом $x+iy = m_1\omega_2 + m_2\omega_1$ или же $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, как мы будем писать в

дальнейшем, изменив соответственно обозначения. Эти числа мы назовем *числами решетки*.

Если сторона ω_2 не лежит на оси x, то нужно еще присоединить вращающий множитель $e^{i\chi}$, так что общий вид чисел решетки будет

$$\left(\sqrt{a}\,m_2 + \frac{b+\sqrt{-D}}{\sqrt{a}}\,m_1\right)e^{i\chi}.$$

Введением этих чисел решетки мы достигли того, что стало возможным производить над ними все обычные арифметические действия, включая умножение, тогда как раньше, имея дело с координатами вершин решетки, мы могли только складывать их. Эта новая точка зрения приводит к поразительному результату фундаментальной важности: если перемножить числа, принадлежащие двум целочисленным решеткам G' и G'' с одним и тем же детерминантом D, то произведения будут также принадлежать определенной целочисленной решетке G''' с тем же самым детерминантом D. Мы это записываем символически так:

$$G' \cdot G'' = G'''.$$

Для случая главной формы я хотел бы проделать это маленькое вычисление. Имеем:

$$(m_2 + m_1\sqrt{-D})\cdot(m_2' + m_1'\sqrt{-D}) =$$
$$= (m_2 m_2' - D m_1 m_1') + (m_1 m_2' + m_1' m_2)\sqrt{-D}.$$

В этом случае произведение принадлежит даже той же самой решетке, которой принадлежат оба множителя, что мы выражаем символически так:

$$G \cdot G = G \text{ (для главной решетки).}$$

Таким образом, решетки с одним и тем же детерминантом образуют одно органически связанное целое; они принадлежат, как мы теперь выражаемся, к одной и той же *группе*, и притом *коммутативной* или *абелевой группе*, как это непосредственно следует из коммутативности умножения комплексных чисел. При этом главная решетка играет роль единицы, так как $G \cdot G = G$.

К этой операции умножения решеток в сущности сводится проблема *композиции* (составления) *форм*, о которой идет речь в знаменитом по своей трудности пятом разделе „Disquisitiones arithmeticae". Как и все его предшественники, занимавшиеся этим вопросом, Гаусс не говорит о числах решетки, но оперирует над самими формами. Это означает только то, что он вместо комплексных чисел решетки пользуется их нормами, т. е. произведениями их на сопряженные с ними величины, ибо

$$am_2^2 + 2bm_1m_2 + cm_1^2 =$$
$$= \left(\sqrt{a}\cdot m_2 + \frac{b+\sqrt{-D}}{\sqrt{a}}\,m_1\right)\cdot\left(\sqrt{a}\cdot m_2 + \frac{b-\sqrt{-D}}{\sqrt{a}}\,m_1\right).$$

Пользуясь этим способом выражения, Гаусс исследует, избегая пользования комплексными величинами, общие групповые свойства форм с заданным детерминантом и притом рассматривает не только определенные положительные формы, но и формы самого общего вида; отсюда и трудность этой главы для понимания. Подобное изложение не дает, конечно, представления о первоначальной форме теории и в соответствии с характерной для Гаусса тенденцией маскирует ее основную идею. Лагранж, приводящий в своих „Additions à l'Algèbre d'Euler" („Добавления к алгебре Эйлера", том VII Собрания сочинений) первые примеры композиции форм, пользуется линейными множителями форм; интерес к этим множителям и их комбинациям несомненно впервые привел к идее о композиции форм.

Ввиду этого возникает вопрос, не был ли Гауссу известен метод исследования проблемы при помощи комплексных чисел и не воздержался ли он от опубликования лишь из свойственной ему осторожности? Историк не может дать на этот счет определенного ответа, так как в наследии Гаусса нельзя найти ни малейшего намека по этому поводу. Тем не менее я убежден, что Гауссу уже был известен этот ход мыслей, хотя такое историческое толкование впервые дается здесь мною [1].

За это говорит то обстоятельство, что он имел в своем распоряжении все нужные предпосылки, особенно же определенно это подтверждается опубликованным в том же 1831 г. вышеупомянутым отзывом о книге Зебера с содержащимися в ней геометрическими интерпретациями, а также, с другой стороны, его работой о биквадратичных вычетах, в которой он рассматривает целые числа $m_2+m_1 i$ [2]. Неужели же Гаусс не пришел к мысли ввести комплексные числа также и в случае параллелограмов общего вида и не заметил связи с теорией составления форм? Я считаю это совершенно немыслимым и склоняюсь даже к тому, что он уже в 1799 г. владел всеми этими теориями во всей полноте.

Перехожу теперь к рассмотрению значения нашей основной геометрической фигуры в теории функций. При изложении этой области, особенно богатой различными пережитками предшествовавшего ее развития, я хочу опираться исключительно на факты, которые в настоящее время дают ясное и полное представление обо всем этом предмете, опустив все исторически, быть может, важные, но по существу случайные методы рассмотрения [3].

Отправным пунктом для нас является точка зрения теории групп. Мы имеем три независимые переменные u, ω_1, ω_2, при-

---

[1]) Дирихле и Дедекинд пользуются методом решеток параллелограмов только косвенным образом; они сначала перемножают между собою числа вида $am_2+(b+\sqrt{-D})m_1$ и $a'm_2'+(b'+\sqrt{-D})m_1'$, затем переходят к произведению норм и потом опять выносят из последнего множитель aa'.

[2]) Ср. также Stäckel, Gauss als Geometer, Gauss'Werke, т. 10, 2, Abh. IV, особенно стр. 63 и сл.

[3]) См. также ниже главы шестую и восьмую.

чем $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ имеет положительную мнимую часть. Рассмотрим тернарную группу преобразований, т. е. группу преобразований трех переменных, состоящую из переноса

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

и унимодулярной подстановки

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,$$

$$\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

где

$$m_1,\ m_2,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

целые числа и

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Требуется найти инвариантные или *автоморфные функции* этой тернарной группы преобразований. Я напомню здесь же, что обыкновенно рассматриваются только автоморфные функции первого преобразования, т. е. исключительно *двояко-периодические функции* $f(u\,|\,\omega_1,\ \omega_2)$, в которых ω_1 и ω_2 считаются постоянными. Однако не менее важным и интересным является изучение поведения этих функций при подстановках, изменяющих ω. Только изучение инвариантов всей этой тернарной группы приводит к теории *общих эллиптических функций*.

Мы теперь налагаем, согласно традиции, на эти общие функции $f(u\,|\,\omega_1,\ \omega_2)$ некоторые ограничения, обычные в теории функций; наша критическая эпоха, проявляющая особенный интерес к аномалиям разного рода, требует явной формулировки этих условий, которые предыдущие поколения принимали как нечто само собой очевидное — „как будто мы жили в раю“, по выражению П. Дюбуа-Раймона (P. Dubois-Reymond).

Итак, пусть функция $f(u)$ определена однозначно во всех конечных точках плоскости, т. е. пусть $f(u)$ не имеет ни естественной границы области ее существования, ни существенно особых точек. Для $f(\omega_1,\ \omega_2)$ эти, как я выразился бы, требования „хорошего поведения“ формулировать, не вдаваясь в детали, труднее; я ограничусь тем, что скажу, что функция $f(\omega_1,\ \omega_2)$ должна вести себя по возможности более разумно. Дальнейшее требование, которое я ставлю, это требование *однородности* f относительно всех трех переменных, причем f может быть любого измерения по отношению к u, ω_1, ω_2. Это допущение делает возможным значительно более изящное изложение всех проблем. Замечу, что оно выставляется далеко не всеми авторами, занимавшимися этими вопросами. Обыкновенно предпочитают ограничиваться функциями нулевого измерения, т. е. функциями отношений $u : \omega_1 : \omega_2$, примерно вида $f\left(\frac{u}{\omega_2},\ \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$. Так, например, поступает Якоби.

Наряду с уже упомянутыми двояко-периодическими функциями $f(u \mid \omega_1, \omega_2)$ существуют также функции, зависящие только от ω_1, ω_2. Я называю их *модулярными формами*, если они представляют собою однородные функции от ω_1 и ω_2 измерения выше нулевого, и *модулярными функциями*, если они нулевого измерения и, стало быть, зависят только от отношения $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Наконец я упомяну еще об одном интересном частном случае двояко-периодических функций, а именно об автоморфных функциях, принадлежащих группе преобразований

$$u' = u + m_2 + m_1 i.$$

Это так называемые *лемнискатические функции*. Своим названием они обязаны тому, что впервые появились при вычислении длины дуги лемнискаты, подобно тому, как термин „эллиптические функции" (по существу слишком узкий) происходит от применения подобных функций при измерении дуги эллипса. При этом, однако, нельзя провести полной аналогии между дугой лемнискаты и дугой эллипса, ибо первая задается интегралом „первого рода"

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}},$$

вторая же — интегралом „второго рода". И это различие Гауссу также пришлось сперва выяснить себе самому.

Я хочу теперь перечислить простейшие общие эллиптические функции, удовлетворяющие вышеуказанным условиям.

Согласно обозначениям Вейерштрасса (Weierstrass), таковыми являются

$$\wp(u \mid \omega_1, \omega_2), \quad \wp'(u \mid \omega_1, \omega_2) = \frac{\partial \wp}{\partial u}, \quad g_2(\omega_1, \omega_2), \quad g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Эти функции определяются следующими всюду абсолютно сходящимися рядами, принадлежащими Эйзенштейну, которые я здесь привожу, чтобы дать вместе с тем простейшее доказательство существования этих функций:

Измерение — 2: $\wp(u \mid \omega_1, \omega_2) =$

$$= \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left\{ \frac{1}{(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} \right\},$$

Измерение — 3: $\wp'(u \mid \omega_1, \omega_2) = -2 \sum \frac{1}{(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^3}$,

Измерение — 4: $g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4}$,

Измерение — 6: $g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}$.

По поводу первого ряда заметим, что выражения, заключенные в фигурные скобки, не могут быть отделены друг от друга без нарушения абсолютной сходимости ряда. Штрих при знаке суммирования означает, что суммирование не распространяется на пару значений $m_1 = m_2 = 0$.

Обе функции $\wp(u)$ и $\wp'(u)$ называются *основными функциями* (Grundfunktionen). Они имеют в вершинах решетки полюса второго и соответственно третьего порядка.

Величины g_2, g_3 называются просто *инвариантами*. Они являются простейшими модулярными формами. Так как *дискриминант* Δ выражается через них формулой $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, то функция $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ дает нам простейший пример модулярной функции.

Между этими четырьмя функциями существует следующая алгебраическая зависимость:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

причем имеет место замечательная фундаментальная теорема, что всякая другая автоморфная функция от трех переменных, удовлетворяющая вышеприведенным требованиям „разумного поведения“, может быть рационально выражена через эти четыре функции. Этой теоремой дается полное описание всей рассматриваемой области функций.

Огромное значение для уяснения природы этих функций имеет другой способ их представления. Именно, всякую автоморфную функцию рассматриваемого типа можно представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой являются *целыми* функциями, т. е. такими, которые в конечной части плоскости нигде не обращаются в бесконечность. Получаемые таким путем целые функции сами уже не являются двояко периодическими. Самая важная среди них — это введенная Вейерштрассом *σ-функция*, выражающаяся следующим бесконечным произведением:

$$\sigma(u) = u \cdot \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}\right) \cdot e^{\frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}\right)^2}$$

(первого измерения относительно u, ω_1, ω_2), причем показательные множители обеспечивают сходимость бесконечного произведения. Эта функция обращается в нуль во всех вершинах решетки. Через нее могут быть выражены все $\wp$-функции. Так, например,

$$\wp = -\frac{d^2[\ln\sigma(u)]}{du^2} = \frac{\sigma\sigma'' - \sigma'^2}{\sigma^2}.$$

Как уже было сказано, функция σ не является двояко-периоди-

ческой функцией. Вместо двоякой периодичности σ обладает следующими свойствами:

$$\sigma(u+\omega_1) = -\sigma(u)\cdot e^{\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)},$$

$$\sigma(u+\omega_2) = -\sigma(u)\cdot e^{\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)},$$

где η_1, η_2 — некоторые константы, на значении которых я здесь не буду останавливаться, а σ представляет собой модулярную форму, т. е.

$$\sigma(u\,|\,\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2) = \sigma(u\,|\,\omega_1,\ \omega_2).$$

Эта в высшей степени важная функция была открыта, как уже сказано, Вейерштрассом; все же Гаусс и Абель очень близко к ней подходили; именно, они оперировали функцией

$$C\cdot\sigma\cdot e^{-\varkappa\cdot u^2}$$

(ради краткости я не буду определять констант C и $\varkappa$), к которой приводят вычисления, исходящие от обычно употребительной нормальной формы эллиптических интегралов; для представления двояко-периодических функций в виде отношения двух целых функций эта функция дает то же самое, что и $\sigma(u)$. Мы теперь ее назвали бы „функцией второй ступени“, так как она инвариантна не относительно всей модулярной группы в целом, но только относительно некоторой ее подгруппы[1]). Вейерштрасс назвал эту функцию в честь Абеля функцией *Al*. Эта функция получила особенное распространение благодаря знаменитому в свое время труду „Théorie des fonctions doublement périodiques“ („Теория двояко-периодических функций“), принадлежащему Брио и Буке (Briot et Bouquet), двум ученикам Лиувилля (Liouville), являющимся представителями школы Коши. Этот труд появился в 1859 г. и в течение долгого времени являлся основным учебником по теории эллиптических функций. Комично, что в этом труде обозначение *Al* связывается с немецким словом „Alles“, — поучительный пример того, как быстро создаются этимологические легенды.

Перечислив основные эллиптические функции и указав важнейший способ их изображения, я не хочу обойти молчанием одной связанной с этим предметом области, которая приобрела самостоятельное значение благодаря содержащимся в ней в изобилии вычислительным проблемам и вследствие тех больших удобств, которые она представляет для приложений. Я имею в виду глубоко разработанную область *тэта-функций*. Я скажу об этих функциях лишь несколько слов, так как их рассмотрение не добавит ничего существенно нового в смысле выяснения общей логической структуры излагаемой теории, дать краткий набросок которой является здесь моей единственной целью.

---

[1]) Ср. главу шестую, стр. 331—332.

Именно, удается разложить σ-функции на множители таким образом, чтобы один множитель был автоморфен относительно одного из периодов. Таким путем вводится функция, названная Якоби ϑ_1; способ получения этой функции дает для нее очень быстро сходящееся разложение в ряд, одинаково удобное как для аналитических исследований, так и для численных расчетов. Это разложение получается на основании следующей формулы:

$$\sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_2) = \frac{e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2}} \cdot \sqrt[8]{\Delta}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, q\right),$$

где

$$q = e^{i\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}} = e^{i\pi\omega}, \quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Функция ϑ_1 нулевого измерения относительно u и ω. Путем ряда преобразований отсюда получается разложение

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, q\right) = 2\left(q^{\frac{1}{4}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2} - q^{\frac{9}{4}} \sin\frac{3\pi u}{\omega_2} + q^{\frac{25}{4}} \sin\frac{5\pi u}{\omega_2} - \ldots\right).$$

Аналогичными рядами определяются остальные тэта-функции. Существует целое учение о так называемых *тэта-соотношениях*, т. е. о соотношениях, связывающих между собою тэта-функции от разных надлежащим образом выбранных аргументов; в течение долгого времени этого рода вопросы являлись для всех математиков излюбленной областью. В настоящее время этот круг вопросов отошел на задний план — пример того, что и чистая наука подвержена своим модам. При сложении периодов тэта-функции ведут себя очень просто; но при замене периодов ω_1, ω_2 эквивалентными периодами путем подстановок вид этих функций изменяется довольно сложным образом. Изучение этих обстоятельств привело к созданию учения о преобразованиях тэта-функций.

Читатель, вероятно, уже догадывается, что все вышеизложенное мною приведено лишь потому, что Гаусс уже полностью владел всем этим кругом идей. Он построил тэта-функции для лемнискатического случая уже в 1798 г., тэта-функции общего вида были им открыты в 1800 г., а в 1808 г. он занимался тэта-соотношениями.

Я продолжаю теперь изложение основных идей теории рассматриваемых нами автоморфных функций. По составлении основных функций и выяснении их отношения ко всем другим функциям, обладающим требуемыми свойствами, систематическая теория групп (ср. мою Эрлангенскую программу, 1872 [1])) дает нам дальнейшую плодотворную идею, ставя вопрос о разыска-

[1]) Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, т. 1, стр. 460 и сл.

нии автоморфных функций *подгрупп* полной тернарной группы подстановок. Эти функции мы называем „функциями *высшей ступени*“. Мы спрашиваем: существуют ли такие функции и как они зависят от основных? Когда эта зависимость является алгебраической и какие алгебраические зависимости могут быть „униформизированы“ при помощи найденных таким путем функций, т. е. какие алгебраические уравнения тождественно удовлетворяются этими однозначными функциями?

Из всей массы проблем, возникающих в связи с этими вопросами, я хочу здесь остановиться лишь на тех, к которым приводит проведение нашей идеи только в отношении переменной u. Указанный путь приводит к учению о „*преобразовании*“ (в особом смысле, который сейчас будет разъяснен) эллиптических функций и в частности об их *умножении* и *делении*.

Функции, автоморфные только относительно части подстановок всей тернарной группы, можно получить, вставляя в заданную решетку параллелограмов другую, вершины которой составляют часть всей совокупности вершин основной решетки. Элементарный параллелограм новой решетки имеет уже площадь, равную не $\sqrt{-D}$, но некоторому целому кратному этой величины: $n \cdot \sqrt{-D}$. Его стороны задаются выражениями

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= \overline{\alpha}\omega_1 + \overline{\beta}\omega_2 \\ \overline{\omega}_2 &= \overline{\gamma}\omega_1 + \overline{\delta}\omega_2 \end{aligned} \qquad (\overline{\alpha}\,\overline{\delta} - \overline{\beta}\,\overline{\gamma} = n)$$

где $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$ — целые числа.

Если для этой новой решетки, полученной „*преобразованием n-го порядка*“, мы образуем основные эллиптические функции

$$\begin{aligned} \wp(u \mid \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) &= \overline{\wp}, \\ \wp'(u \mid \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) &= \overline{\wp}', \end{aligned}$$

то $\overline{\wp}$, $\overline{\wp}'$ будут относительно первоначально заданной группы

$$\begin{aligned} u' &= u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \\ \overline{\omega}_1 &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \overline{\omega}_2 &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

функциями искомого рода.

Если, например, новый параллелограм получается путем соединения некоторого числа старых и, стало быть, подобно расположен относительно первоначального параллелограма, то $\overline{\wp}$ и $\overline{\wp}'$ получают свои прежние значения не при каждом переносе $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, а только в тех случаях, когда m_1, m_2 являются кратными определенных целых чисел.

Установим теперь зависимость между функциями $\wp$, $\wp'$, с одной стороны, и $\overline{\wp}$, $\overline{\wp}'$, с другой. Эта зависимость получается в высшей степени просто на основании теоремы о том, что все эллиптические функции могут быть рационально выражены

через соответственные основные функции. Так как новые периоды $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ являются также периодами старых функций $\wp$, $\wp'$, то отсюда следует, что $\wp$, $\wp'$ рационально выражаются через $\bar{\wp}$, $\bar{\wp}'$. Обратно, $\bar{\wp}$, $\bar{\wp}'$ алгебраически выражаются через $\wp$, $\wp'$. Частным случаем этого преобразования n-го порядка является *умножение*, определяемое формулами

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \varkappa \cdot \omega_1, \\ \bar{\omega}_2 &= \varkappa \cdot \omega_2, \end{aligned} \qquad n = \varkappa^2, \qquad \varkappa \text{ — целое число}$$

Новый параллелограм в этом случае подобен и подобно расположен относительно старого параллелограма. Путем подстановки в эйзенштейновские ряды получаем

$$\bar{\wp} = \wp(u \mid \varkappa\omega_1,\ \varkappa\omega_2) = \frac{1}{\varkappa^2}\,\wp\left(\frac{u}{\varkappa}\,\middle|\,\omega_1,\ \omega_2\right),$$

$$\bar{\wp}' = \wp'(u \mid \varkappa\omega_1,\ \varkappa\omega_2) = \frac{1}{\varkappa^3}\,\wp'\left(\frac{u}{\varkappa}\,\middle|\,\omega_1,\ \omega_2\right),$$

или, полагая $\frac{u}{\varkappa} = v$,

$$\bar{\wp} = \wp\,(\varkappa v \mid \varkappa\omega_1,\ \varkappa\omega_2) = \frac{1}{\varkappa^2}\,\wp\,(v \mid \omega_1,\ \omega_2),$$

$$\bar{\wp}' = \wp'(\varkappa v \mid \varkappa\omega_1,\ \varkappa\omega_2) = \frac{1}{\varkappa^3}\,\wp'\,(v \mid \omega_1,\ \omega_2),$$

и наконец из того, что $\wp$, $\wp'\ (\varkappa v \mid \omega_1,\ \omega_2)$ выражаются рационально через $\bar{\wp}$, $\bar{\wp}'$, следует, что $\wp$, $\wp'\ (\varkappa v \mid \omega_1,\ \omega_2)$ рационально выражаются через $\wp$, $\wp'\,(v \mid \omega_1,\ \omega_2)$.

При этом последнем преобразовании новый множитель получают уже не периоды, а сами переменные u или v. Это действие называют *умножением эллиптических функций*. Обратное действие называется *делением*. Алгебраический характер последнего требует, конечно, более подробного исследования.

Чтобы ни в чем не остаться в долгу перед Гауссом, мы должны сделать еще шаг дальше и перейти к так называемому *комплексному умножению* эллиптических функций. Это действие возможно только для решеток особого рода, а именно для таких, в которые могут быть вставлены подобные и в то же время не подобно расположенные параллелограмы. Для таких решеток можно образовать функции $\wp(\varkappa v)$, выражающиеся рационально через $\wp(v)$, где $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$ означает комплексное число.

Мы исследуем это подробнее для простого случая лемнискаты. Для нее $\omega_1 = i\omega_2$. Выполняя комплексное умножение, получаем

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1' &= (\varkappa_1 + i\varkappa_2)\,\omega_1 = \varkappa_1\omega_1 - \varkappa_2\omega_2 \\ \bar{\omega}_2' &= (\varkappa_1 + i\varkappa_2)\,\omega_2 = \varkappa_2\omega_1 + \varkappa_1\omega_2 \end{aligned} \qquad (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 = n),$$

т. е. эта операция является „преобразованием" порядка

$n = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2$. Следовательно, для этого случая имеет место теорема, что

$$\wp(\varkappa v \mid \omega_1, \omega_2) \text{ и } \wp'(\varkappa v \mid \omega_1, \omega_2)$$

рационально выражаются через

$$\wp(v \mid \omega_1, \omega_2) \text{ и } \wp'(v \mid \omega_1, \omega_2),$$

даже и тогда, когда $\varkappa$ принимает комплексное значение. Аналогичный результат получается для любой особенной решетки; но в то время, как для главной решетки рассматриваемая операция дает решетку, вставленную в первоначальную, для особенных решеток общего вида приходится ввести в рассмотрение всю совокупность решеток, принадлежащих данному детерминанту D. Непосредственно очевидно, что эта проблема теснейшим образом связана с композицией форм детерминанта D.

Весь намеченный здесь круг вопросов, считавшийся всегда одной из самых интересных и тонких областей теории эллиптических функций, был уже разработан Гауссом в самых различных направлениях. В первых же своих работах, касающихся лемнискаты, он применяет как обыкновенное, так и комплексное умножение. Он разлагает умножение на 5 на два последовательных комплексных умножения: $5 = (2 + i)(2 - i)$ и этим способом решает в квадратных радикалах уравнение 25-й степени, к которому приводит проблема лемнискаты. Об этом огромном достижении имеется совершенно незначительный намек в „Disquisitiones Arithmeticae" в введении к делению окружности (Werke, т. 1, стр. 412—413). Это место крайне замечательно не только само по себе, но и по своему влиянию на развитие науки. Именно оно побудило в 1825 г. Абеля взяться за указанную проблему и привело его к исчерпывающему решению этого вопроса открытием двойной периодичности и комплексного умножения для эллиптических функций общего вида.

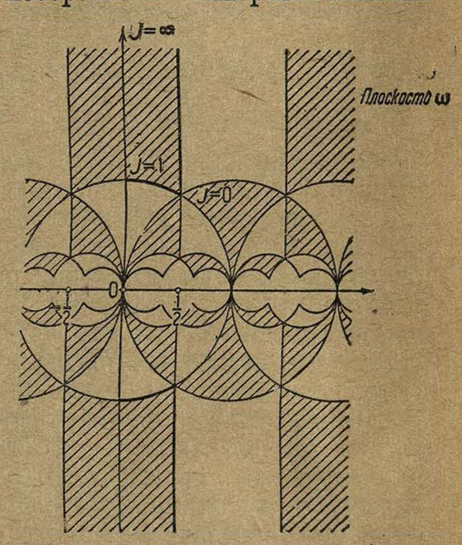
Мы занимались до сих пор главным образом изучением наших автоморфных функций, рассматривая их как функции от переменной u и положив в основу образ решетки параллелограмов в плоскости значений u.

Теперь мы станем на противоположную точку зрения и, оставив в стороне u, изучим подробнее характер наших функций как функций от ω_1, ω_2. Эта проблема приводит к теории *модулярных форм* и *модулярных функций*. Мы ограничимся здесь этими последними. Так как эти функции, как уже сказано выше, являются однородными функциями нулевого измерения относительно ω_1, ω_2, то мы полагаем $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ и рассматриваем подстановки типа

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Возникает вопрос, можно ли эту группу подстановок наглядно интерпретировать путем разбиения комплексной пло-

скости значений ω на некоторую систему „областей прерывности“ [1]) этой группы подстановок, применяя тот же процесс, который дал нам геометрическое истолкование группы $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ в плоскости значений u. Это на самом деле возможно. Получается так называемая *модулярная фигура*, которая также была впервые введена Гауссом, опередившим в этом отношении Абеля, Якоби и непосредственно следовавших за ними математиков. Только начиная с Римана, этот геометрический образ получает всеобщее распространение в качестве наиболее удобного вспомогательного орудия исследования (черт. 2). На чертеже исходная область изображена заштрихованными участками; границы ее обведены жирной линией. Если ω комплексно и если мнимая часть ω положительна, то всегда можно при помощи некоторой подстановки данной группы преобразовать ω в точку, лежащую в верхней части основной области; если же мнимая часть ω отрицательна, то ω может быть приведено в нижнюю часть основной области. Это приведение ω в основную область рассматриваемой группы подстановок представляет собою не что иное, как геометрическую интерпретацию теории приведения формы $am_2^2 + 2\,bm_1m_2 + cm_1^2$, принадлежащей данной системе вершин решетки, имеющих аффиксы $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$.



Черт. 2.

Всякая точка ω, лежащая внутри фундаментальной области, изображает приведенную решетку, а все бесконечное множество эквивалентных точек, лежащих в других областях, изображает весь бесконечный класс эквивалентных решеток, представителем которого является данная приведенная область. Все эти области получаются из фундаментальной при помощи последовательного отражения относительно прямых и основного круга нашего чертежа по способу обратных радиусов. Этим процессом вся плоскость переменной ω без пробелов покрывается треугольниками, ограниченными дугами кругов, которые все более и более накопляются у действительной оси. Как уже сказано, точка ω, лежащая в верхней полуплоскости, не может перейти в точку ω, лежащую в нижней полуплоскости, ни при какой

[1]) „Областью прерывности“ группы подстановок называется такая область g, никакие две точки которой не переходят друг в друга ни при какой подстановке данной группы. (*Прим. перев.*)

подстановке модулярной группы. Действительная ось поэтому образует для модулярных функций так называемую „естественную границу“. Все ее рациональные точки являются, так сказать, устьями, в которых сливается бесконечное множество отдельных областей. Действительная ось несет, таким образом, бесконечное всюду плотное множество точек, принадлежащих бесчисленному множеству областей (по два бесконечных пучка у каждой рациональной точки), однако этими точками она не исчерпывается. Вследствие такого совершенно исключительного поведения точек действительной оси („это — царство демонов“, как говорит Гордан) случай вещественного ω требует особого, более глубокого рассмотрения.

Рассмотрим теперь принадлежащие этому разбиению плоскости *модулярные функции.* Простейшей среди них является *„абсолютный инвариант“* $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$. Эта функция принимает в фундаментальной области каждое значение один и только один раз и при этом нормирована так, что принимает в указанных на черт. 2 точках значения 0, 1 и ∞. Функция $J(\omega)$ связана поэтому чрезвычайно простым образом с теорией квадратичных форм. Если раньше мы указали, что класс эквивалентных форм может быть изображен одной точкой фундаментальной области, представляющей соответствующий класс эквивалентных точек, то теперь мы видим, что тому же классу форм (т. е. изображающему этот класс форм семейству эквивалентных решеток) соответствует одно единственное значение функции $J(\omega)$. Обратно, каждому значению $J(\omega)$ соответствует единственный класс форм и решеток параллелограмов, если не принимать во внимание абсолютной величины параллелограмов, остающейся неопределенной. Приведенное обстоятельство показывает, какую важную роль функция $J(\omega)$ играет во всей теории как с точки зрения теории функций, так и с точки зрения теории чисел. Эта роль тем более важна, что все другие модулярные функции выражаются рационально через J. В отличие от функций J остальные модулярные функции, вообще говоря, принимают каждое свое значение не в одной, а в нескольких точках фундаментальной области.

Гаусс знал эту функцию и ее важные свойства; в третьем томе его собрания сочинений на стр. 386 помещена заметка о „сумматорной функции“ (J). Точно так же ему были известны, как уже упомянуто, модулярная фигура и принцип отражения. Применим и здесь точку зрения теории групп и спросим себя, какие *подгруппы* содержатся в рассматриваемой основной группе всех подстановок вида $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ и какая связь существует между этими подгруппами и всей группой в целом. Я не могу, к сожалению, привести здесь общий принцип разыскания подгрупп и ограничусь только примером. Назовем *главной группой*

конгруэнтности n-ой ступени все подстановки, коэфициенты которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n),$$

что я запишу кратко так:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ n).$$

Рассмотрим вкратце главную группу конгруэнтности второй ступени. По модулю 2 все подстановки распадаются на следующие шесть систем („смежных“ с рассматриваемой подгруппой):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ 2).$$

Фундаментальная область этой подгруппы охватывает шесть областей основной группы. В этой области фундаментальной функцией является так называемое „ангармоническое отношение“ $\lambda(\omega)$ или, как иногда пишут, $\varkappa^2(\omega)$, где $\varkappa(\omega)$ известно под названием „*модуля Лежандра*“.

Эту функцию $\lambda(\omega)$ мы назовем *модулярной функцией второй ступени*, так как она инвариантна только относительно подстановок, содержащихся в выделенной по модулю 2 главной подгруппе конгруэнтности второй ступени. То обстоятельство, что фундаментальная область этой функции в шесть раз шире фундаментальной области функции $J(\omega)$, означает не что иное, как то, что одному значению J соответствует шесть значений λ; таким образом, ясно, что эти две величины связаны между собою рациональной зависимостью шестой степени. Эта зависимость выражается формулой

$$J = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Наша подгруппа также была известна Гауссу. Отрывочные заметки об этом и соответствующая геометрическая фигура помещены на стр. 103, 105 восьмого тома собрания сочинений, а также в томе третьем, на стр. 386. Но только дневник дает нам более точное представление о том, что было известно Гауссу по этому вопросу. Сюда относится замечание от 3 июня 1800 г. [1]).

Я перехожу теперь к совершенно другой стороне рассматриваемого предмета и имею в виду здесь также применить введенные нами понятия. Как известно, историческое развитие теории эллиптических функций шло по пути, отличному от того, который нами был намечен в предыдущем. Сперва были найдены *эллиптические интегралы*, а затем путем обращения этих интегралов из них были получены рассмотренные нами в предыдущем эллиптические функции. Нам поэтому остается, отправляясь

[1]) Werke, т. 10, 1, стр. 550.

от уже известных эллиптических функций, ознакомиться со свойствами эллиптических интегралов, рассматривая последние как обращения первых.

Из соотношения

$$\wp'(u)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

получаем, полагая $\wp(u) = z$,

$$u = \int\limits_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Этот введенный Эйзенштейном и часто употреблявшийся Вейерштрассом вид эллиптического интеграла может быть назван *однородной нормальной формой первой ступени,* так как входящие в подинтегральное выражение коэфициенты являются модулярными формами первой ступени.

Однако в известных случаях целесообразно выразить u через интеграл высшей ступени, коэфициенты которого инвариантны только относительно некоторой подгруппы линейных подстановок. Так, например, в качестве *нормальной формы второй ступени* (в неоднородном виде) получается интеграл

$$v = \int\limits_{0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

где λ означает упомянутое выше ангармоническое отношение. Полагая здесь $z = \sin^2\varphi$, $\lambda = \varkappa^2$, мы получим *нормальную форму Лежандра,* часто употребляющуюся еще и теперь:

$$u = \int\limits_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}.$$

И здесь также Гаусс принципиальнее большинства современных ему авторов, так как он строго соблюдал однородность нормальной формы второй ступени. Приводимая им в теории вековых возмущений[1]) и теснейшим образом связанная с вышеуказанной нормальной формой второй ступени *гауссова форма* имеет вид

$$u = \int\limits_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}.$$

Теперь я могу наконец разъяснить ту связь, которая существует между изложенной теорией и столь часто упоминавшимся нами *арифметически-геометрическим средним.* Эта последняя величина получается в связи с применяемым Гауссом особым способом

[1]) Werke, т. 3, стр. 331 и сл., особенно стр. 352 и сл., а также стр. 359.

вычисления одного из периодов предыдущего эллиптического интеграла, а именно

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}.$$

Вместо других методов приближения Гаусс, руководствуясь идеей, встречающейся между прочим уже у Лагранжа, пользуется последовательным квадратичным преобразованием, т. е. он последовательно удваивает прямоугольник периодов интегрируемой функции, так что в пределе прямоугольник периодов превращается в полосу периодичности круговой функции, высота которой и дает предельное значение рассматриваемого интеграла. При каждом таком квадратичном преобразовании данный интеграл переходит в новый интеграл такого же вида:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos^2\varphi' + n'^2\sin^2\varphi'}},$$

где

$$m' = \frac{m+n}{2},$$

$$n' = \sqrt{mn},$$

так что в пределе получается

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi^{(\infty)}}{2\pi\mu\sqrt{\sin^2\varphi^{(\infty)} + \cos^2\varphi^{(\infty)}}} = \frac{1}{\mu},$$

что и устанавливает связь между арифметически-геометрическим средним и теорией эллиптических интегралов. Эта зависимость для случая лемнискаты (при $m^2 = 1$, $n^2 = 2$) была получена Гауссом, согласно дневнику, 23 декабря 1799 г. В законченной форме этот результат был опубликован им только в 1818 г. в его теории вековых возмущений.

На этом я хочу закончить мой краткий очерк теории эллиптических функций. Я старался всюду подчеркнуть, как рано и насколько глубоко Гаусс уже владел различными элементами этой теории. Поразительно наблюдать, как черпает он свои открытия в этой области из трех первоначально совершенно различных источников, сливающихся затем воедино плодотворнейшим образом. Эти источники: совершенно случайные занятия арифметически-геометрическим средним, с одной стороны, теория определенных квадратичных форм, с другой, и, наконец, исследование лемнискаты, с третьей.

Возникает естественный вопрос, какими же частями этой теории Гаусс еще не владел? Сюда относится прежде всего

общий способ нахождения периодов эллиптических интегралов, рассматриваемых как интегралы от многозначных функций комплексного переменного, путем интегрирования по контуру в комплексной области. Возможно, что именно это обстоятельство и побудило Гаусса воздержаться от опубликования своих результатов. Путь в этом направлении был впервые проложен Пюизе (Puiseux, Comptes Rendus de l'Academie de Paris, т. 32, 1851), но все связанные с этим методом проблемы получили свое полное решение лишь после введения Риманом понятия о „многолистной поверхности“. Только тогда, когда теория римановых поверхностей привела к теореме о том, что параллелограм периодов в плоскости переменного u представляет собою конформное отображение надлежащим образом разрезанной, наложенной на плоскость переменной z, двулистной поверхности функции $\wp'(u)=\sqrt{f(z)}$, теория эллиптических функций достигла своего окончательного завершения.

Мы обрисовали, таким образом, в общих чертах богатое наследие, подаренное нам гением Гаусса, и указали на те новые творческие идеи, которыми он обогатил различнейшие ветви математики и которые легли в основу дальнейшего развития науки. Чтобы завершить намеченную здесь характеристику творчества Гаусса, я должен еще остановиться на тех достижениях, которыми наука обязана Гауссу в отношении *критики основ и строгости методов.*

Прежде чем перейти к этому, я хотел бы отметить следующие три основных положения, к которым, на мой взгляд, приводит изучение исторического развития науки.

Понятие „строгости“ в нашей науке и требования, предъявляемые идеалами строгости, ведут свое происхождение от греков. Они подразумевали под этим чисто логическое построение всей математики на основе возможно более ограниченного числа предпосылок. Однако я хотел бы подчеркнуть, что даже при идеальной „строгости“ в этом смысле известный, внелогический элемент интуиции продолжает участвовать в образовании основ. Интуиция проявляет себя уже при образовании понятия числа; то обстоятельство, что греки употребляют в качестве объекта интуиции простейшие плоские фигуры и развивают на этой основе правила действий над отрезками, тогда как мы в настоящее время предпочитаем оперировать буквами, не содержит в себе логически принципиального различия; ведь и в оперирование символами также входит элемент интуиции. В этом смысле логик Е. Шредер (E. Schroeder) выставляет в одном месте в качестве аксиомы положение, что написанные нами на бумаге знаки за ночь не претерпевают изменений („Аксиома о постоянстве знаков“) [1].

---

[1]) E. Schroeder, Arithmetik und Algebra, т. 1, стр. 16 и сл., Leipzig 1873.

Исторически идеал „строгости“ не всегда имел одинаковое значение для развития нашей науки; в зависимости от условий эпохи роль его сильно менялась. В периоды неудержимого роста творческой продуктивности требование строгости часто отступало на задний план, уступая стремлению к возможно большему и быстрейшему обогащению научного достояния. В следующие же затем периоды критики — периоды просеивания и очистки достигнутых приобретений — стремление к строгости начинало опять играть доминирующую роль. Вспомним эпоху возникновения диференциального и интегрального исчислений в XVIII столетии, когда бурный полет творческой фантазии и страстная жажда открытий создали многое такое, что было не только недостаточно обосновано, но и оказалось впоследствии прямо неверным. То же имело место и при создании теории алгебраических кривых в XIX веке. В качестве противоположного примера я приведу эпоху схоластики, сочетавшую незначительную продуктивность с величайшей остротой критического и диалектического ума. Глубоко несправедливым является общераспространенный презрительный взгляд на схоластику, как на теряющееся в бесплодных мудрствованиях направление ума. Именно наша эпоха должна была бы отказаться от такого поверхностного суждения, основанием к которому послужил чуждый нам мистический и метафизический фон, присущий всем творениям эпохи схоластики. Однако, если снять со схоластических спекуляций это покрывало, из-за которого они кажутся поверхностному взору чисто теологическими мудрствованиями, то часто оказывается, что они в сущности являются вполне безупречными подходами к проблемам, составляющим в настоящее время содержание того, что мы называем „теорией множеств“. Не даром Георг Кантор (G. Cantor), творец теории множеств, учился у схоластиков. Окидывая общим взором пройденный путь развития, мы должны сказать, что в очень редкие эпохи дух критики, стремление разложить на простейшие элементы всякий логический шаг, „идеал строгости“, были столь сильны, как во времена схоластики.

Не только различные научные эпохи, но и отдельные исследователи отличаются друг от друга этой противоположностью критического и творческого направлений. Имеются смелые завоеватели, наделенные могучей интуицией, которые совершенно не заботятся о логическом упорядочении своих идей; опираясь на свой инстинкт и предчувствие, они открывают и делают общим достоянием новые богатства; наряду с ними другие старательно приводят в порядок найденное и обладают даром правильно оценивать значение каждого достижения, ставить его на подобающее ему место, опираясь во всем на ясную, надежную критику своего острого ума. Только в очень редких случаях можно наблюдать соединение этих двух противоположных талантов в одном и том же лице; и с полным правом история уделяет этим исключительным личностям особое место в науке, где они

царят над своей областью безраздельно и стоят на недосягаемой для борьбы мнений и эпох высоте. Я хочу теперь показать, что и в отношении своего критического гения Гаусс также имеет полное право быть причисленным к этим немногим избранникам истории. Предварительно, однако, я сделаю еще одно замечание общего характера.

История нашей науки показывает, что „строгость“ есть понятие относительное, которое развивается лишь постепенно в процессе общего прогресса науки. Интересно наблюдать, как в эпохи господства критического направления современники уверены каждый раз в достижении ими наивысшего предела в отношении строгости и как, вопреки этому, одно из последующих поколений в своих требованиях и достижениях в области критики основ оставляет далеко позади себя эту казавшуюся непревосходимой границу критики. Так были превзойдены Евклид, Гаусс и Вейерштрасс. Очевидно, что и в этом отношении развитие науки столь же неограниченно, как и в творческой силе созидания нового.

Этот последний пункт я хотел бы подчеркнуть прежде всего, говоря о достижениях Гаусса в области критики основ. И здесь также Гаусс не стоит совершенно особняком в истории науки: как бы несравненно ни было его значение, мы все же можем рассматривать его как звено в цепи предшествовавших ему и последовавших за ним великих математиков.

Ожившее вновь в конце XVIII столетия стремление к строгости находит свое первое выражение в *Éléments de la géométrie* („Элементы геометрии“) Лежандра (1794) и в *Théorie des fonctions* („Теория функций“) Лагранжа (1797). Оба труда не удовлетворяют нашим современным требованиям строгости, однако как первые попытки, предпринятые в давно уже не разрабатывавшемся направлении, они безусловно имеют большое значение в истории науки. Но вот в 1801 г. в своих *Disquisitiones arithmeticae* Гаусс дает неведомое до сих пор строгое и не оставляющее никаких пробелов изложение предмета, далеко опережающее современность и прочно завоевывающее за методами Гаусса славу неоспоримости и непревзойденности. И Гаусс вполне этого заслужил, поскольку речь идет о доказательствах, принадлежащих ему самому. Но он еще не чувствовал потребности расширить сферу действия своей дедукции и сузить до пределов возможности область предпосылок. В *Disquisitiones arithmeticae* предполагается ценным и не подвергается исследованию весь аппарат обычного нормального счета с числами и буквами. Аксиоматический анализ этой основы арифметики и алгебры не привлекал к себе интереса Гаусса. Однако, когда ему приходилось выходить за пределы привычного материала математических операций, Гаусс поступает совсем по-иному. Так, при введении понятия „мнимого количества“, правомерность которого еще нередко вызывала сомнения у современников, Гаусс проявляет высшую степень добросовестности. В 1799 г. в своей дис-

сертации он еще в очень осторожной, замаскированной форме касается этой проблемы, которая в 1800 г. заинтересовала очень многих математиков. Однако спустя некоторое время он, преодолев все логические сомнения, ясно высказывает свою точку зрения, особенно в своем классическом по ясности изложения резюме ко второй работе о биквадратичных вычетах от 1831 г. (Werke, т. 2, стр. 174—178). Он тщательно избегает здесь всего того, что могло бы сообщить этой новой области исчисления какой-либо душок мистицизма и фантастики, особенно в отношении обозначений; он вводит в науку термин *„комплексное число“* и всячески на нем настаивает; к сожалению, другой предложенный им термин „прямая и обратная боковая единица“ вместо „положительной и отрицательной мнимой единицы“ не получил распространения. Но своей геометрической интерпретацией он раз навсегда перевел исчисление элементов двумерного многообразия из сферы мистических фантазий в область ясных представлений.

Я хочу теперь рассмотреть несколько подробнее отдельные области, заинтересовавшие Гаусса с точки зрения их критического обоснования. Это—прежде всего *фундаментальная теорема алгебры*, многократно обрабатывавшаяся Гауссом. Существуют три доказательства ее: от 1799, 1815 и 1816 гг. (Werke, т. 3, стр. 1, 31, 57). Более позднее доказательство от 1849 г. представляет собою лишь более строгое проведение первого из них. Другой очень важной областью применения критически строгих методов рассуждения является исследование сходимости рядов. Гаусс устанавливает первые общие признаки сходимости степенных рядов в своей работе о гипергеометрическом ряде от 1812 г. (т. 3, стр. 123 и сл., 139—143). Любопытно в связи с этим отметить, что имеется одна область, которая не привлекла к себе критического внимания Гаусса, хотя как раз здесь отсутствие критической проработки основ особенно препятствовало дальнейшему росту и развитию одного из замечательнейших созданий человеческого духа; мы имеем в виду диференциальное и интегральное исчисление. Только Коши в 1821 г. внес в эту область порядок и ясность. Разумеется, Гаусс применяет соответствующие способы исчисления абсолютно безупречно, однако он совершенно не затрагивает вопроса об их логической структуре.

Рассмотрим несколько подробнее доказательства *фундаментальной теоремы алгебры*. Именно на этих доказательствах можно видеть, в чем Гаусс превзошел своих предшественников в отношении строгости рассуждения и каковы, с другой стороны, те дополнения, которые вносятся нашей современной наукой. При этом я хочу ограничиться первыми двумя доказательствами, так как для третьего потребовалось бы рассмотреть слишком сложные методы.

Основная теорема алгебры была формулирована и в известной мере доказана Даламбером в его *Recherches sur le calcul in-*

tégral (1746 г.); эта работа была опубликована им в издании, называвшемся тогда *Histoire de l'Académie de Berlin*[1] („История Берлинской академии“). Французы поэтому и в настоящее время еще называют эту теорему „теоремой Даламбера“, а сам Гаусс называл свою диссертацию „demonstratio nova“ и, стало быть, ни в коем случае не претендовал на признание за ним столь часто приписываемой ему теперь заслуги быть автором „первого строгого доказательства“ этой теоремы. Гаусс начинает свою работу подробной критикой всех предшествующих методов доказательства. Затем он приводит свой собственный, новый ход рассуждения, который в переводе на язык современной математики можно изложить примерно так. Гаусс рассматривает функцию

$$P + Qi = f(x + iy),$$

где

$$f(x + iy) = f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

и исследует форму кривых $P = 0$ и $Q = 0$ в плоскости переменной $z = x + iy$. На достаточно большом расстоянии от начала координат, т. е. для достаточно больших абсолютных значений $z = re^{i\varphi}$, эти кривые асимптотически приближаются к кривым $z^n = 0$, т. е. к кривым

$$r^n \cos n\varphi = 0, \quad r^n \sin n\varphi = 0.$$

Два последних уравнения изображают две системы лучей, выходящих из начала координат, причем лучи одной системы попеременно чередуются с лучами другой. Из взаимного расположения асимптот искомых кривых Гаусс выводит существование по крайней мере одной точки пересечения этих последних.

Оценивая изложенное доказательство с современной точки зрения, мы должны сказать следующее: в принципе оно правильно, но не закончено. Гаусс в этом доказательстве молчаливо опирается на свойства алгебраических кривых и еще беззаботно оперирует понятием „кривой“. Правда, положение, что „кривая“ не может оборваться, высказывается им явно, но дальше это положение им не исследуется. Кроме того, он недостаточно полно перечисляет все возможные частные случаи, получающиеся для различных комбинаций, возможных в отношении точек пересечения отдельных ветвей кривой $P = 0$ с ветвями кривой $Q = 0$. Но особенно существенно то, что он в этом доказательстве считает очевидными основные теоремы о непрерывности двумерной области, например теорему о том, что если одна кривая содержит точки, лежащие по разные стороны от другой кривой, то эти кривые пересекаются в некоторой точке.

---

[1]) Еще ранее эта теорема была высказана Альбертом Жираром в книге A. Girard, Invention nouvelle en l'algèbre, Amsterdam, 1629 (переиздал Bierens de Haan, Leiden 1884).

Второе доказательство значительно проще в отношении применяемых в нем средств. Оно всецело протекает в области одномерного континуума.

Считая очевидным положение, что уравнение нечетной степени $\varphi = 0$ имеет по меньшей мере один вещественный корень, Гаусс применяет следующий гениальный прием.

Из уравнения $f(z) = 0$ степени n, содержащей множитель 2 лишь в первой степени, Гаусс получает целую функцию новой переменной u, а именно результант функций

$$P(z, u) = f(z+u) + f(z-u)$$

и

$$Q(z, u) = \frac{f(z+u) - f(z-u)}{u}.$$

Коэфициенты этого результанта могут быть получены из коэфициентов $f(z)$ путем рациональных операций, причем степень результанта равна $n(n-1)$, но его можно рассматривать как функцию $F(u^2)$ от переменной u^2, причем степень многочлена $F(u^2)$ равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Тогда можно доказать, не предполагая существование корней $z_1, z_2, \ldots, z_n$ уравнения $f(z) = 0$, что обращение в нуль $F(u^2)$ необходимо и достаточно для существования общего решения уравнений $P(z, u) = 0$ и $Q(z, u) = 0$.

Так как функция $F(u^2)$ нечетной степени относительно u^2, то уравнение $F(u^2) = 0$ имеет корень h, так что уравнения $P(z, \sqrt{h}) = 0$ и $Q(z, \sqrt{h}) = 0$ имеют общий корень g, откуда вытекает существование корней уравнения $f(z) = 0$, а именно корней $g \pm \sqrt{h}$. При этом по данному $\sqrt{h}$ и коэфициентам f можно чисто формально найти g путем рациональных операций (нахождение общего наибольшего делителя).

Если множитель 2 входит в n два раза, то $\frac{n(n-1)}{2}$ содержит множитель 2 один раз, так что многочлен F относится к уже рассмотренному случаю, и можно повторить предыдущее рассуждение. Применяя принцип полной индукции, можно продолжить доказательство до любого n, содержащего множителем какую угодно степень числа 2. К этому блестящему доказательству современной математике остается сделать только одно дополнение, касающееся первого шага рассуждения, а именно допущение, что уравнение $f = 0$ имеет вещественный корень в случае нечетного n. Гаусс считал очевидным, что функция f проходит через значение 0, если при непрерывном изменении z она переходит от положительных значений к отрицательным (или наоборот). Мы же в настоящее время чувствуем потребность расчленить это заключение и наталкиваемся при этом на понятие существенной важности, а именно на понятие непрерывности. Мы должны, следовательно, по поводу этого доказательства

сказать следующее: во-первых, здесь отсутствует явно формулированная теория вещественных чисел, множество которых во всей своей полноте может быть получено только на основании принципа дедекиндова свечения; во-вторых, не доказывается теорема, что если непрерывная функция $f(z)$ меняет свой знак, то она обращается в нуль для некоторого промежуточного значения переменной z; в-третьих, отсутствует доказательство непрерывности рассматриваемой функции $f(z)$.

Все эти вопросы получили окончательное разрешение только в 1817 г. в работе Б. Больцано (Bolzano) *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* („Чисто аналитическое доказательство теоремы о том, что между двумя значениями, придающими левой части уравнения противоположные знаки, содержится по меньшей мере один действительный корень", Прага. Переиздано и серии Ostwald's Klassiker, № 153). Результаты, полученные Больцано, идут гораздо дальше того, что было достигнуто Коши в его более поздних исследованиях.

Больцано можно считать одним из отцов „арифметизации" нашей науки в собственном смысле этого слова. Он был католическим священником и философом-теологом, и я поэтому не сомневаюсь, что первое побуждение к своим исследованиям он почерпнул из схоластических традиций. Впрочем, теорема о непрерывности во всей своей ясности встречается уже у грека Эвдокса. Если сравнить с этим то, что в 1810 г. писал француз Лакруа (Lacroix) в каком-то беззаботном самодовольстве [1]: „Подобные мудрствования, которыми мучили себя греки, нам в настоящее время совершенно не нужны", то получится очень живая иллюстрация к сказанному выше относительно характера различных периодов развития математики.

Я перехожу теперь к области, которая для характеристики критической стороны гения Гаусса является наиболее важной, а именно к его работам по *основаниям геометрии*. По этому очень обширному и крайне интересному вопросу можно было бы сказать очень многое; однако мне приходится отослать желающих более подробно изучить этот вопрос к статье Энриквеса и Цахариаса в Энциклопедии (Enzykl. III AB 1 и AB 9).

Гаусс ничего не опубликовал из всех своих работ в этой области. Только на основании его устных замечаний и писем стали постепенно распространяться и притом иногда в искаженном виде слухи о том, что работы по теории параллельных прямых привели Гаусса к идее создания новой, крайне парадоксальной геометрии. Эта весть получила достаточно широкое распространение, и в дальнейшие годы все те, у кого в той или иной форме возникали подобные идеи, стали группироваться

[1] P. Lacroix, Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, 2-е изд., т. 1, Предисловие, стр. 11.

около Гаусса. Здесь сказывается особенно ярко один из любопытнейших законов истории человечества, заключающийся в том, что, повидимому, не только отдельная личность является творцом новых идей, но иногда, так сказать, сама эпоха таит в себе великие идеи и проблемы и в моменты их назревания ставит или, скорее, навязывает их гениально одаренным умам. Так и здесь неожиданно появляется на свет, одновременно в нескольких, совершенно независимых друг от друга местах идея создания *неевклидовой геометрии*, произведшая полный переворот в науке, — идея, которая в течение тысячелетий не приходила в голову ни одному геометру, занимавшемуся теорией параллельных. Если мы проследим историю каждого отдельного открытия в этой области, то убедимся, что и здесь Гаусс в каждом отдельном случае опережал своих современников на несколько лет.

Помимо приоритета, который однако не был реализован Гауссом, сохранявшим полное молчание по этому вопросу, неевклидова геометрия обязана Гауссу еще тем, что он всем весом своего авторитета содействовал привлечению общего интереса к этому в самом же начале своего появления жестоко оспаривавшемуся созданию человеческого духа и тем самым способствовал окончательной победе новой теории.

Первое публичное указание на новое открытие Гаусса в области геометрии находится в работе Сарториус-фон-Вальтерсгаузена (Sartorius von Waltershausen) *Gauss zum Gedächtniss* („Памяти Гаусса“, 1856); относящееся сюда место перепечатано в собрании сочинений Гаусса (Werke, т. 8, стр. 267). Начиная с 1862 г., стала опубликовываться переписка Гаусса с Шумахером, содержащая богатый материал в этом отношении. Однако только после опубликования наследия Гаусса в том виде, в каком оно помещено Штекелем в восьмом томе собрания сочинений, стало полностью известно, какого размаха и глубины достигло творчество Гаусса в этой области.

Согласно указанным данным развитие идей Гаусса в рассматриваемой области представляется в общих чертах в таком виде.

Начиная с 1792 г., Гаусс, как и все его современники, занимается безуспешными попытками доказать теорему о параллельных на основании данных аксиом. Он опровергает все присланные ему „доказательства“, например в письмах к Больяи (Bolyai) старшему от 1799 и 1804 гг.[1]). Вскрытие всех этих ложных умозаключений направляет его мысли все более и более в сторону создания неевклидовой геометрии. Он не может обнаружить противоречия в подобной геометрии. В одном письме к Шумахеру от 1808 г. [2]) он высказывает намек, что из подобной неевклидовой предпосылки следовало бы существование

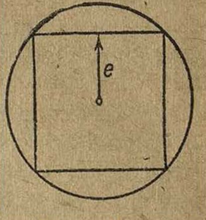
[1]) Werke, т. 8, стр. 159, 160.

[2]) Там же, стр. 165.

в пространстве абсолютной единицы длины. Он испытывает сомнения в разумности такого допущения. Однако в 1816 г. он уже занимает значительно более прочную позицию, как показывает письмо к Герлингу (стр. 168 восьмого тома), и, пожалуй, еще явственнее — вводные слова одного доклада Гаусса, опубликованного в „Göttinger gelehrten Anzeigen" за 1816 г. (Werke, т. 8, стр. 170, 171). Он там прямо говорит о „пробеле, который *невозможно* заполнить".

Гаусс ни в коем случае не смотрел на неевклидову геометрию с номиналистической точки зрения и не считал ее простой игрой ума; ему также была чужда прагматическая точка зрения, которая считает евклидову геометрию если и не абсолютной истиной, то все же таким приближением к истине, которое в условиях нашего опыта является вполне достаточным во всех областях знания, включая и астрономию. Он, скорее, стоял на чисто эмпирической точке зрения. Для него существовало реальное, окружающее нас пространство, имеющее свои собственные, незыблемые свойства, которые нами должны быть познаны. Вопрос о том, какая геометрия существует „в реальной действительности" и, следовательно, должна быть признана единственно истинной, — этот вопрос должен быть решен путем эксперимента. В этом духе и высказывается он в 1817 г. в своем письме к Ольберсу, помещенном на стр. 177 восьмого тома. Априорную истинность Гаусс приписывает одной только арифметике, тогда как геометрию он ставит в качестве опытной науки на один уровень с механикой. Большое значение имеет следующая затем переписка с Герлингом от 1818 г. (стр. 178 восьмого тома). Последний прислал Гауссу короткую записку некоего Швейкарта (Schweikart), юриста, жившего в 1812—1816 гг. в Харькове, затем в Марбурге, а впоследствии в Кенигсберге. Швейкарт утверждал, что им открыта новая, „астральная" геометрия. В действительности же речь шла о неевклидовой геометрии Гаусса, что было Гауссом подтверждено с большой радостью. Швейкарт, как и Гаусс, пришел к выводу о существовании в пространстве абсолютной единицы длины. Швейкарт делает следующее любопытное замечание: если бы эта абсолютная единица равнялась радиусу земного шара, то прямая, соединяющая две звезды, видимые из центра Земли под углом в 90°, как раз касалась бы поверхности Земли. Очевидно Швейкарт хотел этим замечанием указать, каким образом можно было бы эмпирическим путем установить, какая из различных геометрий существует в реальной действительности. Он приводит при этом фигуру, очень похожую на ту, которой пользовался Гаусс в найденных в его наследии заметках. Единица длины e задается перпендикуляром, опущенным из центра на сторону квадрата, вписанного в некоторый основной круг или абсолют, как мы сказали бы теперь с точки зрения проективного мероопределения (черт. 3).

Гаусс отзывался очень сочувственно об идеях Швейкарта, но предостерегал от их опубликования. Причиной абсолютного молчания Гаусса по этому предмету было полное отсутствие у него какой-либо надежды на то, что эти столь парадоксальные по виду теории встретят какое-либо понимание со стороны широкой публики. Он многократно предлагает не тревожить „осиного гнезда“, которое будет больно жалить всякого, кто рискнет высказать что-либо подобное; он предостерегает от „крика беотийцев“, как он выражается в другом месте [1]). Точно так же в своем письме к Тауринусу от 1824 г. [2]) он, сообщая некоторые подробности, просит держать их в строжайшем секрете. Тем бóльшую радость он испытывал, когда встречал понимание со стороны наиболее подвижных умов современности. Примером этому служит его переписка с Бесселем от 1829 г. [3]). Последний тотчас же стал на практическую точку зрения, поскольку вопрос касался геометрических фигур на поверхности земного шара.



Черт. 3.

Между тем неизбежно наступило время, когда тайна была громко разглашена устами более молодых самостоятельных изобретателей. В 1832 г. были опубликованы результаты Иоганна Больяи-младшего, помещенные в виде приложения к труду его отца.

В письме к отцу Больяи [4]) Гаусс выражает свое полное признание и величайшее восхищение по поводу работ молодого человека, сделавших всеобщим достоянием сокровеннейшие открытия самого Гаусса. К сожалению, благожелательные слова великого человека не внушили доверия молодому Больяи, человеку очень впечатлительному и мнительному, которому к тому же офицерская карьера причинила много душевных потрясений, отчасти по его собственной вине. Его, повидимому, огорчило сообщение Гаусса, что он до и независимо от Больяи уже владел идеями последнего.

Это вызвало в Больяи чувство горькой обиды против Гаусса, и он дошел до того, что объявил опубликованные вскоре после этого работы Лобачевского нарочитой уловкой со стороны Гаусса, будто бы опубликовавшего эти работы исключительно для того, чтобы причинить Больяи неприятность. С работами Лобачевского Гаусс познакомился в 1841 г., и эти работы, опубликованные Лобачевским уже в 1829 г., были отмечены Гауссом с большим энтузиазмом и радостью [5]).

---

[1]) Werke, т. 8, стр. 179, 181, 200.
[2]) Там же, стр. 186.
[3]) Там же, стр. 200—201.
[4]) Там же, стр. 220.
[5]) Там же, стр. 232.

Этим я хотел бы закончить краткий очерк наследия Гаусса, опубликованного в восьмом томе. Каждому интересующемуся этим предметом я горячо рекомендую ознакомиться с помещенными в восьмом томе записками Гаусса. Они подробно обработаны в монографии, опубликованной в последних томах собрания сочинений в качестве материалов для научной биографии Гаусса [1]).

Таким образом мы кое с чем ознакомились из всей необъятной области творчества Гаусса и можем попытаться подвести итог и составить себе общее представление о роли Гаусса в истории науки. Уже современники чувствовали все величие его гения, о чем кратко и выразительно свидетельствует надпись, выгравированная в 1855 г. на медали Гаусса: *Mathematicorum princeps* („Король математиков“).

Преклонение перед Гауссом нашло бы, вероятно, еще более сильные выражения для запечатления могучей силы его духа, если бы современникам был открыт доступ к неопубликованным результатам Гаусса в том виде, как они стали известны нам из его наследия.

Спросим же себя, в силу каких черт своего гения Гаусс отмечен этой печатью чего-то совершенно необычайного, не имеющего себе равного во всей истории науки? Легко видеть, что в первую очередь сюда относится его величайшая разносторонность, сочетающаяся в то же время с огромными достижениями в каждой области, за которую он брался. Перед нами редкая картина совершеннейшего равновесия между могучей силой математического творчества, строгостью аргументации при осуществлении своих гениальных замыслов и практическим чутьем в отношении приложений к потребностям человека и общества вплоть до старательнейшего проведения наблюдений и измерений; и, наконец, все это колоссальное, им самим созданное богатство преподносится миру в совершеннейшей форме.

В ряду гениальных представителей нашей науки только два великих предшественника Гаусса — Архимед и Ньютон — были столь же щедро одарены природой, как он. И подобно этим двум, Гаусс жил достаточно долго и имел возможность полностью проявить все заложенные в нем силы.

Но только одна многосторонность в выборе областей творчества не подняла бы Гаусса на ту высоту, на которой он стоит перед нами. Я хотел бы по этому поводу привести любопытнейший пример, сопоставляя в этом отношении Гаусса с Лежандром, который был на 25 лет старше Гаусса и который, как бы побуждаемый какой-то внешней силой, почти во всех областях занимался теми же вопросами, что и Гаусс. Однако какого бы признания ни заслуживали работы Лежандра, он нигде не достиг той глубины, до которой проникал Гаусс во всякой затрагиваемой им проблеме.

---

1) Werke, т. 10, 2, Abh. IV: Stäckel, Gauss als Geometer.

Краткий обзор этих областей покажет нам это замечательное сходство и различие между Гауссом и Лежандром.

Теория чисел. В 1798 г. появляется учебник Лежандра *Essai d'une théorie des nombres*, в котором излагается между прочим теория квадратичных форм. В 1801 г. этот труд был оставлен далеко позади гауссовскими *Disquisitiones arithmeticae*.

Анализ. С 1786 г. Лежандр занимается эллиптическими интегралами $\int R(z, \sqrt{f_4(z)})\,dz$. Он вводит разделение этих интегралов на интегралы первого, второго и третьего рода. Обладая таким же вычислительным талантом и энергией и питая такую же любовь к числам, как и Гаусс, Лежандр составляет подробные таблицы для $\int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$. Но он не доходит до мысли рассмотреть обратную функцию этого интеграла, что дало бы ему ключ к теории эллиптических функций. Начиная с 1793 г., Лежандр занимается также и эйлеровыми интегралами. Он составляет таблицы для $\Gamma(p)$, вполне соответствующие гауссовым таблицам в его теории гипергеометрического ряда (1812).

Геометрия. Лежандр первый делает попытку составить вполне строгий элементарный учебник. Это — его элементарная геометрия 1794 г., которая с того времени выдержала бесчисленное множество изданий и сыграла крупную роль в истории преподавания математики. Лежандр так же, как и Гаусс, беспрестанно занимался теорией параллельных, но до самого конца своей жизни он упорно не оставлял своих безуспешних попыток найти доказательство постулата Евклида.

Геодезия. В 1792 г. было предпринято точное градусное измерение расстояния между Дюнкирхеном и Барселоной, в котором Лежандр принимал самое горячее участие как теоретически, так и практически. Лежандр имеет крупные заслуги в деле этого первого точного градусного измерения, которое легло в основу введения метра в качестве единицы длины и вообще сыграло большую роль в теоретической разработке геодезии. Эта работа привела Лежандра к важным теоремам сферической тригонометрии. Но и здесь также Лежандру не было суждено дойти до глубочайшей идеи Гаусса, возникшей у последнего как раз в связи с подобного же рода работой, а именно до идеи создания неевклидовой геометрии. Упомянем еще, что Лежандр принимал деятельное участие в предпринимавшихся в то время, но, к сожалению, не увенчавшихся успехом попытках введения „новых градусов“, т. е. десятичной системы измерения углов, для которой им были составлены подробные тригонометрические таблицы.

Астрономия. Лежандр занимался в 1805 г. притяжением эллипсоидов; он находит также и опубликовывает метод наименьших квадратов, соприкасаясь и здесь с работами Гаусса. Наконец,

Физика. В этой области у Лежандра нет таких достижений, которые можно было бы сравнить с гауссовой теорией зем-

ного магнетизма. К области теоретической физики можно, пожалуй, отнести теорию шаровых функций от одного переменного, так называемых полиномов Лежандра. Лежандр владел этой теорией уже в 1785 г. и применил ее в своей работе о притяжении эллипсоидов. И здесь также Гаусс превзошел Лежандра созданной им теорией потенциала. Шаровые функции от двух переменных были тем временем найдены Лапласом.

Это сопоставление, не только не разъясняющее, но, наоборот, еще явственнее подчеркивающее всю необъяснимость загадки гения Гаусса, поучительно однако в другом отношении. Оно показывает, насколько неправилен иногда встречающийся взгляд на математику, как на субъективную науку, обязанную своим развитием произвольному воздействию творческих личностей. В противовес этому взгляду, мы видим на нашем примере, что большей частью объекты исследования сами собой, в силу какой-то внутренней логики, навязываются отдельным личностям всем характером эпохи, в которой они живут. Своеобразная судьба, постигшая обнаруженные в наследии Гаусса открытия, лишь подтверждает этот взгляд. Почти все эти открытия были впоследствии раньше или позже вновь открыты другими исследователями совершенно независимо от Гаусса. Если среди непонятных пока еще для нас заметок Гаусса имеются какие то новые научные открытия, то мы можем быть вполне уверены в том, что развитие науки со временем бросит свет и на эти места и когда кто-либо другой вторично дойдет когда-нибудь до этих идей,—мы научимся понимать также и эти темные для нас еще намеки Гаусса. Предназначение гения состоит как будто в том, чтобы предвосхитить дальнейшее развитие науки и, подымаясь на высоту, далеко превосходящую уровень современности, предопределить таким образом решительный поворот в науке и положить начало усиленной творческой работе в новой, доселе человеческому духу неведомой области. Творчество гения служит как бы водоразделом между отдельными историческими эпохами, являя собой высшую точку достижений завершаемой им эпохи и образуя фундамент новой, зарождающейся. Расходящиеся в необозримые дали лучи сияния гениального духа проникают часто в такие глубины и проявляются в таких областях, о которых современники и не подозревают. Да будет мне разрешено прибегнуть к следующей метафоре: Гаусс напоминает мне образ высочайшей вершины баварского горного хребта, какой она предстает перед глазами наблюдателя, глядящего с севера. В этой горной цепи в направлении с востока на запад отдельные вершины подымаются все выше и выше, достигая предельной высоты в могучем, высящемся в центре великане; круто обрываясь, этот горный исполин сменяется низменностью новой формации, в которую на многие десятки километров далеко проникают его отроги и стекающие с него потоки несут с собой влагу и жизнь.

Заканчивая эту краткую характеристику творчества Гаусса и переходя к следующему этапу развития математики, я должен отметить, что даже такой всеобъемлющий дух, как Гаусс, был в конце концов сыном своей эпохи. Все творчество Гаусса насквозь проникнуто духом XVIII столетия. У Гаусса отсутствуют те характерные черты, которые выступят на передний план в следующей главе: усиленная педагогическая деятельность среди широкой публики, создание руководящей школы, оживленная связь с учеными всего мира, — черты, столь типичные для исследователей нашей эпохи.

Наконец, некоторые вскоре выдвинувшиеся области науки, как, например, проективная геометрия, были совершенно не затронуты Гауссом. Все эти черты блестяще выступают наружу как раз у того круга математиков, к которому мы теперь переходим.

Глава вторая.

Франция и Политехническая школа в первые десятилетия XIX века.

Чтобы сделать понятным дальнейшее изложение, нужно сказать несколько слов о сущности и организации Политехнической школы (École Polytechnique) в Париже. Я коснусь здесь только общего характера организации Политехнической школы, не останавливаясь на многочисленных отдельных изменениях, которым она подвергалась за время своего существования. Говоря о Политехнической школе, часто имеют в виду учреждение, аналогичное нашим высшим техническим учебным заведениям или даже являющееся их прообразом. Хотя нельзя отрицать значительного влияния Политехнической школы на развитие нашей школы, однако такое сопоставление справедливо лишь в ограниченной мере. Для пояснения я хотел бы здесь очертить французскую схему постановки образования в области наших дисциплин.

Основой школьного обучения является школа второй ступени, соответствующая первым семи классам германской средней школы. К ней примыкает обучение в Classe des Mathématiques spéciales — учебном заведении с чрезвычайно сильным преобладанием математического преподавания — до 16 часов в неделю. Здесь преподается элементарный курс аналитической геометрии и механика, а в последнее время и элементарный курс анализа бесконечно малых, причем большое число упражнений дает учащемуся возможность совершенно твердо овладеть этими дисциплинами. К сожалению, у нас совершенно нет учебного заведения, которое можно было бы сопоставить с этой школой. После этого следует очень строгий экзамен, который чисто статистическим методом отбирает из большого числа кандидатов 150 человек, допускаемых в Политехническую школу [отбор производится по числу полученных „пунктов“, высшее возможное число которых равно 2000; до сих пор за все время существования школы только однажды была достигнута рекордная цифра в 1875 пунктов, именно Адамаром (Hadamard)].

Обучение в Политехнической школе продолжается два года и является единственным путем к занятию высших технических государственных должностей, к которым инженер готовится еще дополнительно два года в одном из специальных учебных

заведений. Из этих специальных школ я бы хотел отметить Институт путей сообщения (École des Ponts et Chaussées), Горный институт (École des Mines) и две военные: Военно-инженерную школу (École de Génie) и Артиллерийскую (École d'Artillerie). Эти школы неодинаковы по своему значению и положению (мы перечислили их в снижающейся последовательности), и выбор их не является свободным для оканчивающих Политехническую школу, а определяется качеством выпускного свидетельства. Владельцу лучшего диплома открыт доступ во все школы, для окончившего с более слабым дипломом открыт например путь в École de Génie и ниже и т. д. Помимо абитуриентов Политехнической школы в этих специальных школах проходит четырехлетний курс и большое количество учащихся со стороны. Однако эти студенты, которые не имеют шансов на государственную карьеру, не пользуются такими правами и не имеют такого положения, как питомцы Политехнической школы, которые рассматриваются как государственные служащие и получают определенное содержание. Еще в стенах Политехнической школы учащиеся, кандидаты на все высшие государственные должности, рассматриваются как государственные чиновники, хотя вместо выплаты им содержания, как это было установлено при основании школы, с учащихся взимается плата за обучение. Строго военная организация интерната — учащиеся носят форму — подчеркивает и внешне совершенно своеобразное положение этой школы, рассчитанной исключительно на удовлетворение государственных и военных нужд.

Своеобразный тип этой школы можно, конечно, понять только в его историческом развитии. Блестящее изложение этих условий дал Якоби в своем докладе о Политехнической школе, произнесенном в 1835 г. в Физико-экономическом обществе в Кенигсберге (Jacobi, Werke, т. 7, стр. 355).

Школа была основана в самые тяжелые годы революции, когда ликвидация всех учебных заведений и непрерывная убыль молодых крепких мужчин, подготовленных к несению военной службы, настоятельно требовали пополнения именно в этом направлении. Происхождением и объясняется военный уклад школы, ее глубокое проникновение государственными интересами; все это, конечно, имело длительное и серьезное влияние на характер преподавания и дух всего учреждения. Школа была создана, чтобы подготовлять офицеров для революционной, а позже для наполеоновской армии. Только подчеркивая эту цель и создавая школу на основе строгого республиканского патриотизма, который в теории не признавал даже привилегий таланта, можно было в 1794 г. получить разрешение на открытие этой школы, которая затем, именно благодаря своим военным тенденциям, пережила все бурные перемены государственного строя (мы не говорим уже о материальных затруднениях той эпохи, когда деньги были совершенно обесценены, и помощь

школе могла быть оказана только продуктами). Несмотря на огромные военные требования, поглощавшие учителей и учеников и сделавшие обычным явлением пониженные экзаменационные требования, ускоренные курсы и т. п. (Наполеон положил позже этому конец, сказав, что не следует убивать наседку, несущую ему золотые яйца), школа безостановочно росла в своем охвате и значении и развилась в один из важнейших факторов духовного прогресса XIX столетия.

Обращаясь к людям, проделавшим эту огромную работу, мы должны назвать прежде всего геометра и государственного деятеля Монжа (1746—1818), который до своей смерти оставался главной движущей силой этого большого дела. Он еще до парижского периода своей жизни методически проработал в военной школе в Мезьере курс начертательной геометрии и передал многочисленной и живой аудитории стимул к дальнейшему развитию новой геометрии, преследующей конкретные задачи. Его научное влияние распространилось далеко за пределы его школы и его родины и дало толчок начавшемуся в скором времени развитию геометрии и в Германии. Сам я благодаря своему учителю Плюкеру (Plücker) воспитывался еще в традициях Монжа. Научная и педагогическая деятельность Монжа находилась в полном соответствии с его интересом к правительственным и организационным вопросам. Он несколько раз занимал важные государственные посты и продолжал свою общественную деятельность при Наполеоне, доверием которого он пользовался. Некоторое время он занимал пост морского министра, участвовал в египетской экспедиции, затем организовал обширное пороховое производство.

Школа, в которой решающее влияние принадлежало такому человеку, по своему характеру, как и следовало ожидать, была тесно связана с практической жизнью. Это сказывается и в организации школы, рассчитанной на высшее напряжение сил, на возможно более значительные специальные достижения. Какая противоположность идеалу всестороннего гармонического развития личности, который мерещился XVIII столетию! Все меры строгости, воздействия на честолюбие, окрыляемое перспективой блестящей жизненной будущности, привлекались здесь для того, чтобы заставить учащегося до крайности напрягать свои силы. Знания вколачиваются в голову до полного овладения предметом. Для этого, кроме профессоров, имеются репетиторы, которые объясняют лекции и производят проверку знаний. И наконец экзаменаторы имеют целью установить имеющиеся достижения путем чрезвычайно строгого, подробного выпускного экзамена, которому должен подвергнуться каждый кандидат в отдельности. Пуассон бывал в конце года занят этими экзаменами в течение четырех недель по девять часов в день.

Организации преподавания соответствовал продуманный учебный план, предъявлявший огромные требования. В первые десятилетия, которые нас здесь интересуют, математика

стояла в этом плане на первом месте и состояла из следующих частей:

Чистый анализ	108	двойных лекций (по $1^1/_2$ часа)
Применения анализа к геометрии .	17	" "
Механика	94	" "
Начертательная геометрия	153	" "
Черчение	175	" "
Итого . . .	547	двойных лекций (по $1^1/_2$ часа)

Пересчет на немецкие условия дает приблизительно как соответствующую нагрузку посещение пяти четырехчасовых курсов, т. е. 20 часов в неделю. Если к этому прибавить постоянные репетиции, то мы можем составить себе представление о рабочей нагрузке студента Политехнической школы.

Так как в это замечательное учреждение были привлечены в качестве преподавателей лучшие математики Франции, то неудивительно, что Политехническая школа в очень короткий срок достигла исключительных успехов. Немаловажную роль сыграло здесь и то рвение, которое вызывало в учащейся молодежи непосредственное личное общение с преподавателями, занимавшими видное положение в науке и одушевленными творческим порывом, с которыми учащиеся постоянно встречались во время практических упражнений, в лабораториях и чертежных залах. Влияние школы за ее стенами стало еще более значительным с тех пор, как в законодательном порядке была сделана обязательной публикация лекций. Бо́льшая часть основных учебников по высшей математике в начале XIX века возникла из курсов, преподававшихся в Политехнической школе, и от этого источника ведут, так сказать, свое происхождение все наши современные учебники[1]).

Влияние такого интенсивного преподавания на науку не замедлило сказаться. Фактически почти все, что было сделано во Франции в первые десятилетия XIX века в области математики, физики и химии, идет из Политехнической школы. Но по самому характеру школы в первую очередь пережила расцвет прикладная математика. Я хотел бы поэтому расположить результаты этого мощного подъема, к которым я теперь обращаюсь, в такой последовательности:

1) Механика и математическая физика,
2) Геометрия,
3) Анализ и алгебра.

I. Механика и математическая физика.

Эпоха, которую мы рассматриваем, находилась под воздействием великого астрономического периода XVIII века, нашедшего свое классическое выражение в трудах Лагранжа и Лап-

[1]) Klein-Schimmack, Der mathematische Unterricht in den höheren Schulen, стр. 176 и сл.

ласа. Решающее влияние имели восходящие еще к Лапласу первые плодотворные попытки перенесения астрономических методов на проблемы изучения физических тел, рассматриваемых как молекулярные агрегаты; так разрабатывалась, например, теория капиллярности. Наряду с этим играло роль и влияние Эйлера и Лагранжа в направлении „феноменологического истолкования“ физических явлений. В остальном, следуя традициям Кулона (Coulomb) (1736—1806), физика сосредоточила свой интерес исключительно на количественном изучении тех групп явлений, которые были уже ранее качественно известны. О работах, связанных с установлением длины метра, уже было сказано. Подобным же образом интерес был сосредоточен на фиксировании остальных метрических единиц, длины секундного маятника и т. п.

С первыми же десятилетиями нового века начинается блестящий период новых открытий. Прежде всего внимание обращается к *оптике*. В 1808 г. Малюс (Malus) открывает явление поляризации света, вслед за этим, начиная с 1815 г., деятельно проявляет свой гений Френель [Fresnel, 1799—1827, см. статью Вангерина (Wangerin) в Enzykl. V 21]. Он устанавливает поперечность световых колебаний, носителем которых является квази-упругий эфир. Он наблюдает и истолковывает распространение света в двуосных кристаллах, круговую поляризацию в кварце, явления аберрации и дает полные формулы для теории отражения. С 1821 г. после открытия Эрстеда начинается исключительно быстрое развитие теории *электромагнетизма* и *электродинамики*, о котором я говорил уже в другом месте (стр. 47 и сл.). Классическое изложение этой новой теории было дано в вышедшей в Париже в 1826 г. книге Ампера (Ampére, 1775—1836) *Théorie des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience* („Теория электромагнитных явлений, выведенная исключительно из опыта“). Это название может показаться несколько странным, если читатель узнает, что Ампер не выполнил фактически ни одного из описываемых им опытов. Для него „эксперимент“ по существу имел чисто методическое значение, что давало ему возможность ограничиться только мысленной выполнимостью его Относительно развития этих идей я укажу также на одну статью в энциклопедии, именно на статью Рейффа и Зоммерфельда (Reiff und Sommerfeld, Enzykl. V 12).

Поток этих физических открытий оказал значительное стимулирующее влияние и на математическое творчество, ибо хаос и сумятица сталкивающихся новых представлений и теорий властно требовали упорядочивающей руки математика. Здесь начали свою работу люди, рассмотрением трудов которых мы сейчас займемся [1]).

---

[1]) Подробные биографии, написанные современниками, имеются в собрании сочинений Араго (Arago), особенно в томах 1 и 2; по-немецки они изданы Ганкелем в 1854 г. в Лейпциге. (Есть и русский перевод. *Перев.*)

Прежде всего нужно назвать и охарактеризовать трех математиков, которые исторически связаны друг с другом, хотя при жизни они находились в почти беспрерывной полемике. Это — Пуассон, Фурье и Коши.

Пуассон (Poisson, 1781—1840) является типичным представителем Политехнической школы; он принадлежал этой школе последовательно как ученик, репетитор, профессор и экзаменатор. Как преподаватель этого учебного заведения он создал систематический курс механики, из которого возникла его книга *Traité de Mécanique* („Курс механики") (два тома, 1-е издание в 1811 г.), не утратившая своего значения еще и сейчас. В своей исследовательской работе в области механики в узком смысле слова он находился под влиянием идей Лагранжа-Лапласа, которые он развил и расширил. Его занимают и отдельные проблемы механики (волчок, движущийся по плоскости); но прежде всего его привлекают к себе общие методические вопросы. Так, ему обязаны важным переходом от применявшихся Лагранжем координат скорости $\dot{q}_i$ к координатам импульса $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, которые придали значительно более удобный вид всем соотношениям механики. Кроме того он подверг плодотворной проработке все отделы старой математической физики: капиллярность, изгибание пластинок, электростатику, магнитостатику, теплопроводность. Насколько многосторонней и плодотворной была его деятельность, можно видеть по большому числу отдельных деталей, которые до сих пор связаны с его именем: скобки Пуассона в механике, константы Пуассона в теории упругости, интеграл Пуассона в теории потенциала, наконец общеизвестное, получившее широкое применение уравнение Пуассона $\Delta V = -4\pi\rho$, которое он установил для пространства, заключенного внутри притягивающего тела, обобщив уравнение Лапласа $\Delta V = 0$, справедливое для внешнего пространства. Пуассон написал свыше 300 работ и проявил свое творчество во всех областях, которых он касался. Его сочинения однако читаются не легко из-за их многословия. Теоретически он был ортодоксальным сторонником атомистики в духе Лапласа. Он заходил так далеко, что в производных и интегралах физики склонен был видеть только сокращенные образования отношений конечных приращений и сумм.

Фурье (Fourier, 1768—1830) также работал в Политехнической школе, но только в период с 1796 по 1798 г. В последующие богатые событиями годы он (как и Монж) принял участие в египетской экспедиции Наполеона, а затем (в 1802 г.) стал префектом департамента Изеры (главный город — Гренобль). В 1817 г. он вернулся в Париж, где вел академический образ жизни, группируя вокруг себя небольшой кружок молодых талантов, к которому одно время принадлежал между прочим и Дирихле.

Результатом работ Фурье является преимущественно его классическая, имеющая и с точки зрения формы законченный характер книга *Théorie analytique de la chaleur* („Аналитическая теория тепла"), начатая в промежуток с 1807 по 1811 г., но вышедшая в свет только в 1822 г. Он рассматривает проблемы теплопроводности при различных поверхностных условиях, и притом, начиная с чисто теоретических предпосылок и кончая фактическими численными расчетами; физическая основа его рассуждений близка к феноменологической точке зрения. Это сочинение характерно принципиальным употреблением тригонометрических рядов и интегралов, которые его ученики назвали в его честь рядами и интегралами Фурье; под этим названием они известны и в настоящее время.

Прежде чем перейти к изложению содержания труда Фурье, я хотел бы сказать несколько слов о принципиальной позиции, которую он занимал по отношению к своей науке. Первое положение его введения гласит: Les causes primordiales ne nous sont point connues; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par l'observation et dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle („Первопричины явлений нам неизвестны; но они подчиняются простым и постоянным законам, которые можно открыть путем наблюдения и изучение которых составляет предмет натуральной философии").

Эти слова свидетельствуют о чисто феноменологической точке зрения Фурье на природу. Орудие, которым он пользуется в этом изучении, определенном им как предмет натуральной философии, — математика и прежде всего анализ в той части его, которую Фурье существенно продвинул вперед, именно теория диференциальных уравнений и их интегрирование. Он надеется найти в этой теории непревзойденное орудие, которое, конечно, служит своей основной цели только в том случае, когда оно дает возможность дойти до окончательных численных расчетов: „La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague et d'indéterminé dans les solutions; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles" (стр. 12) („Вытекающий из этого метод не оставляет в решениях ничего туманного и неопределенного; он доводит их до последних численных приложений, необходимого условия всякого исследования, без которого мы не получили бы ничего, кроме бесполезных преобразований").

Для него совершенно несомненно, что все явления природы могут быть охвачены математически и что их соотношения могут быть вполне удовлетворительно уяснены с помощью этой науки: „Considérée sous ce point de vue, l'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle même... Son attribut principal est la clarté; elle n'a point de signes pour exprimer des notions confuses" („Рассматриваемый с этой точки зрения математический анализ столь же обширен, как сама природа... Его глав-

ным атрибутом является ясность; в нем вовсе нет знаков для выражения туманных понятий"). В соответствии с этой точкой зрения его изложение отличается мастерской ясностью и совершенством формы.

Предметом труда Фурье является вывод уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

и его интегрирование при различных частных граничных условиях; на границах могут быть заданы либо значения v, либо значения $\frac{\partial v}{\partial n}$, либо значения $\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial n}$. Для интегрирования этого уравнения разыскиваются подходящие частные решения, сумма которых представляет собой общее решение; таким образом, постоянно применяется метод разложения в ряд. В качестве побочного продукта этой работы получается изображение произвольно заданных граничных значений при помощи рядов, имеющее само по себе большой интерес с точки зрения теории функций. Как известно, имя Фурье и в настоящее время связано с обыкновенными *тригонометрическими рядами*

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

которые однако были известны и часто применялись еще до Фурье. Сделав большой шаг вперед, Фурье применяет там, где его объект этого требует, и более сложные ряды, например ряд

$$f(x) = \sum (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x),$$

где λ определяется более сложным условием трансцендентного характера, вроде $\operatorname{tg} \lambda\pi = a\lambda$ (a — положительная константа); этому условию удовлетворяет бесконечное количество значений λ[1]). Встречаются у него и разложения по бесселевым функциям и наконец носящее также имя Фурье изображение данной функции при помощи интеграла, получающегося из ряда как предел при увеличении интервала:

$$f(x) = \int [a(\varkappa) \cos \varkappa x + b(\varkappa) \sin \varkappa x] \, d\varkappa.$$

С помощью всех этих средств Фурье дал изображение большого числа функций, кажущихся по сравнению с ранее известными очень произвольными. Строгим доказательством общей приложимости своих методов к изображению функций Фурье не располагал, но он повсюду защищает верное само по себе

[1]) Enzykl. II A 12, № 43.

утверждение, что с их помощью можно дать выражение „des fonctions absolument arbitraires" („абсолютно произвольных функций"), т. е. таких функций, которые состоят из произвольных „частей" закономерных функций; это положение он подтверждает многочисленными примерами.

Данный Фурье толчок сохраняет свою силу еще до настоящего времени во всех областях математической физики и чистой математики. Но в то время как для него собственно стимулом всей работы была мысль о полезности и приложимости этого метода к большим практическим проблемам, которые перед нами ставит природа, впоследствии в постоянно совершенствующемся математическом аппарате главенствующую роль начинает играть абстрактный интерес этого метода для теории функций. Если мне позволено будет пояснить свою мысль примером, я сказал бы, что математика в наши дни напоминает мне крупное оружейное производство в мирное время. Витрина заполнена образцами, которые своим остроумием, искусным и пленяющим глаз выполнением восхищают знатока. Собственно происхождение и назначение этих вещей, их способность стрелять и поражать врага отходят в сознании на задний план и даже совершенно забываются.

На этом я хотел бы закончить мои замечания относительно Фурье и обратиться к человеку, которого по его блестящим достижениям во всех областях математики можно поставить почти рядом с Гауссом, именно к Коши. Здесь, где мы можем говорить только о его первых работах в области механики и математической физики, мы сможем дать лишь очень неполную его оценку; но нам придется еще подробно говорить о Коши при рассмотрении истории чистого анализа.

Во внешней жизни Коши играли важную роль великие исторические события его эпохи; подробнее см. об этом в его биографии, написанной Вальсоном[1]). Он родился в Париже в 1789 г. и здесь провел свою юность, воспитываясь в строго клерикальных традициях, которым он оставался верен до конца своей жизни. По окончании Политехнической школы он стал инженером путей сообщения в Шербурге, откуда вернулся в Париж в 1813 г. С 1816 г. он работал как член Академии и профессор Политехнической школы, но в 1830 г. после июльской революции был вынужден в силу своих клерикально-роялистских настроений отправиться вместе с Бурбонами в изгнание, которое он провел преимущественно в Турине и Праге, будучи некоторое время воспитателем герцога Бордосского. В 1838 г. он снова вернулся в Париж, но не мог из-за своей неприязни к новому режиму занять никаких государственных должностей. Он ограничился преподаванием в иезуитском колледже. Только после новой

[1]) C. Valson, La vie et les travaux du baron Cauchy, Paris 1868.

революции 1848 г. он получил место в Сорбонне, хотя и не принес присяги; Наполеон оставил его в этой должности в 1852 г. Умер Коши в 1857 г.

В лице Коши мы встречаемся с человеком со столь ярко выраженной политической установкой, что я хотел бы в связи с этим остановиться на вопросе о том, есть ли возможность вообще установить связь между склонностью к математическому мышлению и определенной точкой зрения на общие вопросы жизни политического, социального или религиозного характера. Постановка этого вопроса кажется мне тем более законной, что в широких кругах распространено мнение, будто математики и естествоиспытатели, которых я также хотел бы охватить в этом рассуждении, должны быть склонны к либеральным и даже радикальным настроениям в силу характера своего мышления, свободного от предрассудков и логически точного. Знакомство с историей показывает, что такое мнение, вообще говоря, не соответствует фактам, напротив, наша наука имеет своих выдающихся представителей во всех лагерях и среди всех партий.

Эпоха просвещения XVIII века и последовавшая за ней пора революций выдвинули и в нашей науке людей с радикальными тенденциями, и отсюда, вероятно, и ведет начало господствующая в общественном мнении традиция. Даламбер, один из вождей энциклопедистов, был решительным сторонником нового в то время направления, враждебного существовавшим отношениям; Монж был якобинцем и морским министром в эпоху революции; старший Карно (Carnot), защитник Антверпена в 1815 г., представляет собой чистейший образец строго республиканских настроений, которым он остается верным при всех обстоятельствах. И среди клерикалов также находятся крупные представители науки, как например Коши. При этом Коши не остается единичным явлением: в более позднее время его настроения разделяют Эрмит (Hermite), Камилл Жордан (Jordan), Пастер, которые также примыкали к строго клерикальному направлению. Им противостоят Фарадей или Риман, как представители наивной протестантской набожности, не стесненной высоким развитием интеллекта; у Сальмона (Salmon), профессора теологии, выступает ярче догматически-протестантское начало. Гаусс, который и в этом отношении должен особенно нас интересовать, обладал для себя лично простой, глубокой религиозностью; во внешнем мире он желал „упорядоченного строя, который обеспечил бы ему спокойствие его работы“. Человеком совершенно другого душевного склада был более яркий в общественном отношении Якоби: в бурную пору 1848 г. он несомненно принадлежал к радикальной партии. Его позиция характеризуется взглядом на государство как на форму, логически построенную на основе предпосылок неисторического характера.

Этот короткий обзор подтверждает вывод, к которому нас приводит всякое изучение человека, а именно, что формирование мировоззрения не предопределяется умственной одаренностью

человека. Присущая ему структура ума и воли, влияние воспитания, переживаний, всех воздействий среды и собственной природы принимают в этом участие. Быть может, однако, противоположность типов, проявляющуюся в общем мировоззрении, можно поставить в связь с группировкой мыслителей по их основной позиции в отношении собственной науки. Одна группа математиков считает себя неограниченными самодержцами в своей области, которую они логической дедукцией по собственной воле творят из себя; другие исходят из воззрения, что наука в ее идеальной законченности существует вне нас и что нам дано только в счастливые мгновения открывать ограниченные участки ее. Сущность их творчества представляется им не изобретением по собственному благоусмотрению, но открытием от века существующего, не осознанным волевым актом, но как бы привнесенным извне даром, не зависящим от воли и сознания.

Я обращаюсь теперь к трудам Коши, который отнюдь не был классиком по форме изложения. Подавляющее большинство его работ — Вальсон насчитывает их 789, в том числе восемь самостоятельных книг — носит по мере их развития все более спешный, эскизный характер. Бесконечное число раз повторяет он уже сказанное ранее, чтобы в связи с прежней, незаконченной работой изложить блеснувшую идею, снова не доводя ее до конца. Несколько больше заботы о форме проявляет Коши в отношении своих самостоятельных больших трудов, которые принесли ему в 20-х годах раннюю славу. Наряду с ними уже в то время появлялись отдельные статьи его в „Journal de l'École Polytechnique" и „Мемуарах" академии. Но, начиная с 1835 г., Коши стал пользоваться для своих бесчисленных сообщений отчетами академии („Comptes rendus"), которые начали выходить еженедельно с 1 июля этого года. Его требования к журналу были настолько велики, что из-за него пришлось ограничить размеры статей четырьмя страницами. Тем не менее потребность Коши в органе для опубликования своих работ этим не покрывалась; наряду с этими статьями стали выходить самостоятельно издаваемые им сборные тома: *Exercices de Mathématique* („Математические упражнения"), состоявшие из ряда серий, лекций и т. п.

Все работы Коши переизданы в его собрании сочинений. Издание это однако очень мало облегчает проникновение в дремучую чащу трудов Коши; в нем без разбора, в хронологической последовательности, собрано все — и важное и неважное, — с одним лишь совершенно внешним разделением: серия I — публикации в изданиях академии; серия II — другие публикации. Научно ценного наследия, подобного тому, которое оказалось у Гаусса, Коши после себя, повидимому, не оставил.

В той связи, которую мы установили, мы можем здесь говорить только о результатах, полученных Коши в области механики и математической физики. Я коснусь здесь лишь важнейших пунктов, именно его *теории упругости* и *оптики*.

Диференциальные уравнения теории упругости для трехмерного тела вывел впервые Навье (Navier) в 1821 г.; при этом, руководствуясь интересами техники, он исходил из представлений молекулярной теории и ограничился случаем „изотропной“ среды. Коши в 1825 г. положил начало феноменологическому описанию явлений, которое рассматривает тело как континуум и оперирует обоими „тензорами“: *напряжением* и *деформацией*. Введение этих понятий являлось важным шагом вперед по сравнению с простым, равномерно распределяющимся во все стороны давлением жидкости, которое только и было известно в XVIII веке. В 1827 г. Коши распространил это исследование на анизотропные (кристаллические) среды, а в 1828—1830 гг. ему удалось на этом основании создать математическое обоснование простейших положений *оптики Френеля*, — результат, который он в самом начале своей работы наметил как одну из важнейших своих задач. Его теория однако в двух важных пунктах расходится с наблюдениями и воззрениями Френеля:

1. Она требует, чтобы колебания поляризованного света, которые по Френелю происходят в плоскости поляризации, были направлены *перпендикулярно* к этой плоскости.

2. Во всех средах теория давала наряду с поперечными и продольные колебания, которые не играют никакой роли в экспериментальной оптике. Оба эти спорных вопроса занимали умы еще на протяжении нескольких десятилетий, до окончательного утверждения теории Максвелла. Даже еще в 1896 г. при открытии рентгеновых лучей высказывалась мысль о том, что здесь мы имеем давно разыскивавшиеся продольные колебания.

Но помимо этих расхождений оставалась еще целая область оптических явлений, которая вообще не поддавалась объяснению на основе феноменологического учения об упругости, именно явления *дисперсии света*. Чтобы объяснить их, Коши в своей работе *Mémoire sur la dispersion de la lumière* [„О рассеянии света“, Прага, 1835 (36)] возвращается к молекулярным представлениям и по крайней мере качественно достигает цели, приняв, что междумолекулярные расстояния не являются ничтожно малыми по сравнению с длиной световой волны. Коши пришел к дисперсионной формуле $n = a + \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda^2} + \ldots$, которая применяется еще и в настоящее время для сред, полосы поглощения которых лежат в инфракрасной области.

Относящиеся к механике и математической физике работы, о которых мы говорили выше, очень скоро стали международным достоянием и в частности скоро пустили корни в немецких университетах. Но наряду с этой основной линией развития мы должны отметить еще одну побочную, которая возымела влияние вне места своего зарождения лишь много позднее. Мы имеем в виду разработку механики в техническом направлении, которая производилась в кругах Политехнической школы. Здесь

также речь идет о подчинении математической формулировке новых классов явлений, но всегда с осознанной заботой об их техническом применении.

Здесь нужно отметить, хотя она и занимает совершенно изолированное положение, книгу рано умершего Сади Карно (Sadi Carnot, 1796—1832) *Réflexions sur la puissance motrice du feu* [1]; первое издание этой книги (1824) с трудом можно теперь найти в библиотеках. Целью этой небольшой работы, которая в 1878 г. была переиздана и снабжена биографическими сведениями об авторе (сыне Карно старшего, деятеля наполеоновской эпохи), являлось общедоступное объяснение принципов работы паровой машины, но значением своим она по существу обязана дальнейшему развитию идей в той области, к которой она примыкает. Хотя мнение, будто в ней уже содержится второе начало термодинамики, несомненно является преувеличенным, тем не менее идея Карно о том, что основой движущей силы огня является переход от высоких температур к низким, т. е. тепловой поток, идущий от высоких температурных уровней к низким, — идея, которую Карно развивал по аналогии с движущей силой водяного потока, приводящего в движение колесо, дала предпосылки для теории, впоследствии завершенной Клаузиусом (Clausius). Эти идеи, которые можно рассматривать как зародыш первого и второго начал термодинамики, были изложены в достаточно нематематической форме. Более точную формулировку их дал инженер Клапейрон (Clapeyron) в 23-й тетради „Journal de l'École Polytechnique“ (т. XVI, 1834). С точки зрения истории математики работа Клапейрона важна тем, что метод графического изображения, давно уже ставший обычным для техников, здесь впервые проникает в значительно отставшую в этом отношении среду физиков. Конечно, когда теперь рассматриваешь приведенные Клапейроном пять небольших диаграмм, то их скромность кажется удивительной.

Техническая механика (в современном более узком смысле слова) обязана своим возникновением, как уже было отмечено, кругам, близким к Политехнической школе. Здесь нужно прежде всего назвать имена Понселе (Poncelet) и Кориолиса (Coriolis). С Понселе (1789—1867) мы еще встретимся в дальнейшем, как с основоположником проективной геометрии. Из большого числа его практических работ известной популярностью пользовалось в свое время „водяное колесо Понселе“; теперь, конечно, турбины заставили забыть о нем. Имя Кориолиса (1792—1843) известно всем нам по так называемым добавочным силам Кориолиса, которые проявляются при относительном движении, в частности при движении относительно вращающейся Земли

[1]) Есть русский перевод: Сади Карно, Размышления о движущей силе огня, ГИЗ, Л., 1925. (*Прим. перев.*)

(поскольку мы пользуемся движущейся вместе с телом системой координат)[1]).

Здесь мы должны остановиться на следующих сочинениях этих ученых: Poncelet, *Cours de Mécanique, appliquée aux machines* („Курс механики в приложении к машинам", 1826); Coriolis, *Traité de la Mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines* („Курс механики твердых тел и расчеты мощности машин", 1829). Оба эти сочинения имеют по существу одну и ту же тенденцию: в противоположность абстрактным формулировкам лагранжевой „Аналитической механики" („благородная, свободная от трения механика") они стремятся дать синтетическое обозрение проявляющихся в машинах действий сил с учетом фактически имеющих место обстоятельств, как трение и т. п. Математически эти сочинения очень элементарны, но им мы обязаны разработкой фундаментального понятия о механической работе, которое имело решающее влияние при разработке механической теории тепла и установлении великого закона сохранения энергии. Я охотно отмечаю этот важный пример плодотворного воздействия чисто технической проблемы — в данном случае вопроса о полезном действии машин — на теоретические исследования.

В известной связи с этими людьми стоит наконец геометр Шарль Дюпен (Charles Dupin, 1784—1873), которым мы должны будем еще заняться подробнее, когда будем говорить о геометрии. Как истый человек своего времени, он был одновременно теоретиком, практиком и организатором. Его технические интересы были сосредоточены преимущественно на судостроении, к которому он как морской инженер стоял очень близко. Подобно Понселе, он совершал большие информационные путешествия, главным образом в Англию для изучения ее промышленности. Как профессор Музея искусств и ремесел (Conservatoire des Arts et des Métiers), он основал в 1819 г. Народный университет, при помощи которого получили широкое распространение его идеи и интересы в области техники, промышленности и экономики страны. Мы видим, как здесь уже сказываются социальные интересы, — черта, характерная для современной нам эпохи развития науки.

Я хотел бы однако подробнее остановиться на личности и судьбе Понселе, которые представляют особый психологический интерес.

Понселе родился в Метце в 1789 г. По окончании Политехнической школы (1808—1810) он в качестве суб-лейтенанта инженерных войск попадает в Прикладную школу (Ecole d'application) в Метце, в начале 1812 г. призывается в „великую армию" Наполеона и в ноябре 1812 г. во время зимнего русского похода попадает в плен. Два года проводит он в качестве

---

[1]) Русскому читателю эти обстоятельства больше известны под именем теоремы Кориолиса об ускорениях в относительном движении. (*Прим. перев.*)

военнопленного в Саратове на Волге, и удивительно, что именно эта пора вынужденного безделья и полной оторванности от всех вспомогательных средств научной работы приводит его к гениальному творению: созданию *проективной геометрии*. Свои новые идеи он излагал в небольшом кружке питомцев Политехнической школы, находившихся вместе с ним в плену. Мир снова вернул ему свободу. С 1815 г. он работает в арсенале Метца в качестве военного инженера. Результаты, полученные им за время плена, он опубликовал в 1822 г. в книге *Traité des propriétés projectives des figures* („Трактат о проективных свойствах фигур"). Общественная деятельность однако все больше и больше поглощала его силы, отвлекая его от любимых проблем чистой науки. Против своей воли, уступая желанию Араго, как он говорил позже, стал он в том же Метце профессором Прикладной школы (1825—1835). Из внимания к нуждам своей родины он посвятил себя в больших информационных поездках изучению чужих стран; особенно важной для изучения представлялась ему расцветавшая в ту пору промышленная жизнь Англии. Хотя в 1826 г. он опубликовал свой *Cours de Mécanique* („Курс механики"), но вскоре организационные и педагогические задачи совсем поглотили его. Начиная с 1835 г. он занимал высшие военные должности в Париже, был членом Комитета обороны и наряду с этим с 1838 по 1848 г. профессором физической и прикладной механики в Сорбонне и затем начальником (Commandent) Политехнической школы. Его высокое положение дало ему возможность быть избранным в 1851 г. на пост представителя Франции на первой всемирной выставке в Лондоне и председателя жюри; он участвовал также в подготовке парижской всемирной выставки 1855 г. Трагедия его жизни заключается в том, что столь одаренный человек, который, казалось бы, имел такую возможность приложить свои силы, как немногие, считал тем не менее, что он не мог отдаться своему истинному призванию. Уже стариком, выпуская в 1864—1866 гг. новое издание своего *Traité*, он горько жаловался на свою судьбу, которая заставила его совершенно оставить свои любимые занятия и лишила его возможности добиться должного признания своих работ. Старый конфликт между „vita activa" („жизнью действенной") и „vita contemplativa" („жизнью созерцательной") внес диссонанс в конец этой жизни. Понселе умер в 1867 г.

II. Геометрия.

Я перехожу теперь ко второму разделу моего обзора научного творчества, связанного с Политехнической школой,— к геометрии.

Мы упоминали уже об исключительном значении геометра Монжа (1746—1818) в создании и развитии Политехнической школы. Результатом его чрезвычайно плодотворной организационной и педагогической работы явилось то, что в течение

первых 20 лет существования школы математика являлась подлинным центром всего учебного плана. Суть этого преподавания, секрет его большого успеха заключается очевидно в личных особенностях Монжа, который в непосредственном общении со своими учениками действовал на них необычайно сильно и пробуждал их собственные силы. Конечно, печатные свидетельства, дошедшие до нас, дают лишь очень несовершенное представление об энергичности и живости этого преподавания, хотя и они носят еще следы того воодушевления, которое охватывало всех его учеников.

Монж оставил нам два сочинения, возникшие из его преподавательской практики:

1. *Géométrie descriptive* („Описательная геометрия"), которая выходила отдельными листами с 1795 г. и затем стала основным учебником в этой области, впервые приведенной Монжем к твердым формам. В ней опубликован нормальный учебный курс в том виде, как Монж разработал его еще в Мезьере. Существует еще одно более позднее издание этого курса (изд. Brisson'a, 1849) и немецкий перевод Haussner'a, вышедший по изданию 1798 г. в серии „Ostwalds Klassiker" (№ 117). В обоих изданиях имеется живое описание педагогической деятельности Монжа.

2. *L'application de l'analyse à la géométrie* („Приложения анализа к геометрии"); эта книга, также начавшая постепенно выходить с 1795 г., представляет собой курс аналитической геометрии в пространстве, в котором особое внимание уделено диференциальным соотношениям. Существует издание Лиувилля, относящееся к 1850 г.; оно содержит много дополнений, в том числе полную перепечатку гауссовых *Disquisitiones circa superficies curvas.*

Наряду с этими самостоятельными трудами мы имеем еще большое число работ учеников Монжа, которые прямо говорят о направлении мыслей и богатстве идей учителя. Они были опубликованы в „Annales des mathématiques pures et appliquées" Gergonnes'a (Nîmes, 1810—1831), первом, вопреки своему названию, чисто математическом журнале.

Этот журнал вместе с трудами Монжа дает нам представление об общем характере его геометрической школы, отличающейся тем, что в ней естественнейшим образом увязано живое пространственное восприятие с аналитическими представлениями. Аналитическая формула является не самоцелью, а только кратчайшей формулировкой фактически воспринимаемых пространственных соотношений; ее дальнейшее развитие производится на основе пространственных построений. Вряд ли я должен входить в рассмотрение содержания первого труда Монжа, ибо созданный им в ту пору порядок обучения применяется до сих пор в лекциях и упражнениях по начертательной геометрии. Особенно интересно, быть может, отметить, что Монж начал переходить от простого черчения к изготовлению моделей; этот прием наглядного изображения применялся к решению все

более широких задач его последователями, особенно Оливье (Olivier). К сожалению, модели Оливье, хранившиеся в Музее искусств и ремесел, теперь совершенно погибли из-за недостаточной прочности шелковых ниток. В этих попытках мы имеем историческое начало всех позднейших коллекций математических моделей. В то время, так же как и теперь, целью моделей являлось не восполнение недостатков пространственного представления, а развитие в учащемся способности к живому отчетливому представлению; эта цель лучше всего достигается в первую очередь самостоятельным изготовлением моделей.

Второе из указанных сочинений Монжа „читается как роман", т. е. отличается связным, ясным (отнюдь не построенным по старой схеме: предпосылки, утверждение, доказательство) и плавным изложением. Из элементарных формул свободным взлетом фантазии разворачивается масса геометрических рассуждений, которые прежде всего прилагаются к проблемам, выдвигаемым природой. Подобным образом трактуются поверхности вращения, винтовые и линейчатые поверхности, и в заключение дается общее, очень убедительное толкование лагранжевой теории интегрирования диференциального уравнения в частных производных $f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$. При этом во всем развитии идей ясно ощущается как стимулирующая сила та „радость созерцания формы", которая, по выражению Клебша (Clebsch) в его биографии Плюкера, характеризует истинного геометра. Как в другой области у Фурье, здесь целью является не формальная точность выводов, но ясность познания и разворачивание клубка естественно возникающих вопросов.

Такого рода способ мышления во времена Монжа применялся преимущественно к исследованию образов второго порядка, окружностей и шаров, конических сечений и поверхностей второго порядка. Так возникли между прочим учение о полюсе и поляре, об образовании однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида двумя семействами прямолинейных образующих, о линиях кривизны и их определении на поверхностях второго порядка и т. д.

Толчок, данный Монжем, продолжал оказывать свое действие и в последующее время, и как наибольший успех Монжа-учителя следует отметить, что среди его учеников выдвинулся ряд самостоятельных ученых, превзошедших в отдельных областях своего учителя. Среди них я могу отметить здесь только тех, чьи труды приобрели впоследствии особенно большое значение.

Прежде всего я хотел бы однако вернуться к Дюпену, о достижениях которого в области судостроительной техники я упоминал уже в другой связи. Геометрия обязана ему большим количеством новых рассуждений и теорем, трактовка которых отличается особым изяществом. Они содержатся в большом геометрическом труде Дюпена *Développements de géométrie*

(„Геометрические рассуждения“, 1813). Я отмечу только наиболее известные теоремы, связанные с его именем. Это прежде всего знаменитая *циклида Дюпена,* поверхность, огибающая все шары, касающиеся трех неподвижных шаров (и, стало быть, целого второго семейства шаров); далее так называемая *теорема Дюпена,* гласящая, что поверхности ортогональной системы взаимно пересекаются по линиям кривизны. Оба эти рассуждения объединены в теории конфокальных поверхностей второго порядка. Кроме того я хотел бы еще упомянуть об *индикатриссе* Дюпена, связанной с сопряженными касательными в данной точке поверхности. Этот небольшой перечень отдельных изящных открытий может дать представление о той массе ценных приобретений, которыми геометрия обязана Дюпену.

Прежде чем перейти к самому крупному из учеников Монжа, Понселе, я хотел бы еще напомнить об одном человеке, стоящем несколько особняком — о старшем Карно. Интересующая нас здесь его книга *Géométrie de position* („Геометрия положения“) появилась в 1803 г.[1]). Карно (1753—1823) был учеником Монжа еще в Мезьере. Как генерал революционной армии и убежденный республиканец, он играл важную роль во время революции, о чем мы уже упоминали выше. Лишь в более зрелом возрасте получил он снова достаточно досуга для научной работы, которую он посвятил главным образом математическим проблемам принципиального характера.

Его *Géométrie de position* представляет собой весьма замечательную книгу. В ней заключена очень важная сама по себе и вполне современная идея: в геометрии нужно не разделять случаи, когда одна и та же фигура отличается лишь различным расположением своих частей, как это делалось постоянно со времени Евклида, а напротив, эти случаи следует рассматривать совместно, введя принцип знака (положительных и отрицательных величин). В такой форме, однако, Карно этой мысли не высказывает. Напротив, он резко высказывается против обычного для анализа учения о знаках, которое он считает плохо обоснованным и противоречивым. Он пытается доказать это положение, оперируя чисто формально с многозначными функциями, чтобы получить таким путем „ложные“ результаты, вроде $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = a$. Для своих геометрических целей он пытается вывести правило знаков только из рассмотрения самой фигуры и ее изменений и на этой основе построить свою „теорию коррелятивных фигур“. Таким путем геометрия должна быть освобождена от „иероглифического письма анализа“ и воссоздана заново в чисто синтетической форме.

Проведение этой мысли иногда богато идеями, но часто элементарно до тривиальности. Быть может, эту книгу можно рас-

[1]) Немецкий перевод Шумахера: „Geometrie der Stellung“, Altona, 1810.

сматривать как отображение безупречной, но не гениальной личности Карно.

Я хотел бы отметить в качестве детали, что очень известное элементарное предложение о равенстве произведений отрезков, которые любая секущая образует на сторонах треугольника, было установлено Карно, почему оно часто и носит название теоремы Карно.

Историческое значение книги Карно заключается в отказе от анализа. Здесь источник того расхождения между аналитической и синтетической новой геометрией, которое вскоре развернулось и выросло в спор принципиального характера.

Если уже у Карно имеются неясные намеки на то, в каком направлении следует искать развития новой геометрии, то в лице Понселе мы имеем ее великого творца, который гениально воспринял идеи Монжа и Карно и развил их, преодолев все трудности. Поставив на первый план „проектирование" и „взаимность" как единый геометрический принцип, он открыл и обосновал „проективную геометрию", которая, объединив все прежние противоречия, получила возможность развиваться чрезвычайно плодотворно. Та черта, которая возвышает его над всеми предшественниками, это — новый вид геометрической интуиции, — „проективное мышление".

Об особых обстоятельствах, при которых возник его крупный геометрический труд *Traité des propriétés projectives des figures* (1813—1822), было уже сказано.

Понселе исходит из рассмотрения *центральной проекции* и изучает ее в связи с теми соотношениями между частями фигуры, которые остаются неизменными при всяком центральном проектировании. Этот способ исследования заставляет его присоединить к исходным геометрическим элементам еще совершенно определенные „бесконечно удаленные" элементы: каждой прямой придается бесконечно удаленная точка, каждой плоскости — бесконечно удаленная прямая, пространству — бесконечно удаленная плоскость. Это дает ему возможность высказать со всей общностью ряд предложений, среди которых исключительно важное значение имеет предложение о постоянстве двойного (или ангармонического) отношения четырех точек на прямой. Я не хочу здесь исследовать, в какой мере подобного рода идеи были свойственны более старым авторам; у Понселе они сознательно делаются основой всего последующего, и в этом заключается существенный прогресс, вносимый его точкой зрения.

Другим важным элементом новой геометрии является развитие учения о полюсе и поляре кривых и поверхностей второго порядка, которое привело к *общей теории взаимности*. В плоскости точка и прямая, в пространстве точка и плоскость противопоставляются друг другу как равноправные и могущие замещать друг друга основные геометрические элементы. Так, например, плоская кривая, состоящая из точек, соответствует кривой, огибаемой касательными, т. е. самой себе, и т. д.

К обоим этим новым построениям присоединяется очищенная от всяких неясностей и гениально проведенная идея Карно о *„коррелятивности фигур"*, — *принцип непрерывности*. Он заключается в том, что соотношения, установленные с достаточной общностью на какой-нибудь одной фигуре, справедливы и для всех тех фигур, которые могут быть получены из первой путем непрерывного изменения длин.

Понселе дает этому принципу самые смелые и общие применения; он безбоязненно переходит в мнимую область там, где этого, по его мнению, требуют обстоятельства. Так, например, из того факта, что два конических сечения должны пересекаться не больше, чем в четырех точках, он делает заключение, что такое число точек пересечения всегда должно быть налицо, возможно только, что две из этих точек или все четыре окажутся мнимыми. Отсюда он приходит к *проективному определению окружности* как конического сечения, имеющего с бесконечно удаленной прямой две постоянные общие точки — „циклические точки", как мы теперь сказали бы. Точно так же шар он определяет как поверхность второго порядка, пересекающуюся с бесконечно удаленной плоскостью по определенной мнимой кривой, которую мы теперь называем сферической окружностью (Kugelkreis). Поскольку однополостный гиперболоид имеет два семейства прямолинейных образующих, то же должно иметь место и для эллипсоида; разница лишь в том, что здесь оба семейства прямых очевидно являются мнимыми, и т. д.

Если бы мы задались теперь вопросом, на чем основывает Понселе эти неслыханно смелые построения, то нам пришлось бы с удивлением констатировать, что таких оснований у него вообще нет. У него не только нет никаких доказательств принципа непрерывности, который был для него интуитивно ясен, но ни разу не делает он каких бы то ни было попыток дать определение мнимых точек. Очевидно, что у Понселе не возникало никакой потребности в этом, особенно еще и потому, что конечные результаты его содержат всегда сопряженные комплексные элементы, т. е. лежат целиком в вещественной области.

Только установление той связи с анализом, которую Понселе по существу отвергал, могло бы подвести прочный фундамент под это новое здание. Мнимая точка при этом является, как и вещественная, только общим корнем некоторого числа одновременно удовлетворяющихся уравнений, каждое из которых изображает один из пересекающихся геометрических образов. Тот факт, что одно и то же число образов одного и того же порядка всегда может дать только фигуру пересечения одного и того же рода, например одно и то же число „точек", является просто теоремой об общих корнях системы алгебраических уравнений, которые в зависимости от соотношения между коэфициентами могут оказаться вещественными или мнимыми, но при одинаковом числе и одинаковой степени уравнений входящих в систему, всегда имеются налицо в одинаковом числе.

Что касается наконец самого принципа непрерывности, то и его не трудно обосновать средствами современной теории функций. Каждое геометрическое предложение можно выразить аналитически (если ограничить геометрию теми пределами, какие были приняты в ту пору), приравняв нулю некоторую алгебраическую или даже только аналитическую функцию $f(a, b, c, \ldots)$, где $a, b, c, \ldots$ суть части фигуры, между которыми устанавливаются соотношения. Принцип непрерывности сводится при этом только к утверждению, что всякая аналитическая функция, обращающаяся в нуль вдоль сколь угодно малого отрезка своей области, вообще равна нулю.

Понселе является одним из благороднейших представителей тех смелых завоевателей, которых мы охарактеризовали в другом месте. Его мощное влияние сказывалось в течение всего XIX столетия и стало существенной частью нашего собственного мышления.

III. Анализ и алгебра.

Я обращаюсь теперь к третьему разделу моего плана — к алгебре и анализу в Политехнической школе.

Нам придется при этом ограничить себя, остановившись только на Коши и выбрав из всей массы его важных работ, относящихся к различнейшим областям чистой математики, лишь наиболее значительные.

Во главе всего стоят его работы по обоснованию анализа; они теснейшим образом связаны с его преподаванием в Политехнической школе. Сюда относятся следующие работы:

1. *Cours d'analyse* (*Analyse algébrique*) [„Курс анализа (Алгебраический анализ)“, 1821][1]).

2. *Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal* („Конспект лекций по анализу бесконечно малых“), 1823 [2]).

3. Многочисленные отдельные сообщения о *диференциальных уравнениях*, которые примыкают к литографированным запискам 20-х годов, но только около 1840 г. были опубликованы в „Comptes rendus“ и в других местах.

Оба первых сочинения относятся к тому периоду в жизни Коши, когда он еще тщательно заботился о форме. Они представляют собой хорошо расчлененные учебники, в которых выступает на первый план не свободная игра идей, как у Фурье или Монжа, а строго дедуктивный ход мыслей. *Cours d'analyse*“ трактует о том, что теперь, следуя Коши, называют обычно „алгебраическим анализом“; он посвящен изучению элементарных функций в вещественной и комплексной области, включая сюда учение о бесконечных рядах. Приблизительно тем же материалом занимался и Эйлер в своем *Introductio in ana-*

---

1) Oeuvres, sér. 2, т. 3, стр. 1—331.

2) Oeuvres, sér. 2, IV, стр. 1—261. Новое издание появилось в 1829 г. Oeuvres, sér. 2, IV, стр. 263—609.

lysin infinitorum; но именно сравнение с этим более ранним сочинением выявляет совершенно новый критический подход Коши. Давно известная дисциплина строится заново на основе только строго ограниченных, чисто аналитических понятий. Так, например, на стр. 37 и сл. его курса дается безупречно строгое определение „бесконечно малых" на основе понятия о предельном переходе. С помощью установленного таким образом понятия о бесконечно малых на стр. 43 обосновывается определение непрерывности: функция непрерывна, если бесконечно малому приращению переменной соответствует бесконечно малое приращение функции.

Со стр. 114 начинается затем последовательное развитие учения о *сходимости бесконечных рядов*. Даются различные строгие критерии сходимости. И в этой главе Коши ни разу не прибегает к широко распространенным в ту пору туманным понятиям о бесконечных суммах и т. п. Он имеет дело с конечными, по возможности численными суммами, приближающимися к определенному значению в степени, которая может быть точно измерена при помощи строго оцениваемого остаточного члена. Однако Коши обрабатывает свой материал не только со стороны строгого обоснования, но и как самостоятельный творец. Так, на стр. 240 мы находим теорему о том, что степенной ряд имеет в комплексной области свой круг сходимости. В развитие этой главы Коши дает на стр. 274 и сл. доказательство *фундаментальной теоремы алгебры*. Существование нулевой точки целой рациональной функции $f(x+iy)=u+iv$ доказывается с помощью рассмотрения функции $z=u^2+v^2$ и ее минимумов.

Как велики заслуги Коши в изложении этих большей частью известных ранее вещей, можно оценить, лишь сравнивая его с его предшественниками и современниками. Его книга с принципиальной стороны так же резко отличается от господствовавших раньше неопределенных и интуитивных попыток обоснования анализа, как и от совершенно формальной точки зрения Лагранжа, развитой им в его *Théorie des fonctions analytiques* („Теория аналитических функций") и в *Leçons sur le calcul des fonctions* („Лекции по исчислению функций") [1]. Лагранж старался скрыть сущность нового мира идей, Коши же вместо этого во всех критических пунктах дает безупречное арифметическое обоснование; с этого фундаментального сочинения начинается так называемая „арифметизация" всей математики.

Для всякого исторически мыслящего человека нет ничего удивительного как в том, что этот великий мыслитель имел своих предшественников, так и в том, что он, с другой стороны, оставил ряд пробелов, восполнить которые надлежало его преемникам. Из предшественников (которых Коши не цитирует)

[1]) Théorie des fonctions: 1-е изд. 1797, 2-е изд. 1813, Oeuvres, т. 9; Leçons...: 1801, 1806, Oeuvres, т. 10.

нужно отметить прежде всего Больцано, который в 1817 г. очень точно формулировал понятие непрерывности и даже глубоко расчленил его (об этом уже было сказано выше на стр. 88). Ряд критериев сходимости рядов дал в 1812 г. Гаусс, но они, конечно, не проникают в предмет так глубоко, как критерии Коши. Наконец, что касается собственно доказательства основной теоремы алгебры, то последнее было дано Арганом (Argand) в 1815 г. в *Annales* Жергонна. Арган является также одним из первых, предложивших геометрическую интерпретацию чисел $x+iy$; это сделано им в 1806 г. в специальном сочинении [1].

Нам остается еще наконец обратить внимание на то, чего недоставало Коши. У него нет важного понятия о равномерной и неравномерной сходимости ряда в данном интервале, и это не дало его теории бесконечных рядов возможности получить совершенно законченную форму. Отсутствие этого понятия дало возможность Коши высказать на стр. 120 неправильную теорему о том, что сходящийся ряд непрерывных функций в области сходимости сам представляет собой непрерывную функцию; обходя важное понятие о равномерности сходимости, Коши дает и неправильное доказательство этой теоремы. Внести в эти соотношения полную ясность выпало на долю более позднего времени [2].

Второй труд Коши, *Leçons sur le calcul infinitésimal*, посвящен вопросам обоснования исчисления бесконечно малых. Он заключает строгое, освобожденное от всякой метафизики и основанное на понятии о предельном переходе изложение этой дисциплины, которое стало с этого времени общеобязательным в математике. В отличие от *Cours d'analyse* это сочинение разворачивается почти исключительно в вещественной области.

Краеугольным камнем всего построения является теорема о среднем значении (стр. 46), которая сама по себе была известна уже давно, во всяком случае со времени Лагранжа; в более современных обозначениях Коши эта теорема может быть записана так:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\vartheta h).$$

Интегральное исчисление в свою очередь начинается (на стр. 122 с определения понятия определенного интеграла, для которого дается арифметическое доказательство существования. Лишь после этого, начиная со стр. 214, трактуется вопрос о разложении функций в ряды Тейлора, причем он рассматривается всегда с учетом точно оцениваемого остаточного члена и под углом зрения практического приближенного представления заданной функции. Практическая пригодность метода поясняется численными примерами, но наряду с этим, конечно, Коши не оставляет без внимания и теоретическую сторону вопроса. На

[1] Впервые эта интерпретация встречается у Каспара Весселя (Caspar Wessel) в 1798 г. (воспроизведено в Arch. for Math. ok Nat., 18, 1896).

[2] Ср. ниже стр. 137.

стр. 230, приведен знаменитый пример функции $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, которая в точке $x = 0$ не разлагается в ряд Тейлора, хотя последний и сходится.

По плану изложения естественно было бы, если бы в этом месте была высказана основная теорема анализа, именно теорема о взаимной обратимости операций диференцирования и интегрирования:

$$\frac{d}{dx}\int^{x} f(x)\,dx = f(x).$$

(В других изложениях это соотношение часто употребляется для определения интеграла.) Теорема эта здесь однако не высказывается и впервые отчетливо формулирована в книге аббата Муаньо (Moigno) *Leçons sur le calcul différentiel et intégral* (d'après Cauchy) [„Лекции по диференциальному и интегральному исчислению (по Коши)“], которую последний выпустил в 1840—1844 гг. под влиянием Коши в развитие его идей. Данное место находится на стр. 4 второго тома сочинений Коши.

Область *диференциальных уравнений* Коши разрабатывал так многосторонне и в столь различных направлениях, что нет никакой возможности перечислить все его результаты или хотя бы дать обзор всей массы его публикаций, относящихся к этим вопросам. Я ограничусь поэтому выделением лишь нескольких важных пунктов.

В этой области Коши также принадлежит честь первого *доказательства существования* в области, не содержащей особых точек, решений заданной системы диференциальных уравнений, удовлетворяющих тем или иным начальным условиям. Из различных методов, которыми пользуется Коши, я отмечу здесь только два наиболее известные.

1. Диференциальная проблема заменяется разностной — искомая кривая, изображающая функцию, — многоугольником, — и от полученного решения делается предельный переход путем уменьшения интервалов, определяющих стороны многоугольника. Доказательством сходимости этого процесса к определенному пределу — решению диференциальной задачи — и осуществляется искомое доказательство существования. Этот процесс точно соответствует данному Коши определению определенного интеграла и его численному подсчету. (Для практической аппроксимации этот метод улучшается правилом Симпсона.)

2. Делается предположение о том, что коэфициенты диференциальных уравнений могут быть разложены в степенные ряды. Тогда для искомых интегралов можно формально составить степенные ряды, сходимость которых можно доказать, построив их мажоранты. Последний метод доказательства Коши назвал „методом пределов“ („méthode des limites“), распространив теорему и ее доказательство и на комплексную область.

Эти идеи Коши тоже возникли у него уже в 20-х годах. В них мы находим шаг за шагом развитие начал современного арифметизированного анализа. Тем более удивительно, что они возникли из преподавательской деятельности Коши в Политехнической школе. Это лишний раз доказывает, какие необычайно высокие с чисто математической стороны требования были положены школой в основу системы обучения, преследовавшей практические цели.

В менее тесной связи с преподавательской деятельностью Коши находится его другое крупное достижение, которое по значению может быть сопоставлено с его критическим обоснованием анализа, именно *обоснование общей теории функций комплексного переменного.*

Как и относительно области диференциальных уравнений, я лишен здесь возможности дать исчерпывающее изложение того, что сделал Коши. Я выделю только две фундаментальной важности проблемы, вокруг которых группируется все остальное.

1. *Интегрирование в комплексной области по замкнутым кривым.* Знаменитая теорема Коши об интеграле однозначной комплексной функции по кривой:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum k,$$

где k суть вычеты отдельных точек разрыва, охватываемых кривой C (особых точек более высокого порядка, как, например, существенно особых точек или точек сгущения полюсов, Коши еще не знал), была найдена постепенно, ощупью. Коши, который отнюдь не ставил себе целью обосновать общую теорию комплексных функций, начал с интегрирования по сторонам прямоугольника, причем он выбирал два различных пути, связывающих диагонально противоположные вершины его. К этим исследованиям примыкает затем интегрирование по произвольной кривой линии, соединяющей данные точки, что было затруднительнее, так как здесь уже предполагается наличие общего определения интеграла по кривой. К окончательной и ясной формулировке теоремы Коши пришел только в 1840 г., но исходной датой работ его в этой области часто считают 1825 год, когда появилась его самостоятельная небольшая работа *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* („Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами“)[1].

Содержание этой работы во многом соприкасается с третьим гауссовым доказательством основной теоремы алгебры. Коши также исходит из двойных интегралов, взятых по площади, ограниченной кривой. Впрочем утверждение Вальсона, будто до

[1] Перепечатана в Bull. Soc. math. France, т. 7, стр. 265 (1874); т. 8, стр. 43, 185 (1875). Переведена на немецкий язык и напечатана под редакцией Штекеля, в серии „Ostwalds Klassiker“ (№ 112).

этой работы Коши никто не владел идеей об интеграле по ограничивающей данную поверхность кривой, неверно: это подтверждается уже отмеченным ранее фактом, что Гаусс точно знал, начиная с 1811 г., характер интеграла $\int \frac{dz}{z}$. Повидимому, он дошел и до общей теоремы, которая относится к произвольным подинтегральным выражениям и которой мы обязаны Коши [1]. Как глубоко однако оценил Коши все значение этой теоремы, показывают многочисленные изящные и важные применения, которые он ей сейчас же дал.

2. *Разложение произвольной функции комплексного переменного в степенной ряд*, радиус сходимости которого определяется расстоянием до ближайшей особой точки.

Теорема была опубликована в 1831 г. в „Туринских мемуарах", когда Коши уже жил в эмиграции. В 1837 г., когда он подготовлял свое возвращение в Париж, состоявшееся в 1838 г., он сообщил о ней в письме к Кориолису, напечатанном в Comptes rendus. При решении этой проблемы Коши попрежнему работает с конечными суммами, рассматриваемыми как приближенные формулы, остаточный член которых он точно оценивает.

Хотя по возвращении в Париж Коши и не занимался публичным преподаванием, однако он имел большое влияние на дальнейшее развитие науки, благодаря своим сочинениям, которые постепенно начали оказывать свое влияние. Последняя теорема вскоре также получила значительное расширение благодаря трудам двух молодых математиков.

В 1843 г. Лорану (Laurent, Comptes rendus, т. 17, стр. 938) удалось осуществить разложение однозначной функции $f(x+iy)$ в ряд по положительным и отрицательным степеням аргумента $x+iy$ внутри кругового кольца, граничные окружности которого проходят через ближайшие особые точки.

В 1850 г. Пюизе (Puiseux, Journ. math. pures appl. Лиувилля, т. 15, стр. 365) проводит разложение в ряд в „точке разветвления" и показывает, что оно располагается по дробным степеням аргумента $x+iy$.

Говоря об этих дополнениях, которых я касаюсь здесь ради полноты, я выхожу за пределы того отрезка времени, значение которого в истории развития Политехнической школы с математической точки зрения должно быть здесь освещено. Концом этой эпохи нужно считать 1830 г., который естественно принять за границу, потому что с этого времени, с отъездом Коши из Парижа, начинается несомненное ослабление французской творческой продуктивности и одновременно на руководящее место постепенно начинают выходить немцы.

Для объяснения замечательного явления постепенного отмирания столь пышного расцвета нашей науки во Франции приво-

[1]) Ср. письмо к Бесселю; Gauss'Werke, т. 10, 1, стр. 365 и сл.

дилось много оснований. Ответственность за это часто возлагалась на исходившую от Пуассона и других учеников Лапласа тенденцию развивать и поддерживать только прикладную математику. Мне кажется однако, что здесь смешивают причину со следствием, ибо я придерживаюсь того мнения, что такое одностороннее развитие, не способное уже поддерживать правильного равновесия между теорией и ее приложениями, является именно следствием и внешним признаком глубокого упадка. Та точка зрения, согласно которой причиной упадка является печальное истребление молодого поколения в непрерывных больших войнах, также не выдерживает критики, если принять во внимание расцвет науки в Германии, подвергавшейся не меньшим испытаниям.

Причина, которой я приписываю это своеобразное явление, заключается, как мне кажется, в общем психологическом законе, справедливом и для отдельных индивидуумов и для целых народов: за периодами подъема неумолимо следуют периоды покоя и непродуктивности. И как в жизни отдельных людей большей частью оказывается налицо молодая крепкая смена, если только дать ей место, где бы она могла подрасти и развиться, так и в жизни народов другие нации становятся на место уставших, достижения которых они кладут в основу собственной работы, приносящей новые плоды.

Конечно, разделение истории на отдельные периоды может и должно служить лишь для того, чтобы яснее выявить главные линии развития; их не следует понимать механически, в слишком буквальном смысле слова. Так, повидимому, сказанному выше противоречит тот факт, что как раз около 1830 г. во Франции засияла неожиданным блеском новая звезда на математическом небосклоне, засияла, чтобы, действительно, подобно метеору, быстро угаснуть. Это был Эварист Галуа (Évariste Galois).

Галуа родился в октябре 1811 г. около Парижа. Печатать свои работы он начал в 1828 г., еще будучи учеником лицея. Он имел в виду поступить в Политехническую школу, но в 1829 г. два раза провалился на экзаменах. Сам он объяснял это тем, что заданные ему вопросы были слишком детскими для того, чтобы он мог отвечать на них. Наконец в 1829 г. он был принят в Нормальную школу, но уже в 1830 г. был исключен оттуда за свое нетерпимое поведение. В особую вину ему вменялось „непереносимое высокомерие“. Галуа устремился в политическую борьбу, пришел из-за этого в столкновение с правительством и наконец попал в тюрьму, где и пробыл несколько месяцев.

В мае 1832 г. оборвалась эта бурная жизнь; Галуа был убит на дуэли, к которой привела его какая-то любовная история.

Подробную биографию Галуа дал Дюпюи (Dupuis) в „Annales de l'École Normale supérieure“ за 1896 г. Его работы впервые

опубликовал для более широких кругов Лиувилль в 1846 г.[1]) В отдельном издании (1897) они занимают всего 60 страниц. К изданию приложен портрет юного автора, ребячески задорное, почти вызывающее выражение которого находится в странном противоречии с изумительно глубоким и притом совершенно ясным, зрело продуманным содержанием труда. Это внешнее противоречие уясняет нам то внутреннее противоречие, которое погубило Галуа. Неслыханно ранняя зрелость в соединении с неукротимым темпераментом, который не мог подчиняться никаким правилам, страстность натуры, разрушающей самое себя, делают Галуа типичным представителем неупорядоченного, чисто французского гения. [2])

Крупные достижения Галуа лежат в двух направлениях:

1. Он создал первую глубоко проникающую классификацию иррациональностей, определяемых алгебраическими уравнениями, учение, которое еще и в настоящее время коротко называют *теорией Галуа.*

2. Он с глубоким проникновением работал над интегралами произвольных алгебраических функций одной переменной — *абелевыми интегралами,* как говорим мы теперь — и оставил в этой области известные результаты, которые позволяют смотреть на него, как на предшественника Римана.

В качестве третьего пункта нужно было бы, может быть, отметить один намек Галуа, о точном содержании которого трудно судить из-за сжатости изложения. В своем предсмертном письме к Шевалье Галуа говорит об исследованиях относительно „ambiguité des fonctions“ („двусмысленности функций“); возможно, что здесь содержатся указания на римановы поверхности и многократную связность.

Без знакомства с „теорией Галуа“ трудно оценить все значение его достижений. Я хотел бы поэтому попробовать наметить в нескольких словах основной замысел этой теории, хотя в столь кратком изложении и нет возможности дать представление о всем ее объеме. Прежде чем сделать это, я хотел бы отметить своеобразную роль, которую играет теория Галуа как предмет преподавания в наших университетах. Здесь происходит конфликт, одинаково прискорбный и для обучающих и для обучаемых. Именно, с одной стороны, преподаватели, воодушевленные исключительной гениальностью открытия и значитель-

---

[1]) Journ. math. pures appl., т. 11, стр. 381 и сл. Немецкий перевод в изданной Мазером книге Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen von N. H. Abel und É. Galois, Berlin 1889. Далее см. Ж. Таннери (Jules Tannery), Manuskrits de Évariste Galois, Paris 1889. (Извлечение из Bull. d. sciences Math., 2 sér., т. 30 и 31, 1906, 1907.).

[2]) Как известно, во время реакции против революционно настроенного Галуа была создана цепь интриг, имеющая политическую подоплеку. Именно это, а не противоречия характера, как указывает Клейн, привело Галуа к трагической гибели. См. „Сочинения Галуа“, изд. ОНТИ, 1936 г., где приведена биография Галуа. (*Прим. ред.*).

ностью его глубоких результатов, особенно охотно читают курсы о теории Галуа; с другой стороны, как раз эта область представляет исключительные трудности для понимания среднего начинающего студента. Печальным результатом этого в большинстве случаев является то, что затраченные с особой любовью и воодушевлением усилия преподавателей проходят мимо большинства слушателей, не встречая, за редкими исключениями, никакого понимания. Известную роль в этом играют и особые трудности, которые представляет изложение теории Галуа.

Ореол славы, которым постепенно окружила себя теория Галуа благодаря трудностям проникновения в нее, явился одной из причин той переоценки ее, которой она пользуется среди широкой математической публики. Обычно полагают, что в ней все проблемы учения об алгебраических уравнениях нашли свое окончательное разрешение. Конечно, это не так. Хотя теория Галуа дает в самой общей форме ответ на очень важные вопросы учения об уравнениях, но она является лишь преддверием к новой обширной и совершенно неисследованной области, всю совокупность проблем которой мы еще не в состоянии обозреть. Эту область я хотел бы назвать областью „гипер-Галуа", следуя традиции, возникшей в моем разговоре с Горданом.

Теперь переходим к существу самой теории. Я начну с указания на традиционную постановку вопроса, возникающего по поводу заданного уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Этот вопрос заключается в следующем: как обстоит дело с общим решением этого уравнения при помощи образования резольвент, т. е. с помощью составления уравнений, корни которых являются рациональными функциями от искомых корней заданного уравнения? Может ли это уравнение быть сведено путем рационального процесса к ряду более простых вспомогательных уравнений? В частности: возможно ли сведение его к цепи чистых уравнений или, что то же, решение данного уравнения в радикалах?

С самого начала мы должны различать отдельные случаи в зависимости от степени общности, с которой задано уравнение. Назовем только два крайних случая:

1. Коэфициенты уравнения $a_0, a_1, \ldots$ могут быть совершенно свободными переменными величинами. Мы имеем в этом случае целое семейство уравнений, которое выделяется из совокупности всех вообще алгебраических уравнений только общей степенью n.

2. Коэфициенты $a_0, a_1, \ldots$ могут означать совершенно определенные постоянные величины, например определенные целые числа.

Между этими крайними положениями лежит большая область разнообразных переходных случаев. Коэфициенты могут, например, быть целочисленными рациональными функциями одного параметра и т. п.

Первой важной особенностью замысла Галуа является то, что он прежде всего требует точного определения того, что должно рассматриваться как „рациональное“. Он создает понятие об „области рациональности“. Это название возникло позже, само же понятие независимо от Галуа встречается и у Абеля в его *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* („Мемуар об одном частном классе алгебраически разрешимых уравнений“)[1]. Простейшей „естественной“ областью рациональности является совокупность коэфициентов a_0, $a_1, \ldots$ и всего того, что можно рационально построить из них с помощью целых чисел, т. е. область всех рациональных целочисленных функций от a_0, $a_1, \ldots$ Дальше можно область рациональности расширить, присоединяя одну или несколько каких-нибудь определенных величин и строя рациональные целочисленные функции из них и коэфициентов уравнения совокупность этих функций и образует „область“. Говорят, что соответствующие величины *присоединены* к области. Так, например, могут быть присоединены к области рациональности корни n-й степени из единицы или любые другие параметры.

Пользуясь этими понятиями, Галуа высказывает свою основную теорему: для заданного уравнения $f=0$ и заданной области рациональности всегда существует *группа перестановок* корней уравнения x_1, x_2, $\ldots, x_n$, обладающая тем свойством, что всякая „рациональная“ функция $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. всякая функция, рационально построенная из корней и величин области рациональности, которая при перестановках этой группы остается численно постоянной, является „рациональной“ (принадлежит к области рациональности), и обратно: всякая функция $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющая „рациональное“ значение, остается численно неизменной при перестановках этой группы.

Все значение этой теоремы, на доказательство которой я здесь не могу дать и намека, нельзя, конечно, осветить и понять в несколько минут; действительно осознать его может только тот, кто самостоятельно работал над отдельными проблемами этой области. Чтобы не увязнуть в общих словах, я хотел бы по крайней мере указать на один специальный пример, которым особенно много занимался Галуа. Речь идет о нахождении условий, при которых неприводимое уравнение степени p, где p — простое число, разрешимо при помощи цепи двучленных уравнений. Галуа находит, что эти условия заключаются в возможности того, чтобы „группа“ перестановок задавалась соотношениями

$$x_{\nu'} = x_{a\nu+b}, \quad \nu' \equiv a\nu + b \pmod{p}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

где $a = 1, 2, \ldots, (p-1)$ и $b = 0, 1, 2, \ldots, (p-1)$, так что группа содержит максимум $p(p-1)$ перестановок. В случае $a = \mathrm{const} = 1$, когда существуют только p перестановок, говорят о *циклической*

[1] Crelle, т. 4, 1829 (Сочинения, т. 1, стр. 479).

группе, в остальных случаях группу называют *метациклической*. Необходимым и достаточным условием для разрешимости в радикалах неприводимого уравнения, степень которого есть простое число, является таким образом существование метациклической группы, которая, в частном случае, может приводиться к циклической.

Нужно здесь же отметить и границы теории Галуа. Она дает общий критерий для разрешимости уравнений с помощью резольвент и указывает путь к их разысканию. Но сейчас же возникает ряд дальнейших проблем: разыскание всех уравнений, которые при заданной области рациональности обладают определенной, наперед заданной группой; исследование того, сводимы ли два таких уравнения друг к другу и какими средствами, и т. д. Все это — огромная область не решенных в настоящее время проблем, к которым ведет теория Галуа, не давая средств для их разрешения.

При всей их самобытности работы Галуа все же связаны с общим развитием науки. Лагранж, Гаусс и Абель имели на него решающее влияние. Но в то время, как эти его предшественники занимались только решением проблемы в частных случаях, именно тогда, когда возможно ее сведение к функциям деления круга или эллиптическим функциям, Галуа поставил ее во всей всеобщности.

Нужно думать, что Галуа пришел бы на начатом пути к новым достижениям и подарил бы миру еще неизвестные в настоящее время открытия, если бы страстный темперамент не погубил его так рано. О смелости и уверенности в себе, с которыми он подходил к своему творению и еще ожидающим разрешения проблемам, дает нам представление письмо, в котором он в вечер накануне смерти передавал свое научное завещание своему другу Шевалье (Oeuvres, стр. 32). Этот своеобразный документ производит потрясающее впечатление благодаря той скромной ясности, с которой 20-летний автор гордо и достойно оценивает себя и свое значение для науки. Он кончает словами:

„Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr; mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'énoncer des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

„Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

„Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis".

(„Я часто в своей жизни решался утверждать предложения, в которых я не был уверен; но все, что я написал здесь, у меня в голове уже скоро год, и я слишком заинтересован в том, чтобы не ошибаться, чтобы можно было заподозрить меня в высказывании теорем, полным доказательством которых я не обладаю.

„Ты попросишь публично Якоби или Гаусса дать свое заключение не об истинности, а о важности теорем.

„После этого, я надеюсь, найдутся люди, которые извлекут выгоду из расшифровывания этого хаоса".)

Галуа был прав, утверждая, что он не оставил ничего неправильного; к сожалению, не исполнилась только его надежда на признание и распространение его идей со стороны Гаусса и Якоби. Лишь много позже благодаря трудам Лиувилля (1846) его сочинения постепенно стали достоянием науки[1]).

---

[1]) Ср. также L. Koenigsberger, C. G. J. Jacobi, Testschrift, Lpz. 1904, стр. 435.

Глава третья.

Основание журнала Крелля и расцвет чистой математики в Германии.

Развитие новой Германии XIX века, выросшей постепенно из эпохи наполеоновских войн, определялось в своих существенных чертах влияниями, исходившими из Франции и переработанными в соответствии с германским духом. Как в другой области Гёте, так в нашей науке Гаусс стоит в стороне от этой общей характерной для эпохи линии развития. Своим началом это развитие имеет Берлин, причем, как уже было указано раньше, в точных науках оно возникло несколько позже, чем в других областях науки. Для гуманитарных наук исходным пунктом развития является основание в 1810 г. Берлинского университета. Их яркому расцвету содействовало гуманистическое учение о свободном развитии личности, отвлекавшее интересы широкой публики от точных наук.

В области точных наук новые веяния становятся заметными только с 1820 г. в связи главным образом с инициативой Александра фон-Гумбольдта, о котором я уже говорил выше. В тесном общении с этим энергичным и вдохновляющим к работе человеком находился генерал Мюффлинг (von Müffling), занимавший с 1820 г. должность начальника генерального штаба. Продолжая наполеоновскую традицию, он высоко ценил математику с военной точки зрения, которая получила влияние в Пруссии благодаря Шарнгорсту. Независимо от возникших одновременно стремлений к повсеместному подъему промышленности, из которых возникли наши технические специальные и высшие учебные заведения, в этих кругах родилась мысль о создании по образцу Политехнической школы обширного политехнического института чисто научного характера. Была сделана попытка привлечь в качестве директора этого нового учреждения Гаусса, который без всякого обязательства читать лекции (кроме работы со специально избранными учениками, которую он сам пожелал бы вести) мог бы служить этому делу своим научным авторитетом и организационным талантом. Все государственные научные учреждения (например астрономические обсерватории) должны были быть подчинены ему; ему было обеспечено также известное влияние на все развитие дела просвещения в Пруссии (Bruhns, Briefe zwischen A. von Humboldt und Gauss, 1877). Но Гаусс

в конце 1824 г. отклонил это предложение. Тем самым весь широко задуманный план был разбит вдребезги. Военные власти также отстранились от участия в нем. Была сделана попытка свести проект к организации особого института для подготовки учителей старших классов, и в этой форме план разрабатывался министерством просвещения еще несколько лет. Когда, наконец, оказалось, что и приглашение, адресованное Абелю и полученное в Христиании в 1829 г. через несколько дней после его смерти, также осталось без ответа, план был окончательно забыт. Этим объясняется то обстоятельство, что подготовка учителей математиков и естественников выпала в Пруссии на долю университетов, как очень важная и существенная для их развития задача. Современное положение вещей, которое многие любят представлять как вытекающее с логической необходимостью из понятия об университете, возникло, таким образом, в силу случайных обстоятельств.

Рассматривая это развитие, я хотел бы напомнить о человеке, который хотя и не имел значения с точки зрения своего личного творчества, но оказал большие услуги науке благодаря своим многосторонним интересам, восприимчивому характеру и организационным способностям: это Крелль (Crelle, 1780—1855). Крелль первоначально интересовался техникой и принимал живое участие в организации преподавания технических наук. С 1824 г. он начал работать вообще над улучшением постановки научной и педагогической работы в области точных наук и вступил в 1828 г. в прусское министерство просвещения в качестве референта. Он был также избран членом Берлинской академии. Его собственные математические работы, которыми он все время продолжал заниматься, несмотря на различные другие интересы, многочисленны, но не очень важны. Они носят широко распространенный в ту пору в Германии энциклопедический характер и, следуя традиции XVIII века, касаются большого числа различнейших областей и ничего глубоко не затрагивают. Очень велики однако, заслуги, которые Крелль оказал науке своим организационным даром, своей приветливостью и многогранностью, теми личными качествами, которые давали ему возможность повсюду разыскивать и привлекать к себе молодые таланты. Многим он помог предоставлением университетских должностей, открывавших им поле деятельности и свободного развития своих сил. Но больше всего обязана ему наша наука за тот стимулирующий и объединяющий центр, который он дал ей созданием в 1826 г. своего „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ („Журнал чистой и прикладной математики“).

Когда теперь берешь в руки том этого журнала, то его название может вызвать удивление. Это название имеет прежде всего историческое происхождение, будучи заимствовано у французского журнала „Gergonnes Annales des mathématiques pures et appliquées“, так же как позже, потеряв уже свой смысл, это же название перешло к журналу Лиувилля (1836). Несомненно

однако, что Крелль связывал с этим названием серьезное намерение создать журнал, охватывающий всю математику. Как указывает предисловие к первому тому, он имел в виду служить не только росту, но и распространению науки. Поэтому он обращается не только к представителям различных специальностей, но и к „широкому“ кругу читателей, который он путем помещения переводов иностранных сочинений, рецензий о книгах, задач хочет привести в соприкосновение со всеми источниками научной жизни. Так, например, первый том журнала начинается с определения количества воды в потоке через Эйтельвейн, после чего следует первый мемуар Абеля, — соседство, которое может показаться странным современному читателю журнала.

Причины того, что фактическое развитие журнала пошло не по тому пути, какой имел в виду Крелль, лежат в общем духе эпохи. Ново-гуманистическое мировоззрение, легшее в основу научной жизни начала XIX века, изысканнейшим органом которой вскоре должен был стать журнал Крелля, оказалось сильнее, чем более схематический замысел его основателя, бывшего натурой скорее посредствующей, нежели ведущей. Ново-гуманистический идеал науки как самоцели, который таил в себе отрицание всякой полезности в общепринятом смысле этого слова, привел скоро к решительному отказу от всех тенденций, направленных к практическим целям. Это направление отразилось и на журнале, который первоначально был посвящен всем областям науки, и превратило его в орган строжайше выдержанной, чисто специальной математики, что дало повод в шутку называть его „Журналом чистой, неприкладной математики“ [1]).

Крелль, не будучи в состоянии противостоять общему направлению развития, остался тем не менее верен самому себе; но это оказалось возможным для него лишь благодаря внешнему разделению обеих близких ему сфер. С 1829 г. он издает, следуя своим техническим интересам, специальный „Journal für Baukunst“ („Журнал строительного искусства“). О том, как много значил Крелль в этой области, свидетельствует тот факт, что произведенная в 1838—1840 гг. постройка важнейшей железной дороги Берлин-Потсдам была проведена по его планам. Большинство „искусственных дорог“ Пруссии строилось в еще более ранние годы также по его эскизам.

Математический журнал Крелля развился тем временем, несмотря на все первоначальные финансовые затруднения, в важнейший орган прогрессирующей чистой математики, которая в ту пору совершала в своем одностороннем, но блестящем развитии победное шествие по германским университетам.

Первый том содержит не меньше пяти работ Абеля; наряду с ними одну работу Якоби и несколько работ Штейнера (Steiner).

---

[1]) Непереводимая игра слов: „...und angewandte“ („...и прикладной“) и „...unangewandte“ („...неприкладной“). (*Прим. перев.*)

В третьем томе (1828) появляются имена Дирихле, Мебиуса (Möbius) и Плюкера.

Это перечисление заключает имена тех шести исследователей, на которых нам прежде всего следует остановиться. Я начну с трех „аналитиков“: Дирихле, Абеля и Якоби, чтобы затем перейти к трем „геометрам“: Мебиусу, Плюкеру и Штейнеру.

I. Аналитики из журнала Крелля.

Я начну с Дирихле, потому что он теснее других связан с теми исследователями, о которых мы говорили выше,—с Гауссом и французами. Менее революционно настроенный, чем оба его современника Абель и Якоби, он продолжал унаследованную традицию, энергично развивая ее.

Лежен Дирихле (Lejeune Dirichlet, 1805—1859) происходил из французской эмигрантской семьи. Он родился в 1805 г. в семье почтмейстера в Дюрене и, стало быть, воспитывался под впечатлениями рейнской крупной промышленности. С 1822 по 1827 г. он жил в качестве домашнего учителя в Париже, где вращался, как уже было упомянуто, в кругу Фурье. По приглашению Гумбольдта он занял в 1827 г. место доцента в Бреславле. 1829 год привел его в Берлин, где он проработал непрерывно 26 лет, сначала как доцент, затем с 1831 г. как экстраординарный и, наконец, с 1839 г. как ординарный профессор. Со своей профессурой он соединял энергичную преподавательскую работу в военной и строительной академии; такое соединение сфер деятельности было с тех пор нередкими у берлинских доцентов; В 1855 г. Дирихле был приглашен в качестве преемника Гаусса в Геттинген, где ему однако было суждено работать лишь очень короткое время. Он умер в 1859 г. Крупное влияние, которое Дирихле оказал на развитие математики в течение продолжительного периода, было приобретено им не только благодаря своим научным открытиям; точно так же даже его совершенно исключительное влияние на выработку принятого в наших университетах по сию пору типа преподавания не является главной причиной, обеспечившей Дирихле его место в истории математики. То, что прежде всего увековечивает его имя,— это особое, присущее ему искусство воспринимать и излагать математические теории. Он умел, пользуясь только средствами языка, так убедительно излагать вещи, ясно им осознанные, что они как будто совершенно самопроизвольно вытекали из своих оснований. Лучше всех оценил своеобразное искусство этого человека Минковский (Minkowski) в своей речи, посвященной Дирихле и произнесенной по случаю 100-летия Геттингенского университета[1]). Особенно прочувствованно и живо обрисовывает Минковский этого духовно близкого ему мастера. Я хотел бы процитировать его, чтобы живее дать почувствовать манеру

[1]) Minkowski, Werke, т. 2, стр. 447 и сл.

Дирихле: „Он обладал искусством соединять с минимумом слепых формул максимум зрячих мыслей“. Эту тенденцию Минковский называет истинным „принципом Дирихле“.

Так как и у самого Дирихле исследование и преподавание были неотделимы, я хотел бы и здесь говорить совместно об обоих этих направлениях его деятельности.

В первой области, на которой мы здесь остановимся, в *теории чисел*, Дирихле прежде всего принадлежит та крупная заслуга, что он уплатил долг, который современники и потомки его несли до той поры перед великим Гауссом. Дирихле был первым читателем гауссовых *Disquisitiones arithmeticae*, глубоко их понимавшим; он всегда имел это сочинение при себе, постоянно его штудировал и в упрощенном изложении сделал его достоянием широких кругов. Эта книга вдохновила и его самого. Важнейшими среди его собственных работ являются доказательство существования бесконечно большого числа простых чисел во всякой прогрессии, первый член и разность которой числа взаимно простые (1837) (Werke, т. I, стр. 313 и сл.), определение числа классов бинарных квадратичных форм с заданным детерминантом (Crelle, т. 18, стр. 1838 и сл.) и разработка теории алгебраических чисел высших степеней (с 1840 г.). Первые две из названных проблем находятся между собой в тесной связи. Крупным достижением Дирихле, указавшим пути для всего дальнейшего развития теории чисел, явилось применение аналитических функций к арифметическим проблемам; в частности центральное место в его рассуждениях занимают ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ (ныне называемые „рядами Дирихле“). Тот способ, с помощью которого он выделяет из своих рядов именно интересующие его составные части, искусно применяя корни из единицы (теперь мы говорим вместо этого: „характеры mod m“), также является важнейшим открытием и остается образцом для дальнейших исследований. В теории алгебраических чисел Дирихле первый расширил исследование за пределы квадратичных иррациональностей и алгебраических чисел, получающихся при делении круга, поставив во главу угла понятие о величинах, определяемых целочисленным уравнением

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + p = 0$$

(по Дедекинду — „целых алгебраических числах“), и поставив вопрос о тех единицах, которые лежат в определяемом этим уравнением „поле“ (как теперь называют эту область). „Единица“ есть целое алгебраическое число, удовлетворяющее уравнению

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots \pm 1 = 0.$$

Дирихле удалось очень просто определить число независимых единиц в поле. Особой чертой этих работ Дирихле является

впервые примененный им метод проведения доказательств существования при полном отказе от прямого построения величины, о которой идет речь, или даже от указания метода для такого построения.

Вторая область, — *основы анализа*, была обогащена Дирихле особенно в его лекциях по теории рядов и определенных интегралов. Здесь впервые дается точная формулировка понятия об условной сходимости ряда и с почти ощутимой ясностью показывается на ряде примеров, что условно сходящийся ряд путем перегруппировки его членов можно заставить стремиться к любому значению. К этому примыкают критические исследования поколебленного понятия о „сумме". Сходимость тригонометрических рядов была после этого поставлена им на более прочные основания, нежели это имело место у Фурье. Он резко определил и точно отграничил понятие о кусочно непрерывной и монотонной функции и дал строгое доказательство возможности ее изображения при помощи тригонометрического ряда.

В-третьих, Дирихле занимался также *механикой* и *математической физикой*, но в гораздо более абстрактном, математическом смысле, чем Гаусс или Фурье. Ему принадлежит теорема о том, что устойчивое равновесие системы точек имеет место тогда, когда потенциальная энергия системы достигает действительного минимума. Теорема эта истолкована в чисто физических понятиях и изложена очень убедительно, без приведения неизбежно сложных, выражаемых формулами критериев, которые обусловливают существование такого минимума. Дирихле очень часто читал лекции о силах, которые действуют обратно пропорционально квадрату расстояния или, как мы теперь выражаемся, о *теории потенциала*. Здесь он рассматривает основную краевую задачу, которую во Франции еще в настоящее время называют „задачей Дирихле", хотя она была поставлена и рассматривалась еще Фурье и многими другими. То новое, что Дирихле внес сюда, — это доказательство однозначности ее решения и то, что он исходит из некоторого определенного потенциала, характеризуемого несколькими основными свойствами. Здесь же изложен и так называемый *принцип Дирихле*, т. е. метод, дающий возможность заключать о существовании искомого решения v на основании того обстоятельства, что среди всех функций v, принимающих на границе заданные граничные значения, искомое решение обращает в минимум интеграл

$$\int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]dk.$$

В недостаточно уточненной форме этот метод применялся еще Гауссом, Вильямом Томсоном и другими; затем, подвергшись критике Вейерштрасса, он потерял всякое доверие, и только Гильбертом был снова поставлен на твердую почву[1]).

[1]) См. по этому поводу Enzykl. II A 7 b, § 23—25 и II C 3, § 45.

Хотя Дирихле не создал школы в узком смысле этого слова, однако его лекции имели огромное влияние на большое число выдающихся математиков более позднего времени, в том числе на Эйзенштейна, Кронекера, Дедекинда (Dedekind) и прежде всего на Римана. Их дальнейшее влияние было тем более глубоким и обширным, что они были изданы благодарными учениками. Именно:

Zahlentheorie („Теория чисел")—Дедекиндом.

Лекции по анализу под названием *Bestimmte Integrale* („Определенные интегралы")—Г. Ф. Мейером (Meyer, 1871); эти лекции были снова изданы (причем издатель придерживался ближе к Дирихле) Г. Арендтом (Arendt) (Braunschweig 1904).

Über Kräfte, die im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirken („О силах, действующих в обратном отношении квадратов расстояния")—в 1876 г. Грубе (Grube).

Идеи Дирихле относительно диференциальных уравнений в частных производных и относительно электричества и магнетизма сохранили свое живое влияние в лекциях Римана, изданных Гаттендорфом (Hattendorf).

Еще и в настоящее время лекции Дирихле, соответственно дополненные, являются основным материалом преподавания для наших профессоров, обращающихся к более подготовленным слушателям. Я хотел бы здесь упомянуть только об одном важном обстоятельстве, составляющем существенное отличие преподавательской деятельности Дирихле от современной. Дирихле всегда читал для избранного круга слушателей, а не для большого числа кандидатов на учительские должности, для которых этот материал является выходящим далеко за пределы предъявляемых к ним требований. Для них существовали особые курсы, которые в Геттингене вели Штерн и Ульрих. В течение всей своей долгой преподавательской деятельности Дирихле ни разу не входил в экзаменационные комиссии и никогда не принимал участия в руководстве тамошним математическим семинаром. Последующее развитие математического преподавания, последствия которого мы видим и ощущаем по сей день, было обусловлено только мощным влиянием Якоби, который сломил существовавшую ранее преграду между учителем и исследователем, о чем мы будем еще подробнее говорить в дальнейшем.

В отличие от очень активного и энергичного Якоби, с которым его связывала многолетняя студенческая дружба, Дирихле вообще был натурой более созерцательной, сдержанной, даже робкой. Его единственной целью, к которой он стремился всем своим существом, было ясное проникновение в идеальные взаимозависимости математического мышления; эта цель заставляла его совершенно отказываться от внешнего действия и успехов. Как это часто выпадает на долю замкнутых в себе людей, ищущих и находящих удовлетворение в своей внутренней интеллектуальной жизни, судьба поставила его в окру-

жение людей активных, тесно связанных с внешним миром. Дирихле был связан благодаря своей женитьбе на сестре Феликса Мендельсона, Ревекке, с богатым и блестящим семейством Мендельсонов. Как и в Берлине — тогдашнем Берлине, — где этот дом был одним из самых блестящих центров всякого рода светского общения, так и в короткий период геттингенской жизни его жена сумела объединить вокруг себя оживленное общество, в которое входило все научно или художественно интересное. Рассказывают, что на всех этих приемах в своем доме Дирихле держался очень сдержанно и скромно. Непрерывная мелкая зыбь окружавшего его блестящего интеллектуального мира, вероятно, не совсем соответствовала глубоким океанским пучинам его духа. Одна близкая его знакомая подтвердила это мнение на нашем празднике в 1905 г., прибавив, что ей чрезвычайно приятна та оценка Дирихле, которую он, наконец, получил как личность; в своей собственной семье он всегда ценился как-то мимоходом. Таким образом и здесь не удалось то, в чем, повидимому, вообще отказано немецкому обществу: создание единого культурного объединения, которое включало бы в себя и людей точной науки как своеобразную и неотъемлемую составную часть.

Мы переходим в совершенно иной мир, когда обращаемся к современнику Дирихле и его товарищу по специальности Нильсу Генриху Абелю (Niels Henrik Abel).

В лице Абеля мы встречаемся с великим, самобытным гением нашей науки, который так же, как и Галуа, всецело посвятил себя проблемам чистейшей, абстрактнейшей математики самого общего обхвата. Быть может, только краткость его жизни, как и жизни великого француза, помешала им обоим развить свой талант еще и в других направлениях.

Абель, который происходил из очень бедной семьи, — он родился 5 августа 1802 г. в семье пастора в маленьком норвежском местечке Фингё (Finhö), — по натуре был робок, придавлен нуждой и внешними неудачами. Его основным настроением, в котором возможно приняла участие рано начавшаяся душевная болезнь, было настроение глубокой меланхолии, из которой его могло вывести только оживленное общение с его норвежскими друзьями и прежде всего постоянно пробивавшееся воодушевление собственной научной работой.

О всех подробностях жизни и характера Абеля мы осведомлены довольно хорошо благодаря „Мемориалу“, опубликованному норвежским правительством в 1902 г. по случаю празднования столетнего юбилея Абеля, на которое прибыли математики всех стран. Он является желанным дополнением к лучшему в настоящее время изданию сочинений Абеля, которое было выпущено Силовым и Ли (Lie) в 1881 г. в двух томах[1]).

---

[1]) N. H. Abel, Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance, Kristiania 1902. См. далее биографии: C. A. Bjerknes, N. H. Abel, Tableau

Абель был совершенным самоучкой. Советы нескольких друзей математиков и небольшое число доступных ему книг были его единственной опорой в тех занятиях, которые он начал по собственному влечению в 1822 г., когда он еще посещал университет в Христиании, в ту пору еще не знавший никаких математических курсов. В 1823 г., как это ни странно, „studiosus Abel“ привлек к себе довольно широкий благожелательный интерес и удивление своим ошибочным исследованием. Именно, он думал, что нашел решение уравнения пятой степени в радикалах. Очень скоро он понял свою ошибку и затем, идя по найденному пути, ясно увидел, что такое решение невозможно; эту теорему он опубликовал в 1824 г. в виде отдельной брошюры (Собрание сочинений, т. 1, стр. 28—33).

Этот успех и небольшое сочинение об интегрировании алгебраических выражений, — которое в оригинальном изложении утеряно, — создали счастливый поворот в судьбе Абеля, совершенно лишенного средств: ему была предоставлена стипендия для образовательной поездки за границу. Эта поездка имела для Абеля решающее значение: здесь возникли его основные идеи или лучше сказать благодаря соприкосновению с открывшимся для него математическим обществом Абель был вынужден придать им законченную форму, чтобы распространить их; так пересыщенный раствор сразу кристаллизуется благодаря самому незначительному внешнему сотрясению.

Он поехал сначала в Берлин, где жил с сентября 1825 г. по февраль 1826 г. Чрезвычайно важно было то, что он сейчас же по приезде познакомился с Креллем, который, будучи сам уже в зрелых годах (ему было 45 лет), в первой же беседе распознал, несмотря на трудность общения из-за отсутствия общего языка, в неопытном молодом человеке крупный гений и привлек его в качестве сотрудника в задуманный журнал. И в дальнейшем Крелль оставался верным и заботливым другом Абеля; в его доме последний, так жестоко обделенный судьбой, нашел дружеский прием и ободряющую речь, в которой так нуждалась его робкая трепетная натура. Абель со своей стороны отнесся с большим доверием к оказанному ему расположению. С истинным воодушевлением принял он предложению Крелля, так что первый том журнала сразу принес шесть принадлежащих ему статей и заметок; все они написаны или почти закончены за короткое время первого его пребывания в Берлине. Все существо Абеля расцвело; в его обычно столь мрачной жизни эти несколько месяцев были временем чистого блаженства.

---

de la vie et de son action scientifique, Paris 1885, и Ch. Lucas de Pesloüan, N. H. Abel, Sa vie et son oeuvre, Paris 1906. Нужно также отметить, что в первом издании собраня сочинений Абеля, подготовленном Гольмбе (Holmboe) (Христиания 1839), имеются отрывки, не включенные во второе издание Силовым и Ли.

Из возникших в этот период трудов я прежде всего назову работу о *невозможности решения уравнения пятой степени в радикалах*, которая до настоящего дня сохраняет свое классическое значение. В этом исследовании предполагается, что на коэфициенты уравнения можно смотреть как на совершенно свободные переменные величины; здесь, стало быть, нет еще того общего понятия об определенным образом заданной области рациональности, которым располагал Галуа. (Это понятие однако встречается у Абеля в более поздних заметках.) Наоборот, избранный им путь заключается в том, что составляются наиболее общие выражения, содержащие радикалы, и приводится доказательство того, что они ни в коем случае не могут удовлетворять уравнению пятой степени общего типа.

За этой работой следует на равных правах исследование о *биномиальных рядах*, являющееся важнейшим вкладом Абеля в строгое обоснование анализа. Часто изучавшейся проблеме он дает новую постановку, формулируя вопрос так: какую функцию изображает ряд

$$1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots,$$

если он сходится? Эту работу нужно рассматривать как чистый результат пребывания в Берлине, где Абель мог познакомиться в библиотеке Крелля с *Cours d'analyse* Коши. Во всяком случае он заметил пробел в изложении Коши, о котором мы говорили выше (стр. 118), потому что в этой работе он совершенно восполнил его, противопоставив неправильному положению Коши утверждение, которое мы теперь еще называем *теоремой Абеля о непрерывности*: если степенной ряд сходится в некоторой точке внутри круга сходимости, то он *равномерно* сходится на всем радиусе, соответствующем этой точке, так что функция, изображаемая внутри круга сходимости степенным рядом, при радиальном приближении к заданной точке имеет предел, равный сумме ряда.

В феврале 1826 г. Абель присоединился к нескольким своим норвежским друзьям, отправлявшимся в Италию. Он провел с ними несколько месяцев в Венеции, чтобы в июле переехать в Париж, где он оставался до конца года.

Жизнь в Париже оказалась для Абеля гораздо менее счастливой, чем его берлинское время. В Париже, гордом своей долгой славной традицией, он оставался в совершенном одиночестве и очень страдал от этих условий. С академическими кругами, в частности с Коши, никакое сближение не было возможно, хотя Абель передал 30 октября академии свой большой *Mémoire sur une classe très étendue de fonctions transcendentes* („Мемуар об одном очень обширном классе трансцендентных функций"), который содержит „теорему Абеля". Рукопись была передана на рассмотрение Коши, в бумагах которого она была сначала затеряна. При высылке Коши в 1830 г. она была передана на хранение Жергонну, но напечатана только в 1841 г.

по настоятельному требованию норвежского правительства в 7 томе „Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences", причем оригинальная рукопись окончательно пропала. Хотя благодаря этому эта важная работа была спасена от полной гибели, однако столь позднее посмертное удовлетворение не в состоянии загладить тех огорчений и болезней, которые должен был пережить Абель в Париже из-за этого несправедливого обращения и многих горьких неудач [1]).

К огорчениям из-за этих печальных разочарований присоединились еще другие гнетущие заботы, главным образом денежного характера, которые к концу 1826 г. все более и более омрачали дух Абеля. Даже многочисленные знаки дружбы со стороны его соотечественников в Париже — в эту пору возник известный портрет Абеля, акварель, написанная одним из его друзей — лишь на короткий срок могли прояснить его настроение. Однако, несмотря на тяжелую депрессию и полное отсутствие личной помощи, Париж был очень полезен для научного развития Абеля, как мы это вскоре увидим подробнее.

Я хотел бы теперь остановиться несколько подробнее на важнейшем месте в *Mémoire* — на *теореме Абеля*, поскольку это позволяют рамки нашего изложения.

Теорема Абеля представляет собой очень широкое обобщение теоремы сложения эллиптических интегралов. Эйлер показал, что конечная сумма таких интегралов, которые вообще имеют вид

$$\int R\left(x, \sqrt{f_4(x)}\right) dx,$$

где $f_4(x)$, многочлен четвертой, иногда третьей степени, сводится к одному интегралу такого же типа, если не считать алгебраических или логарифмических функций от величин, стоящих под знаком интеграла:

$$\int_0^a R\left(x, \sqrt{f_4(x)}\right) dx + \int_0^b + \ldots + \int_0^h R\left(x, \sqrt{f_4(x)}\right) dx =$$

$$= \int_0^N R\left(x, \sqrt{f_4(x)}\right) dx +$$

$$+ R_1\left(a, \sqrt{f_4(a)};\ b, \sqrt{f_4(b)}; \ldots;\ h, \sqrt{f_4(h)};\ N, \sqrt{f_4(N)}\right) +$$

$$+ \sum \mathrm{const} \cdot \ln R_2\left(a, \sqrt{f_4(a)};\ b, \sqrt{f_4(b)}; \ldots;\ h, \sqrt{f_4(h)};\ N, \sqrt{f_4(N)}\right).$$

Нечто аналогичное имеет место для общих гиперэллиптических или соответственно „абелевых" интегралов $\int R(x, y)\, dx$, где

[1]) После его смерти ему была присуждена в 1830 г. большая премия Парижской академии. Подробнее о судьбе работ Абеля см. у Кенигсбергера: L. Koenigsberger, Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829, Leipzig 1879, стр. 30 и сл.

вместо равенства $y^2 = f_4(x)$ величины y и x связаны произвольным алгебраическим уравнением $F(x, y) = 0$. Хотя сумма таких интегралов и не может быть выражена *одним* интегралом того же типа (даже если отвлечься от алгебраических и логарифмических функций), тем не менее она может быть представлена определенным числом p таких интегралов, причем число p зависит только от природы алгебраического соотношения $F(x, y) = 0$. Это p, определение которого в отдельных случаях стоило Абелю немалого труда, то́ же, какое Клебш позже назвал *родом* (*Geschlecht*) уравнения $F(x, y) = 0$ [1]. В этом и заключается теорема Абеля. В случае гиперэллиптических интегралов низшей степени имеем $F = y^2 - f_6(x)$ (где f_6 в отдельных случаях может быть замещено полиномом f_5), причем $p = 2$. Таким образом

$$\int_0^a R\left(x, \sqrt{f_6(x)}\right) dx + \int_0^b + \ldots + \int_0^h R\left(x, \sqrt{f_6(x)}\right) dx =$$

$$= \int_0^A R\left(x, \sqrt{f_6(x)}\right) dx + \int_0^B R\left(x, \sqrt{f_6(x)}\right) dx +$$

$$+ R_1\left(a, \sqrt{f_6(a)};\ \ldots;\ h, \sqrt{f_6(h)};\ A, \sqrt{f_6(A)};\ B, \sqrt{f_6(B)}\right) +$$

$$+ \sum \mathrm{const} \cdot \ln R_2\left(a, \sqrt{f_6(a)};\ldots; h, \sqrt{f_6(h)};\ A, \sqrt{f_6(A)};\ B, \sqrt{f_6(B)}\right).$$

То стимулирующее влияние, которым Абель, несмотря на все труды и заботы, все же обязан Парижу, лежало прежде всего в стремлениях, которые сообщило ему более близкое знакомство с французскими математиками его эпохи. Сопоставляя свои идеи с методами Коши и Лежандра, он познал цену своих собственных методов и получил стимул снова вернуться к старым идеям. Пример Коши побуждал его к бесстрашному обращению с комплексными величинами. В трудах Лежандра он имел перед глазами образец неутомимой работы над теорией эллиптических интегралов. В 1811—1819 гг. вышла в первый раз книга Лежандра *Exercices de calcul intégral* („Упражнения по интегральному исчислению"), содержащая теорию эллиптических интегралов, а во время пребывания Абеля в Париже автор подготовлял ее второе издание, вышедшее в свет в 1827—1832 гг. под названием *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* („Курс эллиптических функций и эйлеровых интегралов").

Под влиянием этих стимулов Абель начал разрабатывать в Париже для *Annales* Жергонна те идеи об *обращении эллиптических интегралов первого рода*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}},$$

[1]) Обозначение p введено Риманом.

которые он давно носил в себе. В декабре 1826 г. он письменно сообщил Креллю и Жергонну о делении лемнискаты и о комплексных числах. Из этих материалов возникли в следующие годы его *Recherches sur les fonctions elliptiques* („Исследования об эллиптических функциях“), которые, несмотря на первоначальный отказ, в конце концов появились в журнале Крелля, первая часть во втором томе (20 сентября 1827 г.), а вторая— в третьем (26 мая 1828 г.). Так как Гаусс не опубликовывал своих результатов, то это первая крупная публикация фундаментального значения, с которой начинается теория эллиптических функций в отличие от теории эллиптических интегралов Лежандра.

Абель пишет интеграл первого рода в виде

$$\alpha = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

чтобы лучше выявить двойную периодичность. Он задается мыслью обратить этот интеграл и рассмотреть функцию $x=\varphi(\alpha)$. Исходя из двойной периодичности, он приходит к умножению и делению эллиптических функций (алгебраическое решение уравнений деления) и, наконец, с помощью предельного перехода— к изображению функции $\varphi(\alpha)$ как частного двух бесконечных двойных произведений.

Путь, которому следует Абель, лежит целиком в направлении, избранном Гауссом: совпадения в работах обоих математиков встречаются даже в обозначениях. Тем больше следует удивляться тому, что Абель уклонился от посещения Гаусса, который несомненно принял бы самое теплое участие в столь близких ему устремлениях. Наслышавшись, очевидно, от Лежандра и других преувеличенных рассказов о замкнутости Гаусса, Абель на обратном пути из Парижа в Берлин в начале 1827 г. не посетил Гаусса в Геттингене, что можно объяснить лишь его робким характером.

Несмотря на большие научные успехи, подавленное настроение не оставляло Абеля и по его возвращении в Берлин. Здесь у него впервые началась тяжелая болезнь. Но по возвращении в Христианию в мае 1827 г. его ждало самое худшее время. Во всех своих надеждах на какое-нибудь место ему суждено было разочароваться. Теперь, как и раньше, он должен был жить, как „Studiosus Abel“, бедный, по его словам, как церковная мышь. Некоторое короткое облегчение его положения принесла ему в 1828 г. должность заместителя в университете. Вскоре после этого им овладела жестокая болезнь, от которой он уже не оправился. Он умер 6 апреля 1829 г. за несколько дней до прибытия счастливой вести о приглашении в Берлин.

Рассматривая эти подавляющие трагические обстоятельства, приходится только удивляться этому человеку; и приходится испытывать величайшее изумление перед гением Абеля, кото-

рому все же удалось в эти годы закончить свои *Recherches* и привести следующие за ними работы к такому состоянию, в котором он, как будто играя, преодолевал величайшие трудности общей постановки вопроса.

В последних сверхчеловеческих усилиях Абеля, которые сыграли свою роль в ускорении его конца, имел влияние и мощный внешний импульс: появление Якоби. Здесь повторяется та своеобразная картина, с которой мы встречаемся в неевклидовой геометрии: после того как новые идеи годами мирно покоились в бумагах Гаусса, они внезапно возникли в двух молодых гениальных головах, которые в яростном соревновании оспаривали славу их творения.

Примыкая к Лежандру, но далеко выходя за достигнутые им пределы, Якоби в сентябре 1827 г. опубликовывает в журнале Шумахера „Astronomischen Nachrichten" первую общую теорему, где он дает рациональные преобразования эллиптического интеграла для любой степени преобразования. Еще в ноябре этого же года следует доказательство, в котором он также пользуется идеей обращения и двойной периодичностью.

Следующий, 1828, год является временем ожесточеннейшей конкуренции между Абелем и Якоби в построении теории эллиптических функций. Именно благодаря тождественности разрабатываемой проблемы в этом соревновании особенно резко выступает основное различие характеров обоих участников. Абель с величайшей гениальностью овладевает самыми общими проблемами; математическая идея становится у него активно действующим элементом и притом действующим совершенно абстрактно, без помощи геометрической интуиции. Якоби, напротив, хотя в отдельных этапах и отдается руководству прозорливой силы своего дарования, но сейчас же создает завоеванному крепкую основу с помощью своего виртуозно применяемого блестящего вычислительного искусства. В то время как Якоби с неутомимой энергией следует по пути, который указывается ему его остроумием и ведет его к цели, преодолевая все препятствия, дух Абеля владеет силой, позволяющей ему подниматься ввысь и в полете, как будто не требующем труда, заглядывая далеко вперед, приближаться к все более общим целям.

Я, к сожалению, не могу здесь входить в детали этого соревнования, имеющего исключительный интерес для каждого математика. Я укажу на изложение Силова в „Мемориале", посвященном Абелю (1902 г.), и Кенигсбергера в сборнике, изданном по поводу празднования 100-летия со дня рождения Якоби[1]). Здесь приходится ограничиться лишь выявлением нескольких важнейших пунктов.

---

[1]) N. H. Abel, Mémorial... Kristiania, 1902. L. Koenigsberger, C. G. J. Jacobi, Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, Lpz. 1904. См. также S. Koenigsberger, Zur Geschichte der elliptischen Transzendenten in den Jahren 1826—1829, Leipzig 1879.

Со стороны Абеля мы имеем прежде всего работу о самой общей постановке теории преобразований, напечатанную в мае 1828 г. в „Astronomischen Nachrichten“[1]). Абель подходит здесь и к комплексному умножению, на которое он однако делает только намеки. Эта работа вызвала у Якоби величайшее удивление. Он пишет Лежандру, что она „au dessus de ses éloges“ („выше его похвал“), как равным образом и „au dessus de ses forces“ („выше его сил“). За ней последовало начало систематического изложения теории Абеля в его *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* („Введение в теорию эллиптических функций“), но только первая крупная часть этого сочинения была напечатана в журнале Крелля (Crelle, т. 4, 1829).

Якоби заполняет третий и четвертый тома журнала Крелля своими высоко интересными *Notices sur la théorie des fonctions elliptiques* („Заметки о теории эллиптических функций“), появившимися без доказательств, и опубликовывает в Кенигсберге в 1829 г. в виде самостоятельной книги свои *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* („Новые основания теории эллиптических функций“)[2]).

Сравнивая результаты сочинений обоих мастеров и их соратника Гаусса, работы которого были им неизвестны, мы видим, что особая заслуга Якоби, во всяком случае в его позднейших работах, лежит в выделении самостоятельной трансцендентной функции ϑ и оперировании с тета-соотношениями, — вещи, которыми владел несомненно и Гаусс. Абель превзошел их обоих в переходе к интегралам произвольных алгебраических функций, ключ к которому дала ему его теорема. Наконец Гаусс остался победителем в одном пункте: он один владел теорией модулярных функций.

Со смертью Абеля обрывается это своеобразное развитие, вряд ли имеющее подобное себе в истории математики. Переживший Абеля Якоби продолжал работу один, но в постоянном воспоминании об исследователе, которого он высоко ценил, хотя вообще не был склонен к признанию чужих работ. В признание достижений Абеля он подчеркивает выражения „абелевы трансцендентные“, „абелева теорема“.

На этом мы должны закончить рассмотрение достижений Абеля; к сожалению, я должен отказаться от ознакомления с дальнейшими его работами, относящимися к решению алгебраических уравнений; литературное наследие Абеля содержит многое, что непосредственно ведет к Галуа.

Я не хотел бы расстаться с этим идеальным типом исследователя, подобных которому лишь очень редко являет нам история науки, не остановившись на одном образе из совершенно другой области; образ этот кажется мне родственным ему, несмотря на различие сфер их деятельности. Абель разделял судьбу многих

---

[1]) Собрание сочинений, т. 1, № 29.

[2]) Jacobi's Werke, т. 1, Verl. der Berl. Akad. Wiss., 1881.

математиков, совершенно лишенных музыкального дарования; тем не менее мне кажется, что будет правильно, если его тип творчества и его личность я сравню с Моцартом. Этому одаренному математику следовало бы поэтому поставить такой же памятник, какой поставлен Моцарту в Вене: Моцарт, сам скромный и незаметный, настороженно стоит там, окруженный прекрасными гениями, которые, как бы играя, приносят ему свои дары из другого мира.

В связи с этим я не могу отказаться от воспоминания о совершенно иначе задуманном памятнике, воздвигнутом в Християнии и тяжело разочаровывающем всякого, кто знает характер Абеля. На высоко поднимающейся крутой гранитной глыбе молодой атлет байроновского типа шагает ввысь, переступая через двух отвратительных чудовищ. Если героя можно еще рассматривать как символ человеческого духа, то напрасно было бы искать более глубокий смысл в этих чудовищах. Символизуют ли они побежденные уравнения пятой степени или эллиптические функции? Или горести и заботы повседневной жизни? Цоколь памятника несет надпись громадными буквами: „ABEL“.

Теперь мы должны обратиться к индивидуальности совершенно иного типа, к великому сопернику Абеля—Якоби. Менее глубокий и самобытный, но гораздо более разносторонне развитой, Якоби обладал не только стремлением к чисто научному познанию, но и настоятельной потребностью сделать познанное им действенным при помощи изложения и передачи этого другим. Это стремление воздействовать на других людей проявилось, с одной стороны, в блестящем педагогическом даровании, с другой стороны, в почти безоглядной воле к утверждению своей индивидуальности. Острота и подвижность его блестящего дарования, точнее — его знаменитая и внушавшая страх саркастическая острота, давали ему в бесчисленных боях, которые должна была выдержать такая мощно активная натура, опасное оружие, в применении которого он не всегда бывал достаточно разборчив.

Как по внутренней природе, так и по внешним обстоятельствам жизни между Абелем и Якоби существует самое большое различие, какое только можно себе представить.

Карл Густав Якоб Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi) родился 10 декабря 1804 г. в семье Потсдамского банкира. Он рос в очень благоприятных условиях, в состоятельной семье с разносторонними интересами, в соприкосновении со всеми возможностями образования того времени. Закончив рано и блестяще свои школьные годы, Якоби поступил студентом в Берлинский университет. Здесь однако он слушал лишь очень небольшое количество математических лекций и гораздо больше самостоятельно занимался своей наукой, особенно углубившись в труды Эйлера. Наряду с этим он получил очень широкое и вместе с тем глубокое образование в различнейших других областях

науки. В частности он следовал определившемуся еще в ранней юности влечению к классическим языкам и в течение некоторого времени участвовал как активный сотрудник в семинаре по классической филологии, который тогда под руководством Бека (Böckh) расцвел особенно ярко. Испытанные здесь влияния надолго сохранили свое значение для Якоби. Свойственный этим кругам идеал чисто научной высокой культуры, система преподавания, которая здесь была выработана, имели предопределяющее влияние на всю его дальнейшую педагогическую деятельность.

Осенью 1825 г. он стал доктором, одновременно защитив диссертацию. Уже к Пасхе 1826 г. он прибыл в Кенигсберг, где, так же как Дирихле в Берлине, он развил в течение 17 лет оживленную работу последовательно в качестве доцента, экстраординарного (1827) и ординарного (1831) профессора. Как характерную для поведения Якоби черту отметим, что его включение в кенигсбергский факультет натолкнулось на известные затруднения, „потому что он каждому из членов сказал что-нибудь неприятное“. В конце концов все же победило неоспоримое значение его научных трудов. Чрезвычайно разносторонняя и энергичная деятельность, которой отдался Якоби в Кенигсберге, исчерпала в 1843 г. его силы. Он был вынужден в течение полутора лет отдыхать в Италии, а затем принял приглашение в Берлин, где ему была предложена чисто академическая должность без всяких твердых преподавательских обязанностей. Несмотря на спокойную жизнь, в которую, впрочем, вторгались внешние заботы, так как Якоби в 40-х годах потерял все свое состояние, былая работоспособность никогда больше не возвращалась к нему. Политические обстоятельства, увлекшие ученого, сначала бывшего на хорошем счету у короля, в сторону революции или во всяком случае сделавшие его подозрительным для двора, также омрачили последние годы Якоби, когда он уже начал болеть. Он умер 18 февраля 1851 г. в Блаттерне.

Я хотел бы процитировать несколько очень характерных для личности Якоби строк из письма, которое написала Ревекка Дирихле по случаю смерти Якоби: „Его отношение к Дирихле было даже слишком хорошо; они могли часами сидеть вместе, — я называла это молчать математически, — и они совсем не щадили друг друга; Дирихле часто говорил ему самые горькие истины, а Якоби так хорошо понимал это и умел смирять свой великий дух перед великим характером Дирихле“...

В соответствии с разносторонностью своей натуры Якоби вряд ли оставил незатронутой хоть одну область в математике. Не одни только эллиптические функции и связанные с ними дальнейшие проблемы получили в трудах Якоби интенсивное развитие, хотя относящиеся к этой области творения Якоби являются самыми оригинальными его достижениями. Он занимался и вопросами прикладной математики, примыкая здесь,

как и в своих чисто математических работах, во многом к Гауссу; в кенигсбергский период его побуждало к этому общение с Бесселем по астрономическим вопросам. В это время возникли его обширнейшие работы, которые, следуя Гамильтону, он посвятил *механике, диференциальным уравнениям в частных производных первого порядка* и *вариационному исчислению*; эти работы доведены до численных выкладок включительно. На этих результатах Якоби мы остановимся подробнее только в одной из следующих глав. В данной же связи нас интересует только его творчество в области чистой математики, в частности теория трансцендентных функций, которая в следующие десятилетия являлась центром развития науки.

После появления *Fundamenta* в 1829 г. самым крупным успехом Якоби было то, что ему удалось начать обработку эллиптических функций, исходя из тэта-рядов и характеризующих их тождеств. Этому пути он следовал, между прочим, в своем десятичасовом докладе в 1837/38 г., который был обработан Борхардтом и напечатан в собрании сочинений Якоби (Werke, т. 1, стр. 479 и сл.). Буквой ϑ, ставшей со времени Якоби общепринятой (название „функции Якоби" в Германии не утвердилось), обозначают функции типа

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{a\nu^2+2b\nu}, \text{ где (в наших прежних обозначениях) } a=\frac{\pi i\omega_1}{\omega_2},\quad b=\frac{\pi i u}{\omega_2}.$$

От такого изображения эллиптических функций Якоби переходит к „абелевым функциям". Сначала однако в поисках этих новых трансцендентных ему суждено было попасть на ложный путь. Естественно было по образцу эллиптических интегралов применить идею инверсии и к гиперэллиптическим интегралам. В самом простом случае $p=2$ обращение „повсюду конечных" интегралов

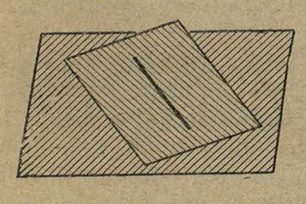
$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_1 \quad \text{и} \quad \int^x \frac{x\,dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_2$$

приводит к четырехкратно периодическим функциям $x(u_1)$ и $x(u_2)$, поведение которых представляется загадочным. Якоби показал, что из четырех периодов можно составить бесконечно малое приращение аргумента, являющееся также периодом, так что функции $x(u_1)$ и $x(u_2)$ в каждой точке принимают любое произвольно заданное значение. Он заключил из этого, что эти функции являются „немыслимыми" и что на этом пути невозможно никакое проникновение в теорию.

Эти соотношения были разъяснены только Риманом; для этого нужно было ввести еще незнакомое Якоби понятие о многолистных поверхностях. Функции $x(u_1)$ и $x(u_2)$ являются отлично „мыслимыми" аналитическими функциями, но только бесконечно многозначными. Их риманова поверхность создается все повторяющимся отображением на плоскость фигуры двух параллело-

грамов, соприкасающихся по сечению разветвления (черт. 4). Каждому значению u соответствует бесконечное количество значений x, которые подходят как угодно близко к любому заданному числу; но все значения x, почти равные между собой и соответствующие одному и тому же u, принадлежат различным листам поверхности.

Хотя Якоби и был далек от того, чтобы заметить эти соотношения, он все же нашел действительно гениальное преодоление этой трудности. Руководясь абелевой теоремой, он составляет две суммы двух повсюду конечных интегралов:



Черт. 4.

$$\int^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}}+\int^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}}=u_1,$$

$$\int^{x_1}\frac{x\,dx}{\sqrt{f_6(x)}}+\int^{x_2}\frac{x\,dx}{\sqrt{f_6(x)}}=u_2$$

и утверждает, что симметрические функции верхних пределов x_1+x_2 и $x_1\cdot x_2$ являются четырехкратно-периодическими функциями в известном в то время смысле, т. е. однозначными функциями от двух переменных u_1 и u_2. Их называют „абелевыми функциями“ и для этого случая.

Эта удивительная постановка вопроса, ведущая к очень интересным результатам, изложена в журнале Крелля (т. 13, 1834—1835): *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur* („О четырехкратно периодических функциях двух переменных, к которым приводит теория трансцендентных Абеля“) и еще раньше в девятом томе этого же журнала (1832): *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis* („Общие соображения об абелевых трансцендентных“). Заключенное в этом сочинении прозорливое достижение тем более велико, что Якоби имел еще очень недостаточные представления о поведении функций хотя бы одной переменной в комплексной области. Но его смелые предположения этим не ограничиваются. Он делает значительный шаг дальше, а именно предполагает, что эти новые функции должны изображаться *кратными тэта-рядами*

$$\vartheta=\sum_{\nu_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu_2=-\infty}^{\infty}c^{a_{11}\nu_1^2+2a_{12}\nu_1\nu_2+a_{22}\nu_2^2+2\nu_1v_1+2\nu_2v_2},$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} — комбинации периодов, а v_1 и v_2 — линейные комбинации величин u_1 и u_2. Задача была поставлена Парижской академией как задача на премию и решена в 1846 г. в премированной работе Розенгайна (Rosenhain), напечатанной в 1851 г. в т. XI мемуаров „Savants étrangers“. В то время как здесь цель достигается по существу алгорифмически путем вычислений

с тэта-функциями, в работе Гепеля (Göpel), появившейся в 1847 г. у Крелля (т. 35), мы имеем более абстрактное решение задачи путем логически наглядных рассуждений.

При таком стремительном продвижении вперед научного развития не приходится удивляться тому, что в деталях многое еще оставалось несовершенным. Существенным пробелом теории у Абеля, как и у Якоби, является то, что у них совершенно нет не только доказательства однозначности функций, получаемых при обращении хотя бы в эллиптическом случае, но и потребности в таком доказательстве. Незнакомство с этой стороной проблемы привело, как мы видели, Якоби к ошибкам в случае гиперэллиптического интеграла.

Далее в обоих изложениях теории отсутствует весь большой комплекс модулярных функций. Но без точного знакомства с их поведением, без знания модулярной фигуры (которым, как известно, обладал Гаусс) нельзя построить законченную теорию эллиптических функций. В изложении Якоби трудности начинаются там, где возникает необходимость доказать, что от допустимых значений $a = i\frac{\omega_1}{\omega_2}$ можно притти к любым значениям $\varkappa^2 = \lambda\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$.

Если бы мы говорили о работах Якоби, относящихся к диференциальным уравнениям в частных производных, то критике подлежали бы еще многие пункты. Якоби прошел совершенно мимо доказательств существования Коши, он рассматривает большей частью только „общий случай“ и т. д. Его неустанно стремящейся вперед и нуждающейся в переменах натуре нехватало именно того спокойствия, которое необходимо для гармонического завершения построения во всех направлениях: как сказал однажды Якоби: „Господа, для гауссовой строгости у нас нет времени“.

Тихая исследовательская работа не могла вполне удовлетворить напряженный могучий дух Якоби, и потому в облике этого человека неотъемлемой чертой является его необычайная внешняя активность, нашедшая себе проявление прежде всего в его преподавательской деятельности в Кенигсберге. Влияние, которое имел Якоби на своих учеников, совершенно исключительно. Самые упорные натуры подчинялись его образу мышления, он увлекал всякого к вершинам специально математического честолюбия, к пламенному интересу к указываемой им постановке очередной проблемы дня. Умея не только разбудить и развить чужое дарование, как Гаусс или Дирихле, но и вовлекая всякого в орбиту своих идей данного момента, Якоби был чрезвычайно подходящим человеком для создания обширной, долго процветавшей школы. Так называемая кенигсбергская школа, основанная Якоби и Францем Нейманом (F. Neumann) как представителем математической физики, была первым явлением та-

кого рода в Германии, — явлением имевшим длительное влияние. [Созданная уже около 1790 г. Гинденбургом (Hindenburg) в Лейпциге „комбинаторная" школа имела преходящее значение; в нашем изложении мы не коснулись ее, потому что она является скорее продолжательницей старых научных традиций (Лагранжа и др.), нежели основоположницей нового научного развития [1])]. Как ново было тогда такое учебное начинание, диаметрально противоположное тенденциям XVIII века, видно хотя бы из того, что Бессель отказался от участия в основанном в 1834 г. математическо-физическом семинаре (первом в Пруссии).

Школа Якоби процветала еще долгое время, не меньше 30 лет, после ухода учителя, главным образом благодаря усилиям его любимого ученика Ришело (Richelot), который с необычайным жаром продолжал традицию, унаследованную от основателя. При нем однако облик ее, понятно, изменился. Запас идей, которым он располагал, был для него раз навсегда предопределен, и так как он был не в состоянии пополнять его, — в отличие от того, что имело место во времена Якоби, постоянно стремившегося к новому, — то неизбежно случилось так, что школа в дальнейшем отставала от развития своей эпохи. Известные чисто внешние моменты все больше и больше выступают на передний план, например одностороннее подчеркивание значения изучения эллиптических функций и т. п. Тем не менее возможно, что медленное окостенение системы является необходимым условием для длительного влияния школы; лишь очень немногие в состоянии следить за всеми изгибами и поворотами такого подвижного ума, как ум Якоби, не теряя почвы под ногами; масса еще не созрела для таких требований.

Мощный импульс, исходивший от Якоби, имел свое влияние далеко за пределами Кенигсберга. Все германские университеты испытали это влияние, частью косвенным путем, частью в результате частых приглашений к себе кенигсбергцев. Кирхгоф и Гессе (Hesse) попали в Гейдельберг, Клебш (Clebsch)—в Карлсруэ, Гиссен и Геттинген. Дух углубления в специальные области науки охватил все математические круги Германии и постепенно преодолел господствовавшие прежде поверхностно энциклопедические стремления. Это развитие охватило также и большую массу обучавшихся в университетах кандидатов на учительские должности. И здесь господствующей стала тенденция к высоко научным и соответственно специализированным требованиям. Свое наиболее яркое выражение эти стремления получили в прусском положении об испытаниях от 1866 г., которое требовало от каждого кандидата на учительскую должность настолько глубокого проникновения в высшую геометрию, высший анализ и аналитическую механику, чтобы он был в состоянии проводить в этих областях самостоятельные исследования.

---

[1]) См. по этому поводу H. Hankel, Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Вступительная речь, Tübingen 1869, стр. 24 и сл.

За пределами Германии влияние Якоби также было очень сильно. Так, переживавшие вновь эпоху расцвета математики Франции 40-х годов, вроде Эрмита и Лиувилля, признавали себя учениками Якоби. В Англии Кели (Cayley) признавал себя совершенно плененным им, и еще теперь к нему примыкают астрономы всего мира; в качестве примера назовем Тиссерана (Tisserand) и его *Traité de Mécanique céleste* („Курс небесной механики“, Paris 1889—1896).

Если задаться общим вопросом о духе, который носило в себе все это развитие, то мы можем сказать: это был неогуманизм с естественно научным направлением, видевший свою цель в неумолимо строгом культивировании чистой науки и создавший в одностороннем напряжении всех сил для этой цели специализированную культуру неведомой до тех пор высоты и блеска. Якоби сам высказывался в различных местах об этой концепции, например в своей вступительной речи в качестве ординарного профессора в Кенигсберге (Math. Annalen, т. 56, стр. 252 и сл.); см. также биографию Якоби, написанную Кенигсбергером (стр. 131 и сл.), где он выставил знаменитый тезис „Mathesis est scientia earum quae per se clara sunt“ („Математика принадлежит к числу тех наук, которые ясны сами по себе“); еще яснее и убежденнее, чем в этой своей латинской речи, он высказался в 1830 г. в другой своей речи, которую он сам в письме к Лежандру назвал молниеносной („fulminant“, Werke, т. 1, стр. 454 и сл., 2 июля 1830; Crelle, т. 80, стр. 272 и сл.):

„Il est vraî que Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde“ („Господин Фурье придерживался, правда, мнения, будто главной целью математики является общественная польза и объяснение явлений природы; но как философ он должен был бы знать, что единственная цель науки — это служить доблести человеческого разума и что, таким образом, какой-нибудь вопрос теории чисел стóит не меньше, чем любой вопрос о системе мира“).

Прежде чем закончить рассмотрение трудов Якоби, я хотел бы упомянуть еще об одном факте, который кажется мне немаловажным как с точки зрения характеристики человека, так и с точки зрения эволюции нашей науки. Как известно, 1812 год принес равноправие евреев в Пруссии. Якоби был первым еврейским математиком, занимавшим в Германии руководящее положение. И в этом он также стоит у истоков мощного и очень важного для нашей науки развития. Это мероприятие раскрыло для нашей страны новый богатый резервуар математических дарований, силы которого, наряду с притоком сил из французской эмиграции, очень скоро проявили свою плодотворность. Мне кажется, что такого рода освежение крови дает науке мощ-

ное оживление; наряду с уже отмеченным законом миграции продуктивности из страны в страну я хотел бы отметить и роль этого явления как действия национальной „инфильтрации“.

II. Геометры из журнала Крелля.

Современное математическое развитие Германии в области геометрии имеет своим источником также влияние французов. Если оставить в стороне гауссовы фундаментальные *Disquisitiones circa superficies curvas* (1827), то воспринята здесь была в первую очередь не диференциальная геометрия; основной интерес сосредоточился скорее на *алгебраической геометрии*, в частности на линейных и квадратичных образах.

Прежде чем подойти к истории развития ближе, я хотел бы указать на два противоречия, которые имели для него решающее значение.

Во-первых, противопоставление аналитической и синтетической трактовок геометрии, с которыми мы встретились уже в Политехнической школе. В дальнейшем это противопоставление приобрело самое острое принципиальное значение; приверженцы того и другого направлений видели свою доблесть в том, чтобы работать только раз избранным орудием. Преимущества и недостатки каждого метода выявлялись тем более выпукло, чем одностороннее он разрабатывался. Аналитическая геометрия имеет за собой удобный алгорифм, который открывает возможности высших обобщений, но который легко может привести к потере из виду подлинного объекта геометрии — фигуры и геометрического построения. Синтетической геометрии в свою очередь грозит опасность остановиться только на отдельных рассматриваемых случаях или только на ограниченном числе возможностей; положение мало улучшается, если для того, чтобы найти исход, создается ad hoc новый алгорифм, который остается тяжеловесным, пока он не преобразуется в простейшие соотношения аналитической геометрии. В синтетической трактовке приветствовать нужно отчетливое ощущение радости созерцания геометрического образа, этого живого источника всякой геометрии.

Здоровое развитие основывается на использовании обоих методов и пожинает плоды их взаимностимулирующего влияния друг на друга.

Другое противоречие, о котором я хотел бы сказать, имеет к существу дела более отдаленное отношение, однако обойти его нельзя ввиду того большого значения, которое оно имело в следующую эпоху. Хотя вообще противоречия этого рода играют гораздо более важную роль в искусстве, однако и наша „объективнейшая“ наука не может себя считать сво одной от них, поскольку дело касается вопросов распространения науки и организации научной деятельности. Я имею в виду противоречие между школами, кликами, всю большую область научной

полемики, которая сводится часто к личностям и превращается в мену субъективно окрашенных мнений, которые передаются следующим поколениям.

В нашем случае речь идет о споре синтетика Штейнера, поддержанного Якоби и его окружающими, с Плюкером. Мебиус со своим скромным характером стоял в стороне от этой борьбы, которая обострялась еще противоречием между столицей и провинцией. Еще и теперь нередко можно открыть следы этой борьбы, например, когда недавно в известных кругах чествовалась память Штейнера как величайшего, несравненного геометра первой половины XIX века.

Уклониться от влияния таких школ весьма трудно всякому, а особенно молодому человеку. Однако существует хорошее средство самозащиты; его рекомендовал мне однажды лейпцигский физиолог Людвиг: нужно удалиться на 600 километров от места этих споров и оттуда пересмотреть отношения; при этом удивительным образом отпадают многие взгляды, которые казались только что чем-то само собой разумеющимся.

Несомненно, что дальнейшее развитие, подобно тому, как оно во многом поставило на надлежащее место персональные заслуги, сумело разрешить и спор по существу, обеспечив во всех направлениях перевес аналитической геометрии. Я напомню только о связи учения об алгебраических кривых с высшей теорией функций, о взаимоотношениях с теорией множеств, укажу на развитие диференциальной геометрии, — ни в одну из этих областей „синтетическое" направление не входит. В остальном я придерживаюсь положения, выдвинутого в 1831 г. Якоби на диспуте при вступлении в кенигсбергский факультет: „Principium methodi geometricae et analyticae idem est" („Начала геометрического и аналитического метода одни и те же").

По времени появления первых крупных трудов я располагаю трех великих геометров в такой последовательности: Мебиус, Плюкер, Штейнер.

Август Фердинанд Мебиус (August Ferdinand Moebius) был первоначально астрономом, как Гаусс и многие другие из тех, кому математика обязана своим развитием. Занятия астрономией давали этим исследователям обеспеченное существование, необходимую основу их математического творчества. В числе их нужно назвать и Гамильтона. Мебиус на протяжении значительной части своей жизни был директором Плейссенбургской астрономической обсерватории в Лейпциге. Здесь он мог, ни о чем не заботясь, спокойно выращивать свои идеи, представляющиеся его геометрическому дарованию при изучении различных областей, чтобы затем оформлять их с совершенной ясностью.

Он родился 17 ноября 1790 г. в княжеской школе в Шульпфорте. Того, кто помнит облик этого скромного, тихого человека, может несколько удивить, что его отец занимал в этой школе должность учителя танцев. Как бы в завершение картины,

показывающей, как сильно могут отличаться между собой отцы и дети, я укажу, что сыном этого математика был известный невролог, автор вызвавшей много споров книги „О физиологической слабости женщины“.

В 1813—1814 гг. Мебиус провел довольно много времени у Гаусса, который однако готовил его, как и других учеников, преимущественно к астрономическим наблюдениям и вычислениям. Хотя он этим и обеспечил ему в дальнейшем профессию, но не угадал истинной сущности его дарования, которое развилось только на изучении французских геометров. С 1816 г. Мебиус был сначала наблюдателем, затем директором в Плейсенбурге, позже также профессором математики в университете. На этих должностях он оставался до своей смерти (1868).

Собрание его сочинений в четырех томах было издано Королевским саксонским научным обществом (1885—1887). В конце четвертого тома помещен обзор всего наследия, из которого становится ясным генезис научных идей Мебиуса. Черты более личного характера собраны в книжке Брунса (Bruhns) *Die Astronomen der Pleissenburg* („Астрономы Плейссенбурга“).

Фундаментальным сочинением Мебиуса и по времени и по содержанию является его книга *Der barycentrische Calcul* („Барицентрическое исчисление“) (1827), представляющая подлинный клад идей, изложенных с изумительной ясностью.

Название книги связано с ее основной идеей: использовать геометрически понятие о центре тяжести. Если оставаться в плоскости, то за координаты некоторой точки принимаются веса тех грузов p_1, p_2, p_3, которые нужно поместить в вершинах некоторого постоянного треугольника, чтобы центр тяжести их попал в точку P. Это первый пример однородных координат, т. е. таких координат, которые определяют объект только своими отношениями (λp_1, λp_2 λp_3 дают тот же центр тяжести, что и p_1, p_2, p_3). Однако это еще не однородные координаты самого общего вида, которые были введены Плюкером. Для этого необходимо было еще одно небольшое обобщение, которое получается, если каждую из координат снабдить произвольным множителем λ_1, λ_2, λ_3, т. е., например, ввести представление о том, что грузы, расположенные в вершинах треугольников, измеряются каждый своей мерой. Уравнение бесконечно удаленной прямой Понселе, принимающее в форме $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ уже у Мебиуса почти ощутительную наглядность, при этом имеет вид $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$, что дает возможность путем предельного перехода включить параллельную систему координат как частный случай в общее понятие треугольных координат, — идея, от которой Мебиус еще был очень далек.

Хотя эта новая система координат уже более гибка, чем обычная, так как она располагает шестью произвольными постоянными (в плюкеровской системе их восемь), тем не менее она обретает свою ценность только благодаря тому, что с ее помощью Мебиус развивает целый ряд новых идей.

1. Мебиус первый совершенно последовательно пользуется принципом знаков в геометрии, притом не только для измерения отрезков, но и для измерения площадей и объемов, при котором он различает „направление обхода“.

2. Приравнивая координаты точки в пространстве p_1, p, p_3 рациональным функциям параметров, Мебиус получает новое изображение кривых и поверхностей, ведущее к совершенно отличной от прежней классификации их. При этом Мебиус открывает пространственные кривые третьего порядка.

3. Мебиус ясно владеет идеей точечного отображения двух пространств и создает с ее помощью понятие о простейших и систематически расположенных степенях „близости“ между ними: равенство, называемое теперь обычно конгруэнтностью, подобие, аффинность (обозначение, введенное Эйлером), коллинеация; последним термином он обозначает самый общий тип соответствия, переводящий прямые линии снова в прямые линии [1]).

4. С этой классификацией он непосредственно связывает идею о разыскании тех выражений или образов, которые остаются неизменными при осуществлении какого-нибудь из этих соответствий. Здесь впервые дается полная теория двойного отношения четырех точек на прямой, которая стала возможной только после введения знака отрезка.

5. Осуществление коллинеации удается ему без помощи каких бы то ни было метрических определений, только посредством установления четырех взаимно соответствующих друг другу точек в плоскости (пяти в пространстве) и соединения их прямыми. На этой так называемой „сети Мебиуса“ фон-Штаудт (Staudt) построил позже основания своего синтетического развития геометрии.

Эти отдельные положения показывают всю чрезвычайную важность книги. Однако, несмотря на богатство идей, она лишь очень медленно приобретала влияние, соответствующее ее содержанию, частью потому, что обилие новых своеобразных терминов затрудняло доступ к ней, частью потому, что скромная натура Мебиуса не давала ему возможности произвести необходимое впечатление. Так же обстояло дело и с другим его высоко замечательным сочинением *Lehrbuch der Statik* („Учебник статики“), которое вышло в двух томах в 1837 г. (перепечатано в Werke, т. 3, стр. 1 и сл., 272 и сл.).

Эта книга содержит геометрический вывод большого числа соотношений, которые имеют место при совместном действии сил на твердое тело или цепь тел, и является продолжением тех соображений, которые развивал в 1804 г. Пуансо (Poinsot) в своем известном учебнике *Eléments de statique* („Элементы

[1]) Хотя Мебиус еще не владел понятием группы в его современной формулировке, но понятие „близости“ является эквивалентным ему; Мебиус является, таким образом, предшественником „Эрлангенской программы“.

статики"), где он наряду с одной силой поставил „пару сил". Книге предшествовало несколько отдельных работ (Crelle, т. 10, 1833; Werke, т. 1, стр. 489 и сл.), в которых Мебиус разрабатывает понятие о „нулевой системе", т. е. совокупности прямых в пространстве, относительно которых данная пара сил имеет момент нуль. С помощью обнаруживающихся здесь дуалистических соотношений между „нулевыми точками" и „нулевыми плоскостями" Мебиус приходит к очень красивым теоремам. Так, например, он открывает, что тетраэдры могут быть одновременно вписаны и описаны друг около друга.

Отдельные открытия исключительной красоты, отличающие творчество Мебиуса во всех областях, содержатся и в многочисленных отдельных заметках, которые он до глубокой старости опубликовывал в отчетах Королевского саксонского общества. Собрание сочинений Мебиуса состоит из четырех томов. В возрасте 68 лет ему удалось сделать основное открытие, которое было послано в 1861 г. в Париж в качестве работы на премию и было погребено в бумагах академии до 1865 г., когда Мебиус опубликовал его. Это — открытие односторонних поверхностей и многогранников, для которых „закон ребер" теряет приложимость и которые не обладают никаким объемом, поддающимся определению [1]. „*Лист Мебиуса*", для окраски которого нужно вдвое больше краски, чем кажется сначала (это наглядное пояснение имеется уже у Мебиуса), теперь широко известен. Замечательно, что в том же 1858 г. он был открыт Листингом (Listing), который сообщил о нем в 1862 г. в своей книге *Zensus räumlicher Komplexe*; мы снова встречаем здесь пример, подтверждающий закон железной необходимости, которому подчиняется развитие науки.

В Мебиусе мы имеем редкий пример поздно созревшего таланта, — барицентрическое исчисление было написано в возрасте около 37 лет, — продуктивность которого не ослабевала в течение всей его жизни и сохранилась до глубокой старости. Если следовать оствальдовскому делению математиков на романтиков и классиков, то Мебиуса нужно рассматривать как типичного представителя второй группы.

С Юлиусом Плюкером (Julius Plücker) мы вступаем уже в период, с которым я сам связан многочисленными отношениями. Лично я чту в нем своего учителя, ассистентом которого по физике я был с 1866 по 1868 г. и с которым нас связывает общая родина.

Плюкер был человеком с гораздо большими связями, чем Мебиус; особенно оживленные сношения поддерживал он с Францией и Англией, тогда как его отношения с Берлином сложились, как я уже намекал, недружелюбно. Плюкер представляет

[1]) „Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders", Werke, т. 2, стр. 472 и сл.

совершенно необычный тип развития. С 35-го года своей жизни он соединял математическую и физическую профессуру в Бонне; в связи с этим обстоятельством он постепенно отрывался от своих прежних математических работ, чтобы целиком отдаться экспериментальным физическим исследованиям. Только к концу своей жизни он снова вернулся к геометрии, и этот поворот сыграл решающую роль в моем собственном развитии (издание сочинений Плюкера).

Семья Плюкера, принадлежавшая к нижнерейнской индустрии, была изгнана в эпоху религиозных волнений из Аахена и переселилась в Эльберфельд. Здесь 16 августа 1801 г. и родился Плюкер. Он посещал гимназию в Дюссельдорфе, был студентом в Бонне и Париже в 1823/24 г. и защитил докторскую диссертацию в 1825 г. в Бонне, где и стал экстраординарным профессором в 1828 г. В период 1832—1834 гг. он был экстраординарным профессором в Берлине и одновременно преподавал в гимназии Фридриха-Вильгельма. Его также намечали одно время директором проектировавшегося Политехнического института, который, конечно, уже тогда мыслился как учреждение для подготовки старших учителей. Ко времени пребывания Плюкера в Берлине и относится обострение конфликта с кругами Якоби-Штейнера. Сам Штейнер появился в Берлинском университете в качестве экстраординарного профессора в 1835 г., когда Плюкер уже был в течение года ординарным профессором в Галле. В 1836 г. он был приглашен в Бонн, где со смертью Мюнхова (Münchow) открылись сразу три вакантных кафедры: математики, физики и астрономии. Последнюю занял Аргеландер (Argelander), первые две до своей смерти (22 мая 1868 г.) занимал Плюкер.

Говоря о работах Плюкера, я хотел бы прежде всего остановиться на его достижениях в области физики, в силу тех персональных взаимоотношений, которые связывают с ними нас, геттингенцев. Физические работы Плюкера помещены во втором томе сочинений, собранных Геттингенским научным обществом и снабженных предисловием Рике (Riecke).

Хотя Плюкер и начал с математики, однако он отнюдь не был физиком-теоретиком. Наоборот, его больше привлекали чисто экспериментальные исследования, в которых он, следуя примеру Фарадея, охотнее всего проникал в совершенно неисследованные области. Благодаря этому ему удалось сделать целый ряд открытий. В 1847 г. он открыл явление кристалломагнетизма на пластинке турмалина, подвешенной между полюсами электромагнита; пластинка устанавливалась аксиально или трансверсально, смотря по тому, как она была подвешена [1]).

[1] Эти исследования нашли известное завершение в книге A. Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik, Braunschweig 1865, изданной Плюкером.

С 1857 г. он производил наблюдения над влиянием магнита на электрический разряд в разреженных газах, в частности на положительный разряд и отрицательное тлеющее свечение; при этих наблюдениях он почти вплотную подошел к открытию катодных лучей, которое завершил его ученик Гитторф (Hittorf). Вытягивание гейслеровых трубок в капилляры и ставшие благодаря этому возможными первые наблюдения разрядных спектров также были осуществлены Плюкером в 1857 г. (Werke, т. 2, стр. 502). Он установил, что спектр является характерным для каждого данного газа, и в частности наблюдал первые три водородные линии. В 1864 г. он совместно с Гитторфом (т. 2, стр. 665 и сл.) получил гораздо более точные результаты, в частности двоякого вида спектры (линейчатые и полосатые), обусловленные природой электрического разряда. Все относящиеся к этому вопросу работы помещены в Philosophical Transactions. Однако эти открытия, вследствие противодействия со стороны Берлина, не нашли в Германии признания. В Гейдельберге Кирхгоф и Бунзен (Bunsen) начали в 1858 г. работы по спектральному анализу, но наблюдали сначала только простые спектры паров металлов. Различная природа спектра одного и того же газа при различных условиях свечения не была ими замечена. Между прочим я напомню и о том непризнании, которое ждало Гитторфа в Берлине и позже, когда он сообщил берлинским физикам Магнусу, Поггендорфу и др. о своих крупных открытиях, касавшихся катодных лучей. Разногласия, которых мы здесь касаемся, в значительной мере чувствуются и по сию пору.

Я перехожу теперь к продолжению нашей основной темы, обращаясь к геометрическим работам Плюкера. Мы обязаны ему пятью большими самостоятельными публикациями, кроме работ, собранных в первом томе Собрания сочинений:

1. *Analytisch-geometrische Entwicklungen* („Аналитически-геометрические исследования"), т. 1 и 2, 1828, 1831;

2. *System der analytischen Geometrie* (der Ebene), [„Система аналитической геометрии" (на плоскости)], 1834;

3. *Theorie der algebraischen Kurven* („Теория алгебраических кривых"), 1839;

4. *System der analytischen Geometrie des Raumes* („Система аналитической геометрии в пространстве"), 1846;

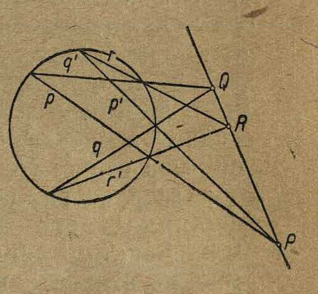
5. *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* („Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии как основного элемента"), 1868, 1869 (вторая часть после его смерти издана мной).

О последнем сочинении, которое относится ко второму геометрическому периоду Плюкера, я буду говорить в дальнейшем развитии этих лекций. Я хотел бы только отметить как любопытную черту, что возобновление Плюкером геометрических работ совпадает с годом смерти Штейнера (1863). Существует

ли между этими событиями причинная связь, установить, конечно, невозможно.

Целью Плюкера в геометрии и его достижением является новое построение аналитической геометрии. Он придерживался при этом метода, возникшего из традиций Монжа: полного сращения построения и аналитической формулы. В предисловии к первому своему сочинению, на стр. IX он говорит: „Я присоединяюсь к тому мнению, что анализ является наукой, существующей самостоятельно, в себе самой, вне зависимости от каких бы то ни было приложений, тогда как геометрия, так же как, с другой стороны, механика, являются только наглядным изображением соотношений в едином великом и возвышенном мироздании". В этих словах ясно слышатся положения Монжа, с которыми мы в другой форме познакомились и у Гаусса.

В геометрии Плюкера простое комбинирование формул переводится на язык геометрических соотношений и, наоборот, последними направляются аналитические операции. Вычисления у Плюкера по возможности опускаются, но зато развивается и широко применяется доходящая почти до виртуозности острота внутреннего восприятия, геометрического истолкования имеющихся аналитических уравнений.



Черт. 5.

В качестве примера, характеризующего образ мышления Плюкера, я приведу его доказательство теоремы Паскаля.

Речь идет о двух тройках прямых p, q, r и p', q', r', из девяти точек пересечения которых шесть лежат на одном коническом сечении (черт. 5). Утверждается, что остальные три лежат на одной прямой. Мы рассматриваем p, q, r, p', q', r' как линейные выражения, приравнивание которых нулю дает уравнения шести прямых, о которых идет речь. Тогда комбинация $pqr - \mu p'q'r' = 0$ представляет собой уравнение пучка кривых третьего порядка, которые все проходят через девять точек пересечения обеих троек прямых. Так как из этих девяти точек шесть лежат на коническом сечении и кроме того в нашем распоряжении имеется постоянная μ, то путем подходящего подбора μ я могу всегда выделить кривую, имеющую с данным коническим сечением еще одну седьмую, общую точку. Кривая третьего порядка C_3 и кривая второго порядка C_2, вообще говоря, имеют шесть общих точек. Если уравнение шестой степени, определяющее их пересечения, имеет больше, чем шесть корней, то оно обращается в нуль тождественно. Поэтому кривая C_3 должна распадаться на само коническое сечение и линейную остаточную часть, которая необходимо должна содержать три другие точки пересечения обеих точек прямых. Стало быть, эти три точки действительно лежат на одной прямой.

Это доказательство, которое при некотором навыке становится настолько ясным, что может быть изложено еще короче, обнаруживает две другие очень ценные особенности приемов Плюкера. Одна заключается в „сокращенном способе обозначения", который ограничивается обозначением прямой, не выписывая явно ее уравнения; другой является применяемый Плюкером при всяком удобном случае неопределенный коэфициент, так называемое „плюкерово μ". Это μ попадается то здесь, то там уже в *Annales* Жергонна (Штейнер также знал его, но только от Якоби, почему он и называл это μ „еврейским коэфициентом"). Но только у Плюкера оно стало важным орудием, которое оказало ему большие услуги в его искусстве „читать уравнения".

Наряду с характерным общим методом Плюкера нужно отметить еще ряд его отдельных достижений. О введении *однородных координат самого общего вида* и их преимуществах было уже сказано выше: в „Системе" они были определены (1834) как умноженные на произвольные постоянные расстояния точки P от трех сторон треугольника; в журнале Крелля (т. 5, 1830) вводятся еще в качестве координат сами эти расстояния, из чего вытекает такое же сужение метода, как и у Мебиуса. Благодаря введению этих координат все уравнения геометрических образов становятся однородными, что допускает очень изящные доказательства, основанные на теореме Эйлера об однородных функциях; эти доказательства были разработаны Плюкером широчайшим образом. В частности, совершенно преобразуется учение о касательных и полярах. Если $f=0$ есть уравнение конического сечения, содержащего точку x, y, z, то уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot z' = 0$$

представляет либо касательную к кривой $f=0$ в постоянной точке x, y, z, либо поляру постоянной точки x', y', z' по отношению к кривой $f=0$, смотря по тому, какие координаты — x', y', z' или x, y, z — мы рассматриваем как текущие. Чередование этих истолкований одного и того же уравнения было Плюкером разработано до виртуозности и применено для получения очень изящных доказательств разнообразных теорем.

Однородные координаты дают также блестящую аналитическую реализацию смелой концепции Понселе, относящейся к бесконечно удаленным прямым, циклическим точкам и т. п. Если положить $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, то уравнение окружности при подстановке $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$ принимает вид

$$(x_1-ax_3)^2+(x_2-bx_3)^2=r^2x_3^2.$$

Уравнение бесконечно удаленной прямой $x_3=0$ дает для пересечения этой прямой с любой окружностью образ, определяемый уравнением $x_1^2+x_2^2=0$, т. е. пару точек, задаваемых

координатами: $x_1:x_2:x_3=1:+i:0$ и $x_1:x_2:x_3=1:-i:0$; это как раз и суть так называемые циклические точки.

Не менее важным, чем введение однородных координат, является следующий новый ход идей. Уравнение прямой $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ является совершенно симметричным по отношению к коэфициентам u и координатам x. Плюкер рассматривает теперь величины u как переменные, каждая система значений которых определяет некоторую прямую, проходящую через постоянную точку x_1, x_2, x_3. Он называет величины u_1, u_2, u_3 „линейными координатами"; в них вышеназванное уравнение изображает пучок прямых, проходящих через данную точку, т. е. самую точку. Так же, как я могу рассматривать линейное соотношение как уравнение прямой в точечных координатах, я имею право видеть в нем и уравнение точки в линейных координатах.

Эта идея о *произвольном „элементе пространства"*, который избирается в качестве исходного пункта геометрии, дала полное уяснение принципа двойственности Понселе-Жергонна. Так как уравнение, выражающее условие принадлежности точки к прямой (инцидентности), — а в пространстве — точки к плоскости, совершенно симметрично относительно обоих элементов, то во всех предложениях, относящихся только к принадлежности этих двух элементов, можно переставлять те и другие термины.

Это — существенно новые идеи, которые внес Плюкер в основательно разработанную область геометрии линейных и квадратичных образов. Выходя за эти пределы, он впервые подошел к совершенно новым объектам исследования. В то время как французские геометры ограничивались большей частью указанной областью, а Понселе при первых более широких попытках наткнулся на непреодолимые для него трудности, Плюкеру удалось первое успешное проникновение в *общую теорию плоских алгебраических кривых*.

Как главный успех в этой области я хотел бы отметить *формулы Плюкера*, которые связывают порядок кривой n (степень ее уравнения в точечных координатах) с ее классом k (степенью уравнения в линейных координатах) и простыми (так называемыми необходимыми) особыми точками[1]. Эти формулы помещены в конце „Системы" 1834 г. Прежде всего Плюкер нашел соотношение $k=n(n-1)-2d-3r$, где d есть число двойных точек, а r — число точек возврата. Дуализировать это равенство простой перестановкой величин n и k было невозможно. Принцип двойственности мог быть удовлетворен только благодаря открытию и введению так называемых „линейных особенностей". Двойным точкам d дуально соответствуют двойные каса-

[1]) Понселе никогда не мог уяснить себе, почему соотношение $k=n(n-1)$ не может быть обращено по принципу двойственности в соотношение $n=k(k-1)$ („парадокс Понселе").

тельные t; точкам возврата r — соприкасающиеся, т. е. проникающие сквозь кривую, касательные перегиба w, точки касания которых называются точками перегиба. Для числа этих точек перегиба Плюкер нашел соотношение $w = 3n(n-2)$, которое в случае наличия особых точек переходит в соотношение

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r.$$

Это дает материал, из которого путем дуализирования получается полная система формул для особых мест кривой:

$$k = n\ (n-1) - 2d - 3r;\quad n = k\ (k-1) - 2t - 3w;$$

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r;\quad r = 3k(k-2) - 6t - 8w.$$

В случае $n = 3$, $d = 0$, $r = 0$ получаем $w = 9$. Раньше были известны только три точки перегиба общей кривой третьего порядка C_3, и Плюкер показал, что шесть точек из девяти всегда должны быть мнимыми Еще в XVIII веке Маклорен показал, что три вещественных точки перегиба кривой C_3 лежат на одной прямой — „линии перегиба". Так как в смысле общей геометрии положения вещественные точки перегиба ничем не отличаются от остальных, то это предложение должно быть справедливо и для всякой другой тройки точек перегиба. Доказательство можно провести с помощью сокращенных обозначений совершенно так же, как выше было проведено доказательство теоремы Паскаля. Кривая C_3 обладает, следовательно, 12 линиями перегиба, простейшую схему которых дал позже Гессе. Этот пример показывает, насколько обогатило геометрию кривых открытие Плюкера. На стр. VI „Системы" 1834 г. он сам говорит: „Необходим новый взлет пространственной интуиции, чтобы охватить то, что во всех случаях мнимо и остается мнимым".

Что развитие пространственной интуиции необходимо для уверенного продвижения в этой новой геометрии, показывает пример самого Плюкера, допустившего ошибки при расположении 28 двойных касательных общей кривой четвертого порядка C_4 (*Algebraische Kurven*, 1839). Исходя из числа произвольных постоянных, он правильно заключает, — это также специфический плюкеровский вывод, — что ее уравнение может быть приведено к виду $\Omega^2 - \mu pqrs = 0$, где $\Omega = 0$ есть коническое сечение, а $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ суть прямые, являющиеся двойными касательными кривой C_4. Но отсюда он ошибочно выводит предложение о том, что точки касания каждых четырех двойных касательных лежат на одном коническом сечении, тогда как это утверждение верно только при определенном выборе и сопоставлении четырех касательных. Прямые p, q, r, s не могут быть все свободно выбраны; после выбора двух из них две другие могут быть выбраны только пятью различными способами. (Эта ошибка была позже показана Штейнером.)

В одном направлении плюкеровы формулы, несмотря на свою большую плодотворность, оставляли все же вопрос открытым; они не дают ничего для разделения вещественных и мнимых элементов. Хотя для абстрактного мышления эти вопросы в течение десятилетий оставались безразличными, они имеют однако величайший интерес для того, кто хочет исследовать истинную геометрическую структуру образа, и несомненным извращением современной геометрии является отрицание важности этого вопроса вообще. Эти проблемы исследования строения геометрических образов с точки зрения их реальности, вообще говоря, коренятся очень глубоко и требуют исследований, проникающих очень далеко в алгебраическую природу уравнений. Тем охотнее я отмечу найденную мной в 1876 г. формулу (Math. Annalen, т. 10; Ges. Abh., т. 2, стр. 78 и сл.), которая может быть полностью выведена средствами, находившимися в распоряжении Плюкера, и дополняет, по крайней мере в значительной части, его формулы в этом направлении. Если w' означает число вещественных точек перегиба, t'' — число вещественных изолированных двойных касательных, r' и d'' — соответственно числа вещественных точек возврата и вещественных изолированных двойных точек, то

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

Эта формула дает, например, возможность решить вопрос о вещественных точках перегиба кривой C_3.

Из соотношения

$$3 + w' + 0 = 6 + 0 + 0$$

вытекает, что $w' = 3$. Теорема о числе вещественных точек перегиба кривой C_3 теряет, таким образом, свое изолированное положение.

О том, что Плюкер не знал этой формулы, лежавшей на его пути, приходится жалеть тем больше, что при его большом интересе к истинному геометрическому виду кривой она была бы для него очень желательна. При всем том, что он сделал для построения проективной геометрии, Плюкер не был проективистом в собственном смысле этого слова. В стиле старых геометров XVIII века он придерживался конкретного, обращал внимание на поведение кривых в бесконечности, посвящал, например, подробные исследования вопросу об асимптотах и т. д., — все это вещи, совершенно не имеющие значения с чисто проективной точки зрения. Последовательное проведение проективного мышления и связанная с этим разработка теории инвариантов оставались на долю более позднего поколения.

Прежде чем остановиться на этом подробнее, мы должны заняться основателем новой синтетической геометрии в Германии — Яковом Штейнером (Jacob Steiner).

Штейнер — сын швейцарского крестьянина, до 19 лет он ходил за плугом, а затем, почувствовав сильное влечение к преподавательской деятельности, посвятил себя проведению в жизнь идей Песталоцци. Штейнер являет собой единственный, насколько мне известно, в нашей науке пример математического дарования, развившегося только в зрелом возрасте и тем не менее дошедшего до мастерства; кроме того в лице Штейнера мы встречаемся с редким случаем ведущего ума и виднейшего университетского преподавателя, вышедшего из рядов деятелей народной школы.

Штейнер родился 18 марта 1796 г. в Утцендорфе, близ Солотурна. Выросши без особого образования, он только в 1815 г. стал заниматься своим дальнейшим обучением; позже он был учителем в педагогическом институте, который основал в Ифертене Песталоцци, чтобы дать практическое осуществление своим реформаторским идеям в области воспитания. Хотя идеи Песталоцци носили чрезвычайно творческий и оживляющий характер, о чем свидетельствует их влияние в различных направлениях, тем не менее ему недоставало, повидимому, умения, чтобы действенно пробить им дорогу. Его предприятие в Ифертене рухнуло прежде всего из-за финансовых затруднений. Штейнер, которого мощно влекло к дальнейшему научному образованию, покинул Ифертен в 1818 г. и до 1821 г. продолжал свое образование в Гейдельберге, главным образом, путем самостоятельного изучения французских геометров; свой горький кусок хлеба ему приходилось в это время зарабатывать частными уроками. Однако, его прежняя преподавательская деятельность облегчила ему продвижение вперед. В берлинских министерских кругах был жив интерес к методу Песталоцци, и это побудило Штейнера переехать в Берлин, где он занимал различные учительские должности. Доступ в дом Вильгельма фон-Гумбольдта, бывшего министра, детей которого он обучал, облегчил ему дальнейшее возвышение. В 1834 г., как последний результат попыток создания Политехнической школы, для него была учреждена должность экстраординарного профессора в Берлинском университете; одновременно он стал членом академии. Он умер 1 апреля 1863 г.

Может показаться странным, что Штейнер не получил ординарной кафедры в Берлине. Обычно считают причиной этого недостаточную для такого рода должности светскость Штейнера. И действительно, Штейнер держался в официальных кругах очень странным образом, особенно в более поздние годы, когда стареющий человек, рассорившийся со всем миром, часто подкреплял в разговоре свои аргументы не легко переносимой грубостью. О личности и развитии Штейнера много ценных сведений имеется в книге его племянника К.-Ф. Гейзера (C. F. Geiser, *Zur Erinnerung an Jacob Steiner*, Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, 1872 — 1873, 56 Jahresversammlung. Schaffhausen, 1873, стр. 215 и сл).

По всему тому, что рассказывает Гейзер о развитии Штейнера, и по той манере, в которой проявлялось дарование Штейнера, мы должны считать его талант, исходящий из интуитивного восприятия пространственных форм и именно поэтому избегающий анализа, совершенно самобытным. Объяснение силы его пространственного восприятия влиянием Песталоцци должно казаться несостоятельным всякому, кто когда-либо брал в руки книгу Песталоцци *ABC der Anschauung* („Азбука наглядного представления“), часто упоминавшуюся в этой связи. Книга отличается такой бедностью содержания, которая прямо пугает и никак не дает основания предполагать в авторе ее основоположника новой педагогики, основанной на наглядном представлении. В ней накопляются во все возрастающем количестве, доходящем до пресыщения, только упражнения в разложении отрезков на равные части и квадратов на равные квадраты. Какие странные представления об осуществлении собственных планов имели эти первые педагоги, которые все же призвали к жизни новые, чрезвычайно плодотворные идеи, становится ясным из комментария к сочинениям Песталлоци, который составил крупный философ и педагог Гербарт (Herbart). Для развития наглядного представления Гербарт предлагает таблицу, содержащую только прямоугольные треугольники различного вида и величины; постоянное разглядывание этой таблицы должно разбудить в его воспитанниках живое представление о прямоугольном треугольнике. Для более длительного и незабываемого впечатления он рекомендует даже повесить такую таблицу у колыбели грудного младенца. Чтобы выявить зерно истины в этих педагогических нелепостях и направить искусство воспитания по более рациональным путям, нужен был такой человек как Фребель (Fröbel). Он и вместе с ним Гарниш (Harnisch) выдвинули на передний план при воспитании ребенка телесный, т. е. трехмерный образ. У обоих педагогов заметно влияние пути их собственного развития, т. е. влияние занятий минералогией и кристаллографией.

Таким образом силу своей пространственной интуиции Штейнер почерпнул наверное не в этом источнике; своему жизненному пути самоучки он обязан другим: своим преподавательским искусством. Направление Песталоцци культивировало любовное и тщательное проникновение в воззрения учащегося, для развития которого оно применяло так называемый сократовский метод. Каждое новое знание должно быть самим учащимся проработано, открыто, создано; учитель должен давать самостоятельно думающему ученику только руководство в желательном направлении. Исходя из этого принципа, который он развивал с большим искусством и успехом, Штейнер не употреблял на своих лекциях никаких чертежей; живое соучастие слушателей в работе должно было вызвать в их представлении настолько отчетливую картину, чтобы можно было обойтись без всякого чувственного восприятия. [Еще дальше пошел впослед-

ствии Дистервег (Diesterweg), который при занятиях со своими семинарскими кандидатами в Мерсе искусственно затемнял помещение.]

Работы Штейнера изданы в виде двухтомного собрания сочинений Берлинской академией (1880—1882). Их можно сгруппировать в две резко отличающиеся группы.

Первая охватывает период от 1826 г. (журнал Крелля, т. I) примерно до 1845 г. Она содержит собственные оригинальные концепции Штейнера, конечно проведенные на относительно элементарных образах.

Второй период охватывает работы, относящиеся к высшим алгебраическим областям; часто это только сообщения о результатах без доказательств. К сожалению, из переписки Штейнера с Шлефли (Schläfli), изданной в 1896 г. Графом (Graf), явствует, что Штейнер здесь часто широко пользовался английскими (и другими) источниками, не указывая их. Трагедия этого несомненно незаурядного человека заключалась в том, что окруженный после исключительно славного подъема всеобщим почитанием и удивлением он не мог примириться с ослаблением к старости своей творческой продуктивности и, будучи очень ожесточен, боролся с ним сомнительными средствами, стараясь вернуть этим для себя и других блеск былых дней. Кто может решить, сколько в этом было сознательного обмана и в какой мере Штейнер сам был жертвой неправильной оценки собственной творческой силы, оценки, затуманенной его горячим желанием.

Во всяком случае здесь, в связи с теми вопросами, которые нас сейчас занимают, мы займемся только теми работами Штейнера, которые относятся к первому периоду. Главное его сочинение — это *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* („Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга"); из пяти задуманных частей этого сочинения вышла в свет в Берлине в 1832 г. только первая часть.

План чисто синтетического построения геометрии покоится на основной идее о *проективном образовании*. На основе проективности „основных образов": в плоскости — прямой, пучка лучей, самой плоскости; в пространстве — прямой, плоского пучка прямых, пучка плоскостей, связки лучей и плоскостей, самого пространства, — должно было строиться здание геометрии путем последовательного образования более высоких образов. Основные образы проективно сопрягаются друг с другом и результаты этих сопряжений исследуются как следующие по важности образы более высокой ступени.

В первой части, которой мы располагаем, это исследование выполнено только для конических сечений и однополостного гиперболоида, который образуется как пересечение соответствующих плоскостей двух проективных пучков плоскостей. Несколько дальше пошел Шретер (Schröter) в своих лекциях, изданных в 1867 г.

ОПЕЧАТКА

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Следует*	*По чьей вине*
165	15 снизу	$-\mu q = 0,$	$p - \mu q = 0$	типогр.

Клейн

Новое и важное в этих рассуждениях заключается в систематике; по сути исследования в них нет ничего существенно нового. Но строгость проведения предначертанного плана, соединяющаяся с блестящим мастерством изложения, своим внутренним единством и оригинальностью захватывает читателя. У Штейнера, наряду с интересами исследования, всегда сказывается вкус к изложению и преподаванию. Какое значение он сам придавал своим исследованиям, явствует из его предисловия:

„Настоящее сочинение делает попытку раскрыть тот организм, которым связаны друг с другом различнейшие явления в пространственном мире... В хаосе возникает порядок, и мы видим, как все части естественно переходят друг в друга, а родственные соединяются в ясно очерченные группы“.

Средства, с помощью которых Штейнер хотел достичь этой цели, в настоящее время хорошо известны, но мы знаем также, что они охватывают только часть геометрии и что, с другой стороны, Штейнер никогда сам не доводил их до завершения.

„Принцип Штейнера“, заключающийся в последовательном образовании высших образов из низших, аналитически соответствует приравниванию нулю детерминантов определенных матриц. Так, например, проективное образование линейчатой поверхности второго порядка осуществляется приравниванием нулю детерминантов, получающихся из уравнений плоскостей, которые могут быть сгруппированы двояко. Равенство

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} = 0$$

дает

$$p - \mu q = 0,$$
$$p' - \mu q' = 0$$

или

$$p - \lambda p' = 0,$$
$$q - \lambda q' = 0$$

в качестве уравнений двух семейств образующих. Точно так же дальнейшее развитие принципа Штейнера, осуществленное Рейе (Reye), Шуром (Schur) и Штурмом (Sturm), приводит нас к систематическому комбинированию детерминантов матрицы

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \cdots \\ \varphi' & \psi' & \chi' \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix}.$$

Приравнивая их нулю, мы получаем все новые геометрические теоремы. Как ни нагляден этот принцип, однако он недостаточно широк, чтобы служить основой для построения всей геометрии. Он исчерпывается уже на задачах третьего порядка.

Штейнер, однако, не достигает своей цели даже в пределах того, что им было сделано; он отказался, пренебрегая успехами Мебиуса, от введения в синтетическую геометрию принципа знака и лишил себя этим возможности общих формулировок; это заставляет его в двойных отношениях всегда указывать еще и порядок элементов. Прежде всего однако ему нехватало умения владеть мнимыми величинами. Он никогда не мог примириться с ними и подчеркивал это такими названиями, как „призраки“ или „царство теней в геометрии“. Понятно, что при таком самоограничении страдала и полнота его систематики[1]). Так, например, с проективной точки зрения существуют два конических сечения: $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ и $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$; для второго случая в системе Штейнера нет места. От этого и других несовершенств синтетическая геометрия освободилась только благодаря фон-Штаудту, о чем мы будем еще подробнее говорить дальше.

Рядом с первой частью „Систематического развития“ нужно еще поставить вышедшую в 1833 г. самостоятельным изданием небольшую книжку *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und Eines festen Kreises (als Lehrgegenstand auf höheren Schulen und zur praktischen Benutzung)* [„Геометрические построения, осуществляемые с помощью прямой и постоянной окружности (для изучения в высших школах и практического применения)“]. Основная идея здесь заимствована у Понселе, но ее осуществление снова исключительно интересно. Подзаголовок показывает, что Штейнер в ту пору (как это нам известно и из других источников) хотел зарекомендовать себя для руководства задуманным Политехническим институтом. Характерно также, что после 1835 г., когда Штейнер получил желательное ему место в университете, он не мог решиться на окончание задуманных им систематических курсов.

Из различных отдельных работ раннего периода Штейнера я упомяну небольшое сочинение, которое своим содержанием, направленным в совершенно иную сторону, показывает, как широк был Штейнер в чисто геометрической области, несмотря на свою односторонность; оно отличается также исключительно ясным и блестящим изложением. Это — работа *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, et sur la sphère dans l'espace en général* („О наибольших и наименьших значениях плоских фигур и о сфере“, Crelle, т. 34, 1842). Оно содержит обработку многочисленных проблем, касающихся максимумов и минимумов, элементарно геометрическими методами. Известна, например, задача: описать около треугольника фигуру с заданным периметром (бо́льшим, чем периметр описанной около треугольника окруж-

[1]) Дальнейшие несовершенства связаны с основными определениями Штейнера, так что еще гораздо большее число теорем имеет исключения, нежели ему это было известно. Ср. по этому поводу работу Бальдуса (R. Baldus, Zur Steinerschen Definition der Projektivität, Math. Annalen, т. 90, 1922/23, стр. 86 и сл.).

ности) так, чтобы площадь ее была максимальной. Эта фигура состоит из трех дуг окружности одного и того же радиуса и отрезков сторон треугольника. Особенно знаменито однако заключающееся здесь доказательство того, что если пренебречь прочими дополнительными условиями, то круг является плоской фигурой, обладающей наименьшим периметром при наибольшей площади. Блестяще проведенное элементарными средствами исследование этого и других случаев изопериметрической задачи заключает в себе, конечно, логический пробел, который мог быть замечен только позже, именно отсутствие доказательства существования решения задачи. Этот пробел был восполнен Вейерштрассом, а для специальных примеров—Г. А. Шварцем.

Суммируя сказанное о Штейнере, мы должны притти к заключению, что и он еще не был тем односторонним и замкнутым в себе последовательным проективистом, к которому вело все развитие этих лет. Так же как в его основном сочинении двойное отношение определяется по примеру Понселе и Мебиуса метрическим путем, так и во всем построении остается невыясненной связь между метрической и проективной геометрией.

Как разрешила эту проблему позднейшая эпоха, мы увидим из рассмотрения эволюции математики после 1830 г., которому посвящена следующая глава.

Глава четвертая.

Развитие алгебраической геометрии после Мебиуса, Плюкера и Штейнера.

Под „алгебраической геометрией“ я разумею здесь, как это теперь принято, теорию низших алгебраических образов (прежде всего образов первого и второго порядка), в ее противоположении диференциальной геометрии. В этой главе, следовательно, речь будет итти о дисциплине, созданной Монжем и Понселе и затем развитой Мебиусом, Плюкером и Штейнером, и о ее дальнейшей эволюции. При этом я пренебрегу обычным разделением геометрии на аналитическую и синтетическую, которое, как мы уже видели, превращает несущественную особенность изложения в важнейший признак различия. Я предпочту направить внимание на следующий вопрос: какое влияние на развитие этой науки имели заключающиеся в ней основные идеи геометрического характера, с одной стороны, и идеи алгебраического характера — с другой.

Не рассчитывая на исчерпывающую полноту изложения, мы займемся следующими вопросами:

1. Обстоятельствами возникновения *чисто проективной геометрии*, которая, имея в своей основе идущую от Понселе проективную манеру мышления и используя систематику, начало которой положил Штейнер введением своих основных образов, развивалась далее строго систематически вполне замкнутым в себе образом.

2. Историей параллельно развивавшейся алгебраической дисциплины: *теории инвариантов*, — науки, изучающей те свойства однородных алгебраических форм первого, второго и третьего порядков, которые остаются неизменными при любом линейном преобразовании переменных.

I. Создание чисто проективной геометрии.

Мы начнем с того немецкого геометра, которому мы обязаны важнейшими достижениями в принципиальном развитии интересующих нас геометрических идей, а именно с Штаудта.

Жизненный путь Христиана фон-Штаудта (Christian von Staudt) во многом напоминает жизненный путь его предше-

ственника Мебиуса, к которому Штаудт близок также характером одаренности и темпераментом.

Штаудт родился в 1798 г. в Ротенбурге в родовитой франконской семье. Как и Мебиус, он был в течение некоторого времени учеником Гаусса, который направлял и его внимание в область астрономии и теории чисел, не считаясь с его геометрическими склонностями; последние выявились полностью, когда он достиг зрелого возраста. С 1822 по 1825 г. Штаудт работал в Вюрцбурге в университете и одновременно в гимназии.

Подобное же положение занимал он в 1825—1835 гг. в Нюренберге, работая одновременно в гимназии и в политехническом училище (соответствующем современному техникуму). В 1835 г. он получил профессуру в Эрлангене, в котором и оставался до своей смерти в 1868 г. [см. посвященную его памяти речь Нетера (Nöther), произнесенную в 1906 г. в день празднования столетнего юбилея присоединения Эрлангена к Баварии].

В тиши и простоте тогдашней эрлангенской жизни, стоявшей в стороне от суеты больших городов, Штаудт нашел тот покой и изолированность, которые были необходимы для спокойной разработки его идей. Штаудт закончил свои основные труды в глубочайшем уединении, ведя строго регулярный образ жизни, что отражалось даже на его внешнем виде. Когда я в 1872 г. занял его кафедру, которую до меня занимали Ганкель (1868—1869) и Ганс Пфафф (H. Pfaff, 1869—1872), мне еще рассказывали, что лицо Штаудта было похоже на цифру. Основными работами Штаудта являются:

Geometrie der Lage („Геометрия положения“), которая вышла в Нюренберге в 1847 г., и

Beiträge zur Geometrie der Lage („Вклад в геометрию положения“), 3 выпуска (Нюренберг 1856, 1857, 1860). Эти книги — зрелые плоды долгой и богатой результатами жизни — содержат исключительное богатство мыслей, изложенных в безукоризненно строгой, подчас даже отчеканенной до безжизненности форме, которая вполне соответствовала основательности и систематичности, свойственным натуре Штаудта, а также и его возрасту: когда он закончил свою вторую работу, ему уже было 63 года.

Для меня лично манера изложения Штаудта была всегда недоступной. Если же я, несмотря на это, находился под большим влиянием его мыслей и много над ними работал, то я обязан этим исключительно моему уже умершему товарищу, тирольцу Штольцу (Stolz) (родился в Галле, около Инсбрука), с которым я тесно общался в 1869/70 г. в Берлине и летом 1871 г. в Геттингене (лето 1871 г. мы прожили вместе).

Штольц много читал близкого ему по духу Штаудта и своими неустанными рассказами ввел меня в круг идей, живейшим образом заинтересовавших и воодушевивших меня.

В рамках этих лекций я могу только в очень свободной форме изложить те основные достижения, которыми мы обязаны Штаудту. При этом я коснусь и того, как эти достижения были в

дальнейшем дополнены. К сожалению, и здесь, как и при изложении других областей, я принужден ограничиться выбором лишь некоторых немногих моментов.

Первым важнейшим моментом, характерным для всего развития математики в последнем столетии, было, как я уже об этом говорил в конце предыдущей главы, независимое от метрических соображений обоснование проективной геометрии. Как мы уже видели, проективная геометрия у Понселе и Штейнера содержала в себе роковую непоследовательность; ведь основной целью ее построения было устранение метрической геометрии или даже, как это вскоре и удалось, построение метрической геометрии как особой части проективной; между тем важнейшее понятие проективной геометрии — двойное отношение, а вместе с ним и построение общей проективной координатной системы, — покоилось на определении, имеющем метрическое происхождение.

Как видно уже из названия, „двойное отношение"

$$DV = \frac{(\xi - \xi')\ (\xi'' - \xi''')}{(\xi - \xi''')\ (\xi'' - \xi')} = x$$

было определено как отношение отрезков или расстояний в обычном смысле этого слова.

Сделать же это отношение „общей проективной координатой" x относительно трех основных точек

$$\xi = \xi' \quad \text{или} \quad x = 0,$$
$$\xi = \xi'' \quad \text{или} \quad x = 1,$$
$$\xi = \xi''' \quad \text{или} \quad x = \infty,$$

установить далее, путем соответствующего построения, проективную шкалу на прямой и в соответствии с этим ввести трилинейные координаты в плоскости и тетраэдральные в пространстве — все это было очевидной непоследовательностью, если принять во внимание, что цель заключалась в освобождении от метрической геометрии, основное понятие которой — „расстояние" — являлось основой и всего этого построения.

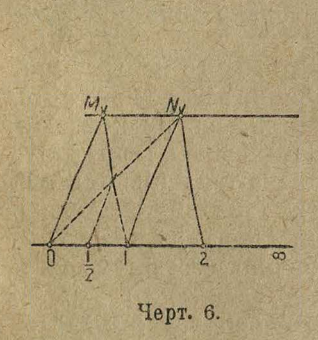
Радикальное изменение во всем этом произвел Штаудт, отчетливо понявший не только то, что независимое от метрики определение общих проективных координат необходимо, но и то, что оно возможно. Чтобы уничтожить даже воспоминание о прежней непоследовательности, он отказался от термина „двойное отношение" и наименовал соответствующую характерную для проективной геометрии конфигурацию четырех точек словом *Wurf*. Вурф, образуемый точкой P с тремя произвольно выбранными основными точками 0, 1, ∞, представляет собой число, которое и выбирают за координату точки P.

Чисто проективно-геометрическое определение численного значения, обозначаемого как вурф, можно получить путем построения мебиусовой сети. Пользуясь современной термино-

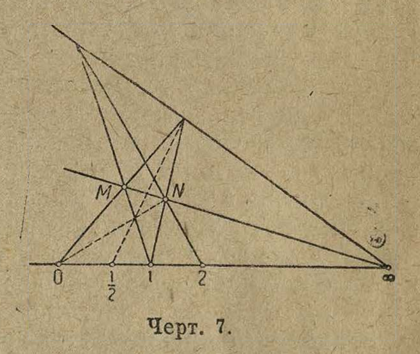
логией, можно выразить идею Штаудта, высказанную им в 1847 г., так: численная шкала вурфов для точек на прямой может быть построена после выбора трех основных неподвижных точек чисто проективным образом, т. е. путем соединения точек прямыми и путем построения точек пересечения прямых.

Соответствующее построение представляет собой не что иное, как уже известное нам построение мебиусовой сети.

В обычном метрическом случае, который предполагает еще и умение проводить прямые, параллельные данной, это построение могло бы быть выполнено так (черт. 6). Через точки 0 и 1 проведем два произвольных луча; через точку их пересечения M проведем прямую, параллельную прямой 01; через точку 1 — прямую $1N$, параллельную $0M$. Тогда прямая, проведенная через точку N параллельно прямой $1M$, пересечет прямую 01 в точке 2. Теоремы о равенстве противоположных сто-



Черт. 6.



Черт. 7.

рон параллелограма уже достаточно для уяснения того, что указанное построение приведет к обычной метрической шкале. Проводя диагонали и через точки их пересечения параллельные прямые, мы получим все двоично рациональные точки, а затем и все рациональные точки нашей шкалы.

Чтобы получить теперь построение проективной координатной шкалы, соответствующей трем произвольно выбранным основным точкам, достаточно только проективно видоизменить чертеж 6, принимая за бесконечно удаленную прямую любую прямую, находящуюся на конечном расстоянии от точки 0 (черт. 7).

Для того чтобы указанное построение действительно могло послужить для определения проективных координат, следовало бы еще очевидно доказать однозначность этого построения, т. е. следовало бы показать, что после выбора трех основных точек построение приведет к одной и той же шкале, независимо от того, какие произвольные прямые были проведены через основные точки. К сожалению, у нас нехватает времени для изложения этого доказательства, которым мы обязаны именно Штаудту. Мы займемся лучше выяснением того, как распространяется указанное им построение на всю систему чисел анализа.

Воодушевленные проективной геометрией последователи часто ее переоценивали. Тут следует сначала выяснить одно недоразумение. Вследствие легкости и изящества, с которыми проективная геометрия, исходя из немногих основных понятий, быстро приводила к глубоко содержательным предложениям, возникло убеждение, что на этом пути будут преодолены труднейшие проблемы аксиоматического характера, тесно связанные со всем развитием евклидовой геометрии. Так, Ганкель в блестяще прочитанной, но по содержанию однако недостаточно обоснованной, вступительной речи (Тюбинген 1869) сказал, что новая геометрия и представляет собой тот „царский путь“, в котором несправедливо отказал Евклид царю Птолемею [1]).

Евклид однако был совершенно прав: в математике *не* существует „царского пути“. Даже тогда, когда проникают в ее глубины со стороны проективной геометрии, — возникают в свое время те самые трудности, которые появлялись и в метрической геометрии, и они могут быть преодолены только тонкими логическими исследованиями.

Так, например, после выполнения штаудтовского построения, которое дает нам все рациональные значения координаты x, встает вопрос об иррациональных значениях и об их истолковании в геометрии. И так же, как и в метрической геометрии, существующая пропасть может быть преодолена только с помощью аксиомы, которую можно сформулировать так: всякому значению, принадлежащему численному ряду, дополненному до непрерывности с помощью дедекиндовых сечений, должна соответствовать точка на прямой, и обратно.

Введение в проективную геометрию аксиомы непрерывности, и в особенности представления о сколь угодно точном приближении к иррациональному значению путем последовательного построения рациональных точек мебиусовой сети, сопровождалось удивительным образом всякого рода заблуждениями. Некоторые логики полагали, что вообще нельзя говорить о предельном переходе, поскольку в проективной геометрии не существует не только понятия о величинах бесконечно малых или становящихся бесконечно малыми, но даже понятия о большем и меньшем расстояниях. К сожалению, я не могу более обстоятельно остановиться на этих трудностях. Я упомяну только о двух обстоятельствах, из которых вытекают, по моему мнению, указанные выше логические затруднения. Первое заключается в плохом понимании того содержания, которое вложено в термин „мера отрезка“. Метрическая геометрия могла способствовать укоренению наивного представления о мере как о количестве каких-то элементов, например о количестве единичных отрезков, заключающихся в данном, т. е. о мере как о количественном значении. Но уже в метрической геометрии это представление

---

[1]) H. Hankel, Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, Vortrag, Tübingen 1869.

отказывается служить в приложении к иррациональным числам, а в проективной геометрии оно уж и совершенно неприменимо. Численное значение координаты имеет здесь исключительно характер порядкового числа. И именно только это однозначное расположение координатных значений и необходимо для выполнения предельного перехода. В непонимании этого и лежит, как мне кажется, вторая трудность. Многие очевидно связывают предельный переход, вследствие его исторического происхождения от наглядно геометрических представлений, с тем, что по сути вовсе не является для него существенным. Вместо единственно необходимых понятий „становится меньше“ и „находится ближе“ появляются понятия „малый“ и „близкий“, которые однако при предельном переходе не играют никакой роли.

После преодоления трудности введения иррациональных координат аналитическое построение проективной геометрии может быть проведено с такою же строгостью, как и построение метрической, и построенная теория будет так же всеобъемлюща вплоть до изучения любых трансцендентных кривых. Естественно, что при этом будут применены однородные координаты $x_1:x_2:x_3$ (в плоскости) и плюкеровский метод трактовки уравнений.

Черт. 8.

На этом я оставлю область обоснования проективной геометрии, чтобы перейти ко второму крупному достижению Штаудта — *интерпретации мнимых чисел в проективной геометрии* („Beiträge“, 1857).

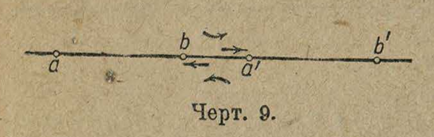
Можно, конечно, стать на ту точку зрения, что нет нужды ни в каком геометрическом истолковании мнимых чисел, поскольку вполне установлена тесная связь между геометрией и анализом, потому что тогда логическая структура анализа дает возможность достаточно глубоко проникнуть и в геометрические отношения. И действительно, такой логически неопровержимой точки зрения держатся многие исследователи. Однако этим не удовольствуется ни один истинный геометр, ибо он дорожит и гордится именно тем, что имеет возможность видеть все то, о чем он мыслит. И поэтому он будет пытаться, оставаясь в области вещественного, дать геометрическое истолкование мнимых элементов, чтобы освободить их этим от всякого мистического налета.

Основная мысль, предложенная еще до Штаудта, заключалась в том, чтобы изобразить пару комплексных сопряженных точек вещественной инволюцией второго рода, — т. е. совокупностью всех пар точек, гармонически сопряженных с основною парою точек, — индуцированной этой комплексной парой точек на вещественной прямой, ими определяемой. Заданием двух разделяющих друг друга пар точек a, a'; b, b' (черт. 8) инволюция вполне определяется, а следовательно, однозначно определяется и некоторая пара комплексных сопряженных точек, изображаемая этой инволюцией. Точно так же два комплексных

сопряженных луча изображаются инволюцией второго рода в вещественном пучке лучей. Так как инволюция есть понятие проективного характера, то мы получили, следовательно, проективную вещественную интерпретацию двух сопряженных комплексных элементов.

Однако такого рода истолкование пригодно только для *пары* элементов; следовало еще указать метод, дающий возможность сделать наглядным (в вещественной области) различие между обоими элементами интерпретируемой комплексной сопряженной пары. Это и удалось сделать с помощью гениальной мысли Штаудта, по которой прямая, на которой определена инволюция, получала определенное „направление", указываемое на чертеже стрелкой.

Для лучшего уяснения воспользуемся на мгновение геометрическими образами совсем иного рода: представим себе, что наша прямая дополнена до гауссовой плоскости; тогда обе основные точки инволюции будут расположены симметрично относительно нашей вещественной прямой, т. е. в двух разных гауссовых полуплоскостях. Для того же, чтобы отличить друг от друга эти полуплоскости геометрически наглядным и связанным с нашей прямой способом, присоединим к ней стрелку и заключим условие, по которому прямая, снабженная стрелкой, изображает ту полуплоскость, которая при движении в направлении, указанном стрелкой, будет обходиться против часовой стрелки (черт. 9). Соответствующее условие следует заключить и для пучка лучей.



Черт. 9.

Таким образом мы достигаем искомого разделения и каждому мнимому элементу мы относим вещественный геометрически наглядный образ, над которым уже могут быть выполнены различные построения. Следовательно, для Штаудта мнимая точка представляет собой не что иное, как инволюцию второго рода, определенную на прямой, на которой указано также и направление; мнимая прямая есть инволюция второго рода, определенная в пучке, в котором указано и направление. Задача о проведении прямой через вещественную точку P и через мнимую точку Q равносильна задаче: по заданной точке P и по заданной инволюции Q на прямой, на которой указано направление, построить инволюцию в пучке прямых, проходящих через точку P, и указать в этом пучке направление [1]).

Исходя из такой интерпретации, мы получаем возможность дополнить построенную нами на плоскости и на прямой проек-

[1]) Эта задача будет решена, если мы точку P соединим со всеми точками прямой, на которой определена инволюция Q: мнимая прямая будет представлена инволюцией в построенном пучке, соответствующей инволюции Q; точно так же и направление в пучке будет соответствовать направлению на прямой. *Прим. перев.*

тивную систему координат введением точек с мнимыми координатами, создавая с помощью построений соответствующие им геометрически наглядные образы. Действительно, пусть $u+iv$ и $u-iv$ будут две комплексные сопряженные точки. Тогда уравнение этой пары будет

$$[x-(u+iv)]\cdot[x-(u-iv)]=(x-u)^2+v^2=0,$$

а уравнение инволюции, определяемой этой парой, будет

$$(x-u)\cdot(x'-u)+v^2=0.$$

Переходя с помощью преобразования

$$x=\frac{\xi}{\tau},\quad x'=\frac{\xi'}{\tau'}$$

к однородным координатам, мы получим уравнение этой инволюции в виде

$$(\xi-u\tau)\cdot(\xi'-u\tau')+v^2\tau\tau'=0.$$

Отсюда уже не трудно найти координаты двух пар взаимно соответственных точек инволюции. После соответствующих вычислений получим

$$\tau'=0,\qquad \frac{\xi}{\tau}=u,$$

$$\frac{\xi'}{\tau'}=1+u,\quad \frac{\xi}{\tau}=u-v^2.$$

Черт. 10.

Таким образом, две пары соответствующих точек (черт. 10) имеют координаты

$$x=u,\qquad x'=\infty,$$

$$x=u-v^2,\quad x'=u+1,$$

значения которых могут быть отложены на координатной прямой. Если, следовательно, будет поставлена задача проективно построить точку $u+iv$, то мы построим точки с координатами $u-v^2$, u, $u+1$, ∞ и будем рассматривать их как две разделяющие друг друга пары точек искомой инволюции; направление на прямой совпадает с направлением, в котором расположены точки 0, 1, ∞ [1]).

Я покажу теперь более подробно на одном примере, на котором мы уже останавливались, когда говорили о Плюкере, применение этого метода в геометрическом исследовании. Мы уже говорили о теореме, по которой всякая плоская кривая третьего порядка C_3 имеет девять точек перегиба, из которых три всегда действительны, а шесть — мнимых, причем каждым двум соответствует третья, лежащая с первыми двумя на одной прямой, и все они таким образом лежат на двенадцати свое-

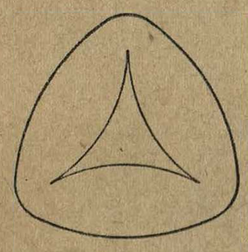
---

[1]) Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, т. 2, стр. 133 и сл., 3-е изд., Berlin 1925.

образно расположенных прямых. Естественно возникающая теперь задача состоит в том, чтобы, исходя из интерпретации Штаудта, представить в геометрически наглядном виде эти девять точек перегиба и определяемую ими конфигурацию.

Для облегчения заменим поставленную задачу другой, принципиально от нее мало отличающейся. А именно, дуализируем проблему и рассмотрим, следовательно, вместо кривой третьего порядка C_3 кривую третьего класса C^3. Согласно сформулированной выше теореме эта кривая имеет девять касательных возврата, которые по три проходят через одну точку. Задача состоит окончательно в том, чтобы представить эти девять касательных возврата и 12 точек, в которых пересекаются соответствующие тройки касательных возврата.

Согласно формулам Плюкера рассматриваемая кривая третьего класса представляет собой кривую шестого порядка, которая после соответственного симметрирования имеет примерно вид, указанный на черт. 11. Раньше всего мы займемся нахождением вещественных точек, через которые проходят мнимые касательные. Это будут те точки, через которые можно провести только одну вещественную касательную к кривой C_6. Они заполняют кольцеобразную область и даже дважды заполняют ее, ибо каждая точка является носителем двух мнимых касательных. [Если представить себе кольцеобразную связную поверхность так, чтобы вид на нее спереди был такой, как указано на черт. 11, то можно уяснить себе понятие о „римановых поверхностях нового типа", рассмотренных мною в седьмом томе Math. Annalen. Каждая точка этой части пространства является вершиной инволюции пучка лучей, в которой можно установить два направления, соответственно передней и задней стороне рассматриваемой кольцеобразной поверхности [1]).]



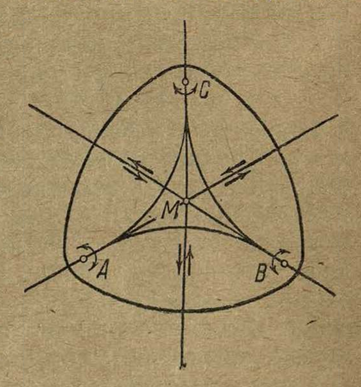
Черт. 11.

Теперь уже не трудно перейти к построению девяти касательных в точках возврата. Кроме трех вещественных касательных имеются еще три инволюции лучей, носителями которых являются три точки упомянутой нами выше части пространства; при симметрическом черчении они являются прямоугольниками. Каждая из этих трех точек должна лежать на одной из вещественных касательных возврата, как это следует из теоремы о 12 точках, в которых пересекаются (по три) все касательные в точках возврата (черт. 12). Эти 12 точек получаются следующим образом: точка 1, — центральная точка M на чертеже, — как пересечение трех вещественных касательных; точки 2–4, — точки A, B, C, при которых указано двойное направление, в которых пересекаются одна вещественная и две

---

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 2, стр. 89 и сл.; см. также стр. 69.

сопряженные мнимые касательные; точки 5—10 представлены тремя инволюциями (с двумя направлениями) на прямых AM, BM, CM; в этих точках пересекаются одна вещественная касательная с двумя мнимыми, но не сопряженными касательными. Например в инволюции на прямой CM с направлением $\overrightarrow{CM}$ пересекаются прямая CM с инволюциями лучей $A\circlearrowright$ и $B\circlearrowright$; точки 11,12 — две циклические точки или инволюция (с двумя направлениями) на бесконечно удаленной прямой. В них пересекаются три мнимые касательные, проходящие через точки A, B, C, а именно, касательные $A\circlearrowleft$, $B\circlearrowleft$, $C\circlearrowleft$ в одной и $A\circlearrowright$, $B\circlearrowright$, $C\circlearrowright$ в другой. Это почти тривиальное решение поставленной нами задачи не оставляет желать ничего лучшего в смысле наглядности.



Черт. 12.

На этом я оставлю рассмотрение достижений, которыми проективная геометрия обязана Штаудту, и перейду к описанию ее развития во Франции и Англии, которое шло одновременно, но независимо от описанного хода идей. Из большого количества значительных достижений я, как и раньше, остановлюсь прежде всего на том, что сделалось характерным для взаимоотношений между проективной и метрической геометрией.

Начав с Франции, следует сказать о Михаиле Шале (Michel Chasles) как о типичном представителе французской математической школы того времени. Родившись в 1793 г. (в Эперноне близ Парижа), он собственно принадлежит более раннему поколению, но благодаря своеобразно сложившемуся развитию его жизни период его научной продуктивности начался сравнительно поздно.

Еще будучи учеником Политехнической школы, он в 1813 г. напечатал в ее журнале интересную работу об образовании однополостного гиперболоида. Однако в дальнейшем он совсем отошел от научной жизни и поселился в провинции, на своей родине в Шартре. Там он занялся банковской деятельностью и, занимаясь ею в течение многих лет, нажил этим большое состояние. Только в 1837 г., т. е. 44 лет от роду, он выступил со своим первым большим произведением *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes de la géométrie* („Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов“).

В 1841 г. он стал профессором по курсу машиностроения в Политехнической школе, и с этого момента начинается подъем в его общественной и научной жизни. В 1846 г. была создана в Сорбонне специально для него кафедра высшей геометрии.

Руководя этой кафедрой, он все больше и больше руководил и развитием французской геометрии, занимая в ней центральное место, а его многочисленные литературные труды и широко развернувшаяся, создавшая школу, учебная деятельность способствовали росту французской науки. Влиянию Шаля способствовала также его долгая жизнь. Он умер в 1880 г., 87 лет от роду.

В своих более поздних работах Шаль занимался исследованием алгебраических образов более высокого порядка. Здесь он становится создателем особого направления, которое носит теперь название „вычислительной геометрии". Основная задача последней заключается в установлении числа решений определенных алгебраических проблем при помощи геометрических соображений, в предположении, однако, что основные алгебраические понятия уже установлены. В дальнейшем я подробно остановлюсь на этой дисциплине.

В настоящий момент нас интересует то новое, что внес Шаль в изучение образов первого и второго порядков, и прежде всего его построение синтетической проективной геометрии и включение в нее метрической геометрии.

Особенно характерным для работ Шаля в этом направлении является его труд *Traité de géométrie supérieure* („Курс высшей геометрии", 1852). Тот, кто читал Мебиуса и Штейнера, найдет в ней, по сути, много известного материала; тем не менее Шаль совершенно проходит мимо идей Штаудта.

Так же как и Мебиус, Шаль устанавливает и строго проводит правило сложения направленных отрезков, выделяет, как основное, понятие о двойном отношении четырех точек или прямых, занимается общей теорией коллинеаций и принципом двойственности; так же как и Штейнер, он изучает проективное построение конических сечений при помощи проективных пучков или рядов точек. Возможно, что Шаль в течение долгого времени владел этими идеями, но опубликовал он их только тогда, когда они уже получили в Германии свое полное выражение. В этом отношении, следовательно, заслуга Шаля заключается только в том, что он способствовал перенесению этих идей во Францию, а также вследствие широкого влияния французского образования — и в Англию, Италию, Скандинавию и т. д.

В своих работах Шаль пользуется терминологией, совершенно отличающейся от немецкой; с ней следует ознакомиться, ибо она получила широкое распространение; в некоторой своей части она основывается на переводе латинских терминов на греческий язык. Двойное отношение Шаль называет „ангармоническим отношением", что по греческому происхождению термина должно обозначать „отношение, обобщающее гармоническое отношение", — термин, на мой взгляд, весьма неудачно выбранный. „Коллинеацию" Шаль называет соответствующим греческим словом „гомография". Вместо дуального преобразо-

вания он говорит о „корреляции“, так что этот термин имеет у него совсем иной смысл, чем у старшего Карно. Даже терминология Понселе сильно изменена Шалем и, на мой взгляд, это не способствовало ее улучшению. Если Понселе пытался сделать наглядными мнимые элементы при помощи своего несколько мистического принципа непрерывности, то Шаль уже говорит о тех соотношениях, которые имеют место только в вещественной области, как о случайных свойствах („qualités contingentes“), не указывая при этом никаких признаков, по которым в каждом отдельном случае можно было бы определить, какое свойство „существенное“ и какое „случайное“. Так, например, две окружности всегда имеют вещественную радикальную ось; в некоторых случаях они имеют две вещественных точки пересечения, которые по Шалю будут „случайными“. Но как с помощью понятия о „случайных свойствах“ выразить, что общая кривая C_3 имеет девять точек перегиба, из которых три вещественных, а шесть мнимых?

В работах Шаля, в особенности в его *Aperçu historique*, проявляется однако и совершенно новое направление: стремление к выяснению исторического развития науки. Шаль указал многих предшественников по работе в новой геометрии и возвратил им то место, которое они заслуживали. Это относится, например, к Дезаргу (Desargues), который проявил в 1630 г. значительную продуктивность и имя которого и теперь еще широко известно благодаря теореме Дезарга. Особенно велика заслуга Шаля в отношении трех потерянных книг Евклида, так называемых „Поризмов“; он высказал предположение, что в них заключалось изложение простейших проективных соотношений, — предположение, вполне подтвердившееся дальнейшими исследованиями.

Исследования по истории математики, которые под влиянием Шаля получили значительное развитие, принесли с собой очень много ценного. Они дали возможность установить глубокую зависимость, существующую между отдельными исследованиями, и выяснить исторический ход научных достижений, заключающийся в чередовании прогресса и регресса. Мысль, по которой всякая новая идея, казалось бы принадлежащая отдельному творцу, была уже подготовлена работой предшественников („ничто не ново под луной“ — так выражает несколько грубо эту мысль народная поговорка), не могла показаться приятной некоторым лицам, одаренным большой творческой продуктивностью. Ведь она ограничивает в равной мере как собственную оценку своих достижений, так и оценку со стороны окружающих. Этим и объясняется та вражда, которую вызвал к себе Шаль со стороны некоторых лиц: ведь утверждал же, например, Понселе, этот ожесточенный противник Шаля во многих областях, что *Aperçu historique* специально и исключительно для того и написано, чтобы понизить значение достижений его, Понселе.

В 1861 г. Шалю удалось получить большую коллекцию автографов, и с 1867 по 1869 г. он печатал выдержки из нее, вызывавшие большой интерес. Он начал с публикации писем юного Паскаля, относящихся к 1650 г., в которых тот предвосхищал основные идеи ньютоновой теории тяготения в том ее виде, в каком она была Ньютоном изложена в 1687 г. Далее последовали публикации все более фантастических документов, например письма Марии Магдалины к апостолу Петру, написанные якобы в Марселе, частное письмо Вара к Цезарю и т. д.

Эти публикации вызвали тотчас же весьма горячие возражения, в особенности со стороны астронома Леверрье (Leverrier). Все же Французская академия в течение двух лет живейшим образом занималась этими вещами, что видно хотя бы из того, что Comptes rendus за годы с 1867 по 1869 г. заполнены этими публикациями, пока наконец Шаль не вынужден был признать, что он сделался жертвой грандиозной подделки.

Вся эта история, привлекшая к себе в свое время внимание, изложена ввиду ее особого интереса с точки зрения психологической в так называемом новом „Pitaval“ (собрании замечательных юридических казусов), где и можно найти подробности. Нельзя однако не заинтересоваться и личностью фальсификатора, пойманного в конце концов с поличным. Кроме несомненно присущих ему большой ловкости и значительных познаний, он обладал еще большим чувством юмора, которое давало ему возможность втайне наслаждаться тем, что он водит за нос выдающихся академиков.

После этой отрицательной критики я хотел бы перейти к тому положительному, чего достигли Шаль, а вместе с ним и французская школа, в вопросе о взаимоотношениях между проективной и метрической геометрией. Существенное заключается в рассмотрении *сферической окружности* в бесконечно удаленной плоскости и циклических точек на бесконечно удаленной прямой как реальных образов.

Я предпошлю этому несколько разъяснений в аналитической форме, подобных тем, какие были сделаны впервые Плюкером (Crelle's Journal, т. 5, 1830).

Чтобы ввести однородные координаты, заменим x, y, z через $\frac{\xi}{\tau}$, $\frac{\eta}{\tau}$, $\frac{\zeta}{\tau}$. Тогда сферическая окружность сможет быть задана уравнением

$$\tau = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0.$$

Тут же следует отметить, что нелепо говорить о „бесконечно удаленной“ сферической окружности. Расстояние от нулевой точки задается выражением

$$r = \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\tau^2}}.$$

Для точек на сферической окружности это выражение равно $\frac{0}{0}$, т. е.

имеет неопределенное значение. Другими словами, расстоянию от нулевой точки до любой точки на сферической окружности может быть приписано любое значение; только этим обстоятельством можно объяснить, почему эти точки принадлежат шару любого радиуса.

Исследователи французской школы особенно часто пользовались полученной ими теоремой о взаимно ортогональных направлениях. Как известно, ортогональность двух направлений имеет тот проективный смысл, что эти направления гармонически сопряжены относительно сферической окружности, ибо ортогональность направлений выражается равенством

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0,$$

т. е. равенством, полярным относительно равенства

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0.$$

Тут также возникают мнимые противоречия, если пользоваться, как это делали французские исследователи, прямыми, пересекающими сферическую окружность. Пусть для простоты, такая прямая проходит через начало координат. Тогда для точек, лежащих на ней, имеем равенство $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$, откуда и получается представление, будто она перпендикулярна самой себе, а ее длина кроме того равна нулю.

Вследствие этих парадоксальных свойств Ли в начале своей жизненной карьеры (1869/70) называл эти линии не иначе, как „сумасшедшими прямыми". Позже в своих печатных работах он их называл более вежливо *минимальными прямыми*. Во Франции за ними укрепилось название *изотропных прямых* (*droites isotropes*), ведущее свое происхождение от того факта, что при любом вращении вокруг нулевой точки остаются неизменными две такие прямые, соединяющие центр вращения с двумя циклическими точками, лежащими в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

По сути во всех этих удивительных соотношениях мы опять имеем дело с неопределенными значениями. В самом деле, угол между двумя прямыми, выходящими из нулевой точки и имеющими направления $\xi : \eta : \zeta$ и $\xi' : \eta' : \zeta'$, равен

$$\arccos \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \cdot \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}}.$$

Если же сближать эти прямые до совпадения, т. е. приближаться к равенству

$$\xi' : \eta' : \zeta' = \xi : \eta : \zeta,$$

и принять во внимание, что речь идет о прямых, пересекающих сферическую окружность, т. е. что $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$, то предельное значение угла между двумя стремящимися к совпадению прямыми будет $\arccos \frac{0}{0}$. Искомый угол будет опять-таки

величиной неопределенной, и ему можно приписать значение 90° — соответствующее нулевому значению числителя — с таким же правом, как и всякое другое значение. Что касается длины этой прямой, то она действительно равна

$$r = \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\tau^2}} = 0,$$

исключая случай, когда $\tau = 0$. Другими словами, прямая, проходящая через нулевую точку и пересекающая сферическую окружность, пересекает бесконечно удаленную плоскость на неопределенном расстоянии, как это и должно быть, ибо пересечение происходит в одной из точек сферической окружности.

Эти соображения были использованы французскими учеными для весьма своеобразных умозаключений, с помощью которых они приходили с большой легкостью — „по воздуху“, как имел обыкновение говорить Ли, — к важным геометрическим результатам. Принципиальное исследование такого рода манеры мыслить я особенно рекомендовал бы философам, которые довольно часто ограничиваются исследованием математических тривиальностей.

Как типичный пример указанного метода рассуждений я хочу рассмотреть доказанную Шалем (*Aperçu historique*, Note 31, стр. 384 и сл., 2-е изд.) теорему, согласно которой конфокальные поверхности второго порядка являются поверхностями, вписанными совместно с сферической окружностью в одну и ту же мнимую развертывающуюся поверхность, единственную вещественную часть которой представляют две двойные кривые, состоящие из фокальных кривых семейства.

Уравнение точек, лежащих на конфокальных поверхностях F_2, в однородных координатах имеет вид

$$\frac{\xi^2}{a^2 - \lambda} + \frac{\eta^2}{b^2 - \lambda} + \frac{\zeta^2}{c^2 - \lambda} = \tau^2.$$

Если ввести однородные тангенциальные координаты, то это семейство будет задано уравнением

$$(a^2 - \lambda) u^2 + (b^2 - \lambda) v^2 + (c^2 - \lambda) w^2 = \omega^2$$

или

$$(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - \omega^2) - \lambda (u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Так как $u^2+v^2+w^2=0$ есть уравнение сферической окружности в тангенциальных координатах, то имеем, следовательно, семейство поверхностей второго класса, включающее в себя и сферическую окружность (при $\lambda = \infty$). Все эти поверхности имеют общий геометрический образ

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - \omega^2 = 0,$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$

который и представляет собой развертывающуюся поверхность.

Из этих соотношений Шаль очень легко получает теорему, по котор й не только конфокальные поверхности F_2 ортогональны в обычном смысле этого слова, но и контуры их, рассматриваемые из произвольной точки, пересекаются под прямым углом.

Рассмотрим прямую, соединяющую глаз с точкой пересечения двух рассматриваемых проекций. Эта прямая касается двух соответствующих поверхностей F и F' семейства. Кроме того, через нее проходят по две касательных плоскости к каждой другой поверхности семейства, и эти пары плоскостей определяют инволюцию, основные двойные элементы которой суть касательные плоскости T и T', проведенные к поверхностям F и F' через точки касания нашей прямой с этими поверхностями. Таким образом, две плоскости, касательные к какой-нибудь поверхности семейства и проходящие через нашу прямую, будут гармонически сопряжены с плоскостями T и T'. Но в число поверхностей семейства входит и сферическая окружность, следовательно касательные к ней плоскости, проходящие через нашу прямую, будут также гармонически сопряжены с плоскостями T и T'.

Так как гармоническая сопряженность двух пар плоскостей есть свойство взаимное, то отсюда уже с очевидностью следует, что плоскости T и T' ортогональны.

Таков образец геометрических заключений, которые сделались обычными для этой школы геометров. Удивительно, как много содержания было накоплено в этих немногих общих понятиях, при более полном и углубленном рассмотрении которых возникали почти самоочевидные следствия, полные однако весьма сложного содержания.

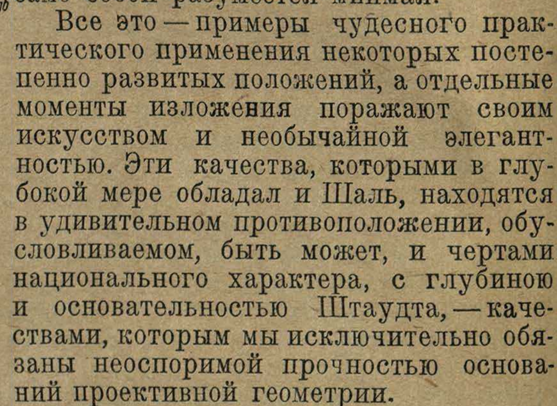
Вначале Шаль осторожно пользовался такого рода манерой мыслить, скрывая ее даже от читателя; только позже он стал ее применять с большей свободой и простотой, добиться которой более молодое поколение считало делом чести. Это математическое направление достигло своего расцвета в 1870 г., ко времени моего совместного с Ли пребывания в Париже. Для того чтобы показать, как высоко было развито это математическое орудие и как виртуозно им научились пользоваться, я приведу еще один пример.

Проблема, над которой много работали в то время, заключалась в определении *линий кривизны* на заданных поверхностях; это удавалось, вообще говоря, сделать с помощью интегрирования только в немногих отдельных случаях. Но тогда Дарбу (Darboux) удалось обнаружить, исходя из интересующего нас теперь круга идей, что на всякой поверхности может быть непосредственно определена одна линия кривизны, а именно линия соприкосновения данной поверхности с развертывающейся поверхностью, описанной одновременно относительно данной поверхности и относительно сферической окружности.

Эту теорему можно доказать следующим образом. Линии кривизны можно определить как линии на поверхности, образованные из оснований последовательно пересекающихся нор-

малей к поверхности. Нормаль, проведенная к поверхности в точке соприкосновения с минимальной плоскостью, лежит в этой плоскости и соединяет точку касания с точкой, лежащей на сферической окружности, согласно теореме, по которой нормаль к плоскости всегда проходит через полюс относительно сферической окружности. Эти нормали — они же минимальные прямые — действительно будут пересекаться при постепенном изменении положения минимальной плоскости, одновременно касательной к поверхности и к сферической окружности (черт. 13).

Таким образом, при указанном перемещении плоскости, последовательные положения которой и образуют упомянутую развертывающуюся поверхность, на поверхности образуется линия кривизны, само собой разумеется мнимая.



Черт. 13.

Все это — примеры чудесного практического применения некоторых постепенно развитых положений, а отдельные моменты изложения поражают своим искусством и необычайной элегантностью. Эти качества, которыми в глубокой мере обладал и Шаль, находятся в удивительном противоположении, обусловливаемом, быть может, и чертами национального характера, с глубиною и основательностью Штаудта, — качествами, которым мы исключительно обязаны неоспоримой прочностью оснований проективной геометрии.

Рассмотрением этих немногих вопросов мы принуждены ограничиться. Для дальнейшего изучения я сошлюсь на богатую литературу, из которой упомяну здесь только следующие книги:

Chasles, Rapport sur les progrès de géométrie en France, Paris 1870.

Enzyklopädie, т. III, C 1 (Dingeldey), C 2 (Staude).

E. Kötter, Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (Jahresber. d. D. M. V., т. 5, 1901).

Следуя за развитием проективной геометрии в 40-х годах, мы неожиданно переносимся из Франции в Англию, в которой возникло совершенно самостоятельное направление, побуждаемое лишь влиянием литературы.

Прежде всего перед нами предстает ученый исключительного значения — Артур Кели (Arthur Cayley). Он родился в 1821 г. в Ричмонде, но вырос в Петербурге, где жил его отец, принадлежавший к купеческому сословию. С 1838 по 1841 г. он учился, как это было в обычае, в Кембриджском университете; в 1841 г. он достиг там высших степеней отличия, существующих в староанглийской системе обучения (senior wrangler

и first Smith'prizeman). В том же 1841 г. впервые появились в печати, в Cambridge Journal, его труды. Побудительные стимулы для этих работ он черпал исключительно из литературы, преимущественно из работ Якоби и французских ученых. Как и у Шаля, во внешней жизни Кели наступает резкая перемена: в 1843 г. он начинает заниматься адвокатурой в Лондоне, и этого рода деятельности он остается верным в течение 20 лет. Навсегда останется непонятным, как он сумел совместить эту требующую глубокого внимания профессию с ничем не сравнимой математической продуктивностью, что его и отличает от Шаля. Именно за этот период и появились все основные работы Кели. С 1863 г. он сделался профессором в Кембридже, где, согласно тамошней традиции, собрал вокруг себя совсем небольшое число слушателей, а остававшееся от учебной работы время делил между собственными научными занятиями и административной работой по университету. Свою тихую трудовую жизнь он окончил 26 января 1895 г.

Многочисленные и широкообъемлющие труды Кели изданы в 13 больших томах, из которых один представляет собой прекрасно обработанный Форзайтом (Forsyth) регистр. Содержание их распространяется на различные области нашей науки (например механику и астрономию), но в основном Кели является исследователем и в широком смысле создателем современной алгебраической геометрии как со стороны теории инвариантов, так и в ее геометрической части.

В настоящей связи нас интересуют те достижения, которые ему удалось получить в вопросах уяснения взаимоотношений между проективной и метрической геометрией. Раньше всего нам предстоит рассмотреть его знаменитую работу *A Sixth Memoir on Quantics* („Шестой мемуар о формах", London, „Phil. Trans"., 1859; Papers, т. II, стр. 561). Слово „Quantic" означает „форму", т. е. однородный полином относительно двух, трех или многих переменных, в зависимости от чего форму называют бинарной, тернарной и т. д.

Главная мысль Кели, которую мы и предпошлем всему нашему изложению, заключается в следующем: основные понятия метрической геометрии суть коварианты сферической окружности относительно произвольных линейных преобразований однородных координат. При этом для дальнейшего достаточно определения, по которому инвариантными и ковариантными называются выражения, которые находятся в такой зависимости с основным образом (в данном случае со сферической окружностью), которая не нарушается после линейного преобразования.

Согласно традиции, инвариантами называют эти выражения тогда, когда в них входят только константы, характеризующие заданные образы; если же в них входят и переменные, то они называются ковариантами. Но так как всегда можно постоянные ввести как новые переменные, то различие между инвариантами и ковариантами не существенно.

Подобным ковариантом сферической окружности является, например, угол между двумя плоскостями, который в коэфициентах задается формулой

$$\arccos \frac{u \cdot u' + v \cdot v' + w \cdot w'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}},$$

в числитель которой входит поляра основной формы — ее простейший ковариант, а в знаменатель—сама форма.

Соответственно этому расстояние между двумя точками, заданными своими однородными координатами, определяется в точечных координатах формулой

$$r = \sqrt{\frac{(\xi\tau' - \xi'\tau)^2 + (\eta\tau' - \eta'\tau)^2 + (\zeta\tau' - \zeta'\tau)^2}{\tau^2 \cdot \tau'^2}},$$

числитель которой исчезает, если обе точки лежат на минимальной прямой, а исчезновение знаменателя соответствует бесконечно удаленной плоскости.

Если говорят, что аналитическое выражение угла между двумя плоскостями представляет собой ковариант сферической окружности, то это означает следующее: если после перехода с помощью линейного преобразования от прямоугольных координат к произвольной системе однородных координат u_1, u_2, u_3, u_4 уравнение сферической окружности примет вид

$$\sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0,$$

то угол между двумя плоскостями будет задан формулой

$$\arccos \frac{\sum \alpha_{ik} u_i v_k}{\sqrt{\sum \alpha_{ik} u_i u_k} \cdot \sqrt{\sum \alpha_{ik} v_i v_k}},$$

где u_1, u_2, u_3, u_4 и v_1, v_2, v_3, v_4 характеризуют плоскости, угол между которыми требуется измерить.

Эти формулы приводят естественно к обобщению: если в какой-либо системе координат u_1, u_2, u_3, u_4 некоторое произвольное коническое сечение — не обязательно сферическая окружность — задано уравнением $\sum \alpha_{ik} u_i u_k$, то на его основе может быть построена квази-метрика, если сохранить приведенное выше выражение для „угла", соответственно определить „расстояние" и установить все обычные метрические понятия. Обобщая дальше, можно под $\sum \alpha_{ik} u_i u_k$ понимать любую квадратичную форму относительно четырех переменных, т. е. такую, равенство которой нулю определяет не коническое сечение, но произвольный образ второго порядка, который и можно положить в основу новой метрики.

В этом состоит основная мысль *общего проективного мероопределения* или, как говорят, *метрики Кели*. Место метрической геометрии внутри проективной, или, как выражается Ке-

ли, — дескриптивной геометрии, и более широкое значение последней Кели характеризует в достойном запоминания положении: „Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry and descriptive geometry is all geometry“ („Метрическая геометрия есть таким образом часть дескриптивной, а дескриптивная геометрия — вся геометрия“). Всякая метрическая геометрия представляет собой теорию инвариантов системы заданных образов, дополненной основной для метрики поверхностью второго порядка; обыкновенная метрическая геометрия соответствует тому случаю, когда к системе образов проективной геометрии присоединяется шаровой круг.

Теперь нам предстоит перейти к разработке и к выяснению в деталях этой основной мысли, и с этим связано мое собственное участие в ее развитии.

Возникающая здесь прежде всего задача состояла в том, чтобы изучить мероопределение Кели для всех случаев, соответствующих различным, с точки зрения проективной геометрии, образам второго порядка. Если ограничиться образами, характеризуемыми уравнениями с вещественными коэфициентами, то рассмотрению подлежат:

a. Невырождающиеся поверхности второго порядка:
   1) вещественные и линейчатые (однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид);
   2) вещественные и нелинейчатые (эллипсоид, эллиптический параболоид, двуполостный гиперболоид);
   3) мнимые поверхности.

b. Невырождающиеся кривые второго порядка:
   1) вещественные (эллипс, парабола, гипербола);
   2) мнимые.

c. Пары точек:
   1) вещественные;
   2) мнимые.

d. Двойная точка.

Случай b. 2) приводит к обычной метрике, если лежащее в основе коническое сечение — которое Кели называет *абсолютом* („the absolute“)—принять за шаровой круг. Случаи a. 2) и a. 3) приводят к обоим типам неевклидовой геометрии, изучение которых начато Гауссом, Лобачевским, Больяи и Риманом и которые получаются из обыкновенной геометрии в зависимости от того, считают ли сумму углов в треугольнике меньшей или большей, чем π.

Таким образом и эти геометрические системы включаются в проективную геометрию и теряют при этом свою парадоксальность. Такой путь является простейшим для выяснения особенностей этих геометрических систем и для установления их внутренней непротиворечивости.

Можно, конечно, остановиться и на остальных случаях, которые приводят к занятным и удивительно странным геометрическим системам. Случай $x^2+y^2+z^2-t^2=0$ в четырехмерном

пространстве или $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2=0$, если оставаться в трехмерном пространстве и пользоваться однородными координатами, получил в настоящее время особенное значение благодаря связи с физическим принципом относительности.

Я бы хотел здесь обратить внимание на своеобразную зависимость между чистой и прикладной наукой, которую, следуя Лейбницу, я мог бы охарактеризовать как „предустановленную гармонию“. Суть заключается в том, что очень часто теория, преследуя чисто научные цели, создает и исследует те основные понятия, применение которых сейчас же становится необходимым для овладения проблемой, выдвигаемой в смежной научной области. Можно было бы измерять ценность какого-нибудь нового научного построения тем, насколько широко оно может быть применено вне круга тех абстрактных образов, которые только и имел в виду его автор; но, конечно, чисто математический мир идей нужно сравнивать с цветущим деревом, от которого мы и не ждем, чтобы каждый его распустившийся цветок принес нам зрелый плод.

Изложение Кели не только должно было быть дополнено вышеуказанными построениями, но его следовало также освободить от некоторого несовершенства в основных вопросах и этим показать, что оно действительно представляет собой новое построение *основ геометрии*.

Суть дела заключается в выяснении первого шага всего построения — в введении координат. В изложении Кели они либо представляют собой просто переменные величины, геометрическое значение которых нас не интересует, либо вводятся обычным для метрической геометрии способом, при помощи евклидовых расстояний. Именно этому и следовало отчетливо противопоставить, что однородные координаты могут быть, следуя Штаудту, введены чисто проективным путем, как мы это показали выше.

Рассматриваемая геометрическая система строится, таким образом, по следующему плану:

1. Без помощи метрических соображений, на основе идей, указанных Штаудтом, обосновывается проективная геометрия. Пользуясь распространенными теперь терминами Гильберта, можно сказать, что мы устанавливаем здесь аксиомы расположения, связи и непрерывности и возводим на них геометрическую систему.

2. Разрабатываются, так сказать, про запас, различные частные случаи геометрии Кели, т. е. геометрии с проективным мероопределением.

3. Наконец вводится, как новая, аксиома, согласно которой „абсолют“ либо представляет собой линейчатую поверхность F_2, „внутри“ которой мы находимся, либо мнимую поверхность F_2, или же мнимое коническое сечение.

Во всех этих случаях конус касательных, проведенных из любой точки доступного нам пространства к абсолютному, будет

мнимым, что и приводит к привычному для нас способу измерения углов.

При такой переработке нисколько не меняется имманентное значение системы Кели, но вырастает ее значение в деле обоснования нашей конкретной геометрии. Вместо того чтобы внутри нашей метрической геометрии строить образы неевклидовой геометрии, мы обосновываем свободную от всяких метрических представлений проективную геометрию, которая содержит в себе как частные случаи, поддающиеся отчетливой классификации, все известные геометрические системы.

Когда я начал работать в этой области, для меня была ясной, даже совсем самоочевидной обрисованная картина взаимоотношений. Однако эти мои мысли натолкнулись на жестокое противодействие, с совершенно разных и взаимно противоречащих сторон и по основаниям самого различного рода; вот прекрасный пример того, как много приходится затратить труда, даже в нашей, кажущейся объективной, науке, для того чтобы провести новую идею. Тот, кто имел счастье ее обнаружить, столь ясно видит, как она вытекает из прежде известного материала и какие внешние формы она приобретает, что, выпуская ее в свет, он быть может недостаточно предохраняет ее от возражений и сомнений, которых ему не приходилось преодолевать, ибо он сам на них не наталкивался. Не приобщенные к его ходу мыслей современники, перед которыми неожиданно встает уже готовая картина, требующая признания права на существование, могут только с большим трудом — в особенности если они сами творчески работают в этой области — пойти по дороге, указанной творцом новой идеи и соответствующей его, а не их индивидуальности; они предпочитают проникнуть в суть дела на ими избранном и для них привычном пути, даже если он и представляет собой обходный путь, полный трудностей.

Работа Гельмгольца о сохранении энергии или введение Георгом Кантором трансфинитных чисел — вот еще относящиеся сюда примеры. Я сейчас коротко расскажу, как мне пришлось на собственном опыте испытать такого рода положение.

В 1869 г. я познакомился с теорией Кели, прочитав о ней в книге Сальмона *Conics* („Конические сечения“) в обработке Фидлера, а после этого, зимою 1869/70 г. в Берлине, я впервые услышал о геометрии Лобачевского-Больяи от Штольца. Из этих кратких сведений я довольно мало понял, но тотчас же у меня возникла идея, что тут существует некоторая зависимость. В феврале 1870 г. я читал доклад в семинаре Вейерштрасса о мероопределении Кели и закончил его вопросом, не существует ли совпадения между идеями Кели и Лобачевского. Я получил ответ, что это — две далеко отстоящие по идее системы и что для обоснования геометрии самым существенным является прежде всего то свойство прямой, по которому она является кратчайшим путем между двумя точками.

Я позволил переубедить себя этими возражениями и отложил в сторону уже созревшую мысль. Я всегда робел перед критикой логиков, которые были далеки от моих интересов. Только позже я понял, что суть дела заключается в различии психологической установки и что психология математического творчества таит еще свои великие проблемы. Вейерштрасс был очевидно натурой, склонной к тщательному творчеству, которое постепенно прокладывает себе дорогу к вершине; у него не было склонности распознавать с отдаления очертания еще не достигнутых высот, по крайней мере в настоящем случае он нисколько не воспользовался подобной точкой зрения.

Летом 1871 г. я, как было уже указано, снова встретился в Геттингене со Штольцем, которого я еще раз упоминаю с особенной благодарностью. Как прежде с Штаудтом, так теперь исключительно благодаря Штольцу я познакомился с Лобачевским и Больяи, причем из их работ я сам не прочел ни единой строчки. В бесконечных дебатах с Штольцем, этим логиком par excellence, я окончательно пришел к убеждению, что неевклидовы геометрии являются частью проективной геометрии, в смысле Кели, и после упорного сопротивления мне удалось навязать эту мысль моему собеседнику. Я изложил для печати идею в краткой заметке в Göttinger Nachrichten и в первой статье *Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie* („О так называемой неевклидовой геометрии“), напечатанной в четвертом томе Mathematische Annalen (1871 г.) [1]).

Эти работы вызвали однако возражения с различных точек зрения и прежде всего с философской. Не кто иной, как сам Лотце (Lotze) высказал именно тогда замечание, что все неевклидовы геометрии представляют собой нелепость. К этому присоединилось одно недоразумение, которое до сих пор не искоренено и поэтому играет и поныне роль у философов и писателей на научно-популярные темы; по этой причине я остановлюсь на нем. Оно связано с термином „мера кривизны“, который, к несчастью, имеет очень ясный геометрически-наглядный смысл. Это чисто аналитическое понятие, введенное Гауссом и весьма широко использованное Риманом, обозначает собой диференциально-геометрический инвариант

$$K = f\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial p}, \frac{\partial E}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial p}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial q}, \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}, \ldots, \frac{\partial^2 G}{\partial q^2}\right).$$

Инвариант K называют также кривизной элемента дуги

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

впервые изученного в таком виде Гауссом; при этом обнаруживается, что в неевклидовых пространствах кривизна K постоян-

---

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 1, Nr. XV, XVI.

на. Этому чисто имманетному математическому предложению философы и всякого рода мистики придали транзиентное конкретное значение, предположив, что постоянство кривизны неевклидова пространства представляет собой некое интуитивно наглядное свойство пространства. В связи с этим возникли спекуляции и споры о четырехмерном пространстве, ибо считали, что пространство должно обладать еще одним добавочным измерением для того, чтобы быть „искривленным". Даже математическое общество в Геттингене в течение многих лет принимало участие в такого рода дискуссиях. Стоит вспомнить только о двустишии Блюментaля (Blumenthal):

Die Menschen fassen kaum es
Das Krümmungsmass des Raumes

(„Эти люди никак не поймут, что такое мера кривизны пространства").

Все эти уродливые явления, которые иной раз действовали за меня, иной раз — против меня, принесли мне много больших трудностей. Я вспоминаю теперь те бесконечные беседы, которые я ежедневно вел зимою 1871/72 г. со своими друзьями в „Гебгардском туннеле" и которые иной раз принимали весьма жаркий характер.

Но значительно важнее было то сопротивление, которое я встретил с математической стороны. В своей статье, напечатанной в четвертом томе Math. Annalen, я, не учитывая тех логических трудностей, которые могли заключаться в проблеме, ограничил себя вначале применением метрической геометрии и только в конце статьи в весьма сжатой форме показал независимость проективной геометрии от всякой метрики, ссылаясь на работы Штаудта. Тогда с разных сторон на меня посыпались обвинения в порочном круге. Чисто проективное штаудтовское определение „вурфа" как числа не было воспринято, и все критики исходили твердо из того, что это число есть двойное отношение четырех евклидовых расстояний.

В результате широкого общения и переписки с другими математиками летом 1872 г. возникла моя вторая статья о неевклидовой геометрии, напечатанная в шестом томе Math. Annalen[1]). В ней я занимался обоснованием системы Штаудта и рискнул сделать первую вылазку в современную аксиоматику.

Но даже и это подробное изложение не привело всех к полному уяснению вопроса. Кели в частности так и остался навсегда в ошибочном убеждении, что в моих заключениях скрывается порочный круг [см., например, добавления Кели ко второму тому его сочинений, 1889 г., где он ссылается также и на Роберта Болла (R. Ball), с которым я тоже всегда поддерживал тесное общение, но не сумел изменить его мнения в этом вопросе]. Тут мы снова встречаемся с своеобразным яв-

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 1, Nr. XVIII.

лением: состарившийся дух не в состоянии сделать выводы из созданных им самим положений. Весьма часто приходится наблюдать последствия того психологически неизбежного явления, что к старости мозг утрачивает свою подвижность и пластичность. Так, даже Лоренц (Lorentz), благодаря идеям которого только и мог возникнуть принцип относительности, был всегда враждебно настроен к его проведению и развитию.

Со стороны других математиков я встретил обычнейшее возражение, с которым неизбежно приходится столкнуться всякому, кто самостоятельно творит,—именно, что предложенное мною построение не ново; указывали на то, что в Италии еще в 1868 г. появились работы Бельтрами (Beltrami), идущие в этом же направлении. Действительно, в моей работе от 1871 г. я сам сделал замечание: для того чтобы от формул Бельтрами перейти к формулам Кели, нужно сделать только один шаг. Я хорошо сделал, что, формулируя это предположение, выделил в печати слово „формулы". Я хотел этим сказать, что суть заключается в *правильном понимании* этих формул.

Исследуя логические следствия этих соотношений, Бельтрами, идеи которого независимы от идей Штаудта, впадает в одном существенном пункте в заблуждение, которое я уже указал в 1871 г. Речь идет об ошибке, которая впоследствии снова встречается у Гельмгольца и многих других. Интерпретируя неевклидову геометрию, в которой сумма углов треугольника больше π, на шаре, они приходят к следствию, что две кратчайшие линии должны пересекаться всегда в двух точках. Но в проективной геометрии, даже если за абсолют взято мнимое коническое сечение, две прямые линии в действительности всегда пересекаются только в одной точке. Этот пример показывает, что при интерпретации какой-нибудь метрической геометрии на кривой поверхности нужно принимать во внимание и связность последней. Проективная плоскость имеет необычную связность, глубоко отличающуюся от связности шара. Она представляет собой *одностороннюю* поверхность, как и мебиусов лист, но при этом еще и замкнутую. Вполне отчетливо все это было высказано в 1874 г. в переписке между Шлефли (Schläfli) и мною (Math. Annalen, т. 7, стр. 549—550)[1]).

Я мог бы привести еще много подробностей истории развития этих идей, часто весьма затрудненного, но ограничусь тем, что сказано. Отражение этих споров можно найти в соответствующих томах Math. Annalen (в особенности в 37 томе). Хотелось бы упомянуть здесь еще одно имя: Клиффорда (Clifford). Я вспоминаю о нем с особой радостью, как о человеке, который сразу до конца понял меня, а вскоре и продолжил мои исследования.

На этом я оставляю историю чисто геометрического развития этих идей. Построением логически полной системы, которая

---

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 2, стр. 68 и сл.

органически включала в себя все геометрические исследования того времени и рационально их классифицировала, был завершен некий этап развития.

Я перейду теперь к изложению успехов алгебраической геометрии, которые были подготовлены предшествующим развитием геометрических идей.

II. Параллельное развитие алгебры. Теория инвариантов.

В связи с только что изложенным перед нами встает вопрос, являющийся основным в теории инвариантов: как отображаются в алгебраическом исчислении проективные свойства, т. е. такие, которые не меняются при любой коллинеации? Иными словами, речь идет не о том, чтобы, как это делает Плюкер, избежать вычислений, а о том, чтобы, провести их в систематической форме, выявив прежде всего полную независимость исследуемых свойств от любого линейного преобразования. Всякий же, кто пожелает проследить за историческим ходом развития этих идей а следовательно, всесторонне постичь значение теории инвариантов, должен рассмотреть ее с более широкой точки зрения. Теория инвариантов в точном смысле слова, как мы ее изложим, возникла из теории чисел. С этой стороны мы и должны пытаться в нее проникнуть.

Чтобы не заходить слишком далеко назад, я постараюсь связать эти идеи с *Disquisitiones Arithmeticae* Гаусса. Как мы уже видели в главе I, основным моментом теории чисел является изучение бинарной квадратичной формы вида

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

и ее преобразований при линейном преобразовании переменных x и y

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

где

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Пусть после преобразования рассматриваемая форма примет вид

$$f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2.$$

При разыскании величин, которые бы после такого преобразования вовсе не менялись или преобразовывались определенным образом, мы приходим прежде всего к дискриминанту или, как Гаусс его называет, „детерминанту“

$$D' = b'^2 - a'c' = r^2 D.$$

Для теории чисел, как мы видели, представляет особый интерес изучение эквивалентности двух форм в том случае, когда числа $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ — целые и $r = 1$; равенство $D' = D$ яв-

ляется в этом случае необходимым, но отнюдь не достаточным условием эквивалентности.

Теория инвариантов, как мы ее здесь понимаем, отходит от теории чисел и ставит перед собой чисто алгебраическую проблему. Пусть даны две формы

$$f = a_1x^n + b_1x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \ldots + p_1,$$
$$g = a_2x^n + b_2x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + p_2.$$

Требуется построить из коэффициентов этих двух форм такие однородные полиномы, которые, будучи выражены через коэфициенты преобразованных форм, отличались бы от исходных полиномов только множителем, равным некоторой степени определителя преобразования. Поясним это примером. Пусть даны две формы

$$a_1x_1 + b_1x_2, \quad a_2x_1 + b_2x_2.$$

Тогда определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ есть их так называемый совместный инвариант. Частное

$$\frac{|a\ b| \cdot |c\ d|}{|a\ d| \cdot |c\ b|}$$

есть совместный инвариант четырех таких форм [1]). Оно является даже абсолютным инвариантом, так как остается совершенно неизменным при линейном преобразовании (двойное отношение четырех точек).

Теперь возникает вопрос, какую роль играла геометрия в этом сужении области приложения теории инвариантов, в ее отходе от теории чисел. Сама по себе она могла и не привести к такого рода развитию теории инвариантов. Мы видели уже, как, например, гауссова теория бинарных квадратичных форм была очень красиво интерпретирована и освещена с помощью геометрической теории решеток и далее с помощью модульных фигур. Таким образом, теория чисел сама по себе вовсе не чужда геометрии. Поскольку однако геометрия ограничивается изучением кривых поверхностей и других образов в непрерывном пространстве, постольку она должна была создать соответствующее направление и в теории инвариантов.

Исторически сложилось так, что только очень немногие ученые были в состоянии работать во всех областях этой широко разросшейся дисциплины. К ним относятся Якоби, находившийся еще целиком под влиянием Гаусса, затем Эйзенштейн и Эрмит. Дальше наступает специализация; последующие ученые, следуя духу времени, очень клонившему к специализации, ото-

[1]) Определители $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ иногда сокращенно обозначают символом $|a\ b|$.

Прим. ред.

шли от теории чисел и занялись уже исключительно формально-алгебраическими проблемами и их приложением к геометрии.

Улучшившиеся средства общения способствовали развитию нового явления в научной жизни: все более оживляющиеся международные связи привели к непрекращающейся и энергичной совместной научной работе. Показателем роста этого научного общения является основание в 1868 г. журнала Mathematische Annalen, который становится главным органом для работ этого направления.

Из исследователей, которые здесь выступили, я назову:

a) Гессе и Аронгольда (Aronhold), как выдающихся последователей кенигсбергской школы; несколько позднее — Клебша, Гордана (Gordan) и др.;

b) английскую неразлучную тройку: Кели, Сильвестра, Сальмона;

c) наконец итальянцев: Бриоши (Brioschi) („Теория детерминантов") и геометров Кремона (Cremona) и Бельтрами.

Я остановлюсь, конечно, только на основных моментах исследований этих ученых. Тем охотнее я отсылаю к их биографиям, составленным М. Нетером, помещенным в следующих томах Mathematische Annalen:

Клебш (составлено несколькими его друзьями) — т. 7 (1874); Кели — т. 46; Сильвестр, Бриоски — т. 50; Эрмит — т. 55; Сальмон — т. 61; Ли — т. 53; Кремона — т. 59; Гордан — т. 74.

Последние из названных ученых захватывают, конечно, гораздо более поздний промежуток времени, чем тот, который нами здесь рассматривается. Эти нетеровские биографии дают отличный материал для изучения всей эпохи и того своеобразного широкого мира интересных соотношений, которые любовно взращивались тогда, подобно красивым садовым цветам, не для внешней пользы, а ради них самих.

Непосредственно предшествующей ступенью современной теории инвариантов является учение о *детерминантах*. Это математическое орудие, которое первоначально ввел в математический обиход Лейбниц, далее в XVIII столетии усовершенствовал Вандермонд (Vandermonde), а в XIX — Коши, было затем доведено Якоби до полного развития, проникло во все отрасли науки и даже сделалось составным элементом обучения. Относящиеся сюда две статьи Якоби помещены в журнале Крелля за 1841 г. (т. 22); это:

De formatione et proprietatibus determinantium („Об образовании и свойствах детерминантов")[1]; *De determinantibus functionalibus* („О функциональных детерминантах")[2].

В наше время детерминанты, которые Якоби обозначал через $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$, а мы теперь короче через $|a_{ik}|$, их простейшие

[1]) Werke, т. 3, стр. 355—392.

[2]) Там же стр. 393—438. Немецкий перевод П. Штекеля в изд. „Ostwalds Klassiker", вып. 77 и 78.

преобразования и правила действий над ними, которыми нужно хорошо овладеть, чтобы успешно пользоваться детерминантами,— все это сделалось достоянием каждого математически образованного человека. Я поэтому не буду на этих вещах останавливаться и укажу здесь только еще раз на значение детерминантов в теории решения линейных уравнений, о чем я подробно говорил при рассмотрении системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}|$$

есть совместный инвариант n линейных форм

$$\sum_{i=0}^{n} a_{1i}x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{3i}x_i, \dots, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i.$$

Это означает, что если мы в этих формах положим $x_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl}y_l$ и будем рассматривать n полученных после этого преобразования линейных форм вида

$$\sum_{i=1}^{n} a'_{1i}y_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a'_{2i}y_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a'_{3i}y_i, \dots, \quad \sum_{i=1}^{n} a'_{ni}y_i,$$

то новый детерминант $D' = |a'_{ik}|$ связан со старым детерминантом $D = |a_{ik}|$ соотношением $D' = r \cdot D$, где $r = |\alpha_{ik}|$ есть детерминант преобразования. Это соотношение легко выводится из основной теоремы теории детерминантов — теоремы об умножении детерминантов.

Обобщением этого предложения является предложение о так называемом *функциональном детерминанте*. Здесь рассматриваются уже не линейные формы и детерминант из их коэфициентов, а любые функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ как разрешали себе говорить раньше; теперь я должен был бы, конечно, сказать: любые диференцируемые функции $f, g, h, \dots$ и детерминант, составленный из их частных производных $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \dots & f_n \\ g_1 & g_2 & g_3 \dots & g_n \\ h_1 & h_2 & h_3 \dots & h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Это выражение оказывается инвариантным в более общем смысле этого слова, а именно оно является инвариантом отно-

сительно любого преобразования переменных, при том, однако, еще неизвестном Якоби ограничении, что существуют все частные производные от новых переменных по старым, и обратно. Доказательство этого предложения непосредственно вытекает из соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}=f_1\frac{\partial x_1}{\partial y_1}+f_2\frac{\partial x_2}{\partial y_1}+f_3\frac{\partial x_3}{\partial y_1}+\ldots+f_n\frac{\partial x_n}{\partial y_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_n}=f_1\frac{\partial x_1}{\partial y_n}+f_2\frac{\partial x_2}{\partial y_n}+f_3\frac{\partial x_3}{\partial y_n}+\ldots+f_n\frac{\partial x_n}{\partial y_n},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}=g_1\frac{\partial x_1}{\partial y_1}+g_2\frac{\partial x_2}{\partial y_1}+g_3\frac{\partial x_3}{\partial y_1}+\ldots+g_n\frac{\partial x_n}{\partial y_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_1}=h_1\frac{\partial x_1}{\partial y_1}+h_2\frac{\partial x_2}{\partial y_1}+h_3\frac{\partial x_3}{\partial y_1}+\ldots+h_n\frac{\partial x_n}{\partial y_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и из теоремы об умножении детерминантов. Здесь мы сталкиваемся уже с общей теорией инвариантов, которая кладет в основание группу *произвольных* преобразований переменных. Другой — существенно более сложный — пример, относящийся к этой более общей теории, представляет собой инвариантность кривизны, о которой мы говорили выше.

Эти исследования Якоби были разработаны Гессе, особенно с аналитико-геометрической стороны. Как уже раньше было отмечено, связь с теорией чисел была при этом уже окончательно утеряна.

Гессе родился в Кенигсберге в 1811 г. Я не могу при этом не обратить внимание на то удивительное обстоятельство, что из Кенигсберга вышло исключительно большое число знаменитых математиков. Если считать философа и математика Канта, то получится следующий достопримечательный перечень: Кант (1724), Ришело (1808), Гессе (1811), Кирхгоф (1824), Карл Нейман (1832), Клебш (1833), Гильберт (Hilbert) (1862).

Талант Гессе развивался в течение долгого времени в разных школах. С 1840 по 1855 г. он был доцентом в Кенигсберге, в 1855—1856 гг. в Галле, в 1856—1868 гг. в Гейдельберге и наконец в 1868—1874 гг. в Мюнхене в высшей технической школе. Кенигсбергский период был периодом наиболее активного его творчества. В Гейдельберге он написал свой широко распространенный учебник *Vorlesungen über analytische Geometrie* („Лекции по аналитической геометрии"), который широко развил вкус к изящным вычислениям с помощью симметрических формул. В остальном Гейдельберг оказался очень мало благоприятным для научного развития Гессе. Он подвергся очарованию этого

города, пребывание в котором побуждает к умственной деятельности, но значительно меньше способствует напряженной работе. Гессе провел довольно много приятных часов в кругу знакомых, среди которых отметим поэта Виктора Шеффеля, увековечившего Гессе в стихотворении „beide auf Nr. 8“ в „Gaudeamus“, но математическая продуктивность Гессе от этого только страдала. Последние годы жизни Гессе носят несколько трагический характер. В Мюнхене он снова вернулся было к творчеству, но лишь с частичным успехом. Та уверенность, с которой он умел отличать истинное от ложного, была им утрачена.

Из творений Гессе я упомяну здесь только о том, которое сделало его имя памятным. Речь идет о так называемом *гессиане*, т. е детерминанте, составленном из вторых производных однородной функции f:

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

который имеет много приложений в геометрии. При линейном преобразовании мы имеем соотношение $H' = r^2 H$, которое не трудно получить, если детерминант H умножить один раз по горизонталям и другой раз по вертикалям на определитель преобразования r. Таким образом, H есть инвариант, или, точнее, поскольку он сам содержит еще переменные, ибо функция f вообще выше второй степени, — он представляет собой ковариант функции f.

Какое значение имеет этот ковариант в геометрических исследованиях и какие успехи, более значительные, чем у Плюкера, достигнуты с его помощью в геометрических вопросах, — это я покажу на одном простом примере.

Речь идет об определении *точек перегиба плоской кривой n-го порядка* заданной уравнением $f(x, y) = 0$. Обычным, изложенным во всех учебниках диференциального исчисления, способом Плюкер выразил условие $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ через частные производные функции f. Полученное им условие записывается, в обозначениях Якоби, в виде равенства нулю „окаймленного“ детерминанта:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение изображает кривую порядка $3n-4$. Может показаться, что рассматриваемая кривая C_n имеет $n(3n-4)$

точек перегиба. Плюкер однако показал, что кривая, заданная детерминантом, имеет с каждой из n бесконечных ветвей кривой C_n точку касания в бесконечности, так что $2n$ точек пересечения, не дающих точек перегиба, отпадают; таким образом он и получает истинное число точек перегиба, равное $3n(n-2)$.

Новая идея Гессе и состоит в том, что он показал, как можно получить значительно более ясную картину с помощью последовательного применения однородных координат.

Он полагает $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ и преобразовывает рассмотренный Плюкером детерминант, который теперь имеет вид

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

с помощью теоремы Эйлера об однородных функциях:

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = n \cdot f,$$

$$f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 = (h-1) \cdot f_1 \text{ и т. д.}$$

Если теперь уравнение Плюкера умножить на $n-1$, то оно может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 \\ f_{21} & f_{22} & f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Далее, можно первые две вертикали, умноженные соответственно на x_1 и x_2, вычесть из третьей; вынеся затем множитель x_3, получим

$$x_3 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Если теперь проделать то же с последней горизонталью, то, отбросив численный множитель $\frac{1}{n-1}$, мы получаем

$$x_3^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = x_3^2 \cdot H = 0.$$

Равенство $x_3 = 0$ дает выделенные Плюкером только с помощью искусственного приема точки, не удовлетворяющие требованиям

задачи; кривая $H=0$, степень которой равна $3(n-2)$, дает в пересечении с кривой C_n полное число искомых точек перегиба.

Мы видим на этом примере победу метода и убеждаемся в том, что Гессе сделал себе своего рода идеалом проводить все вычисления в однородно симметрической форме и представлять результаты в таком виде, чтобы алгебраический процесс являлся полным отображением геометрических исследований. Особенное внимание он уделил теории плоских кривых C_3 и C_4, к которым мы еще вернемся.

Между тем эти идеи стали интересовать и английских ученых, к которым вскоре перешла руководящая роль в теории инвариантов и ее применениях к проективной геометрии.

Мы уже говорили о Кели и его неустанной работе: родившись в 1821 г., он в 1841 г. уже печатает свои статьи в Кембриджском Mathematical Journal и притом в новом для Англии проективно-геометрическом направлении, которое находилось в противоречии с господствовавшей в Кембридже школой математических логистиков [Морган (de Morgan) и др.]. Уже в 1846 г. мы видим его сотрудником журнала Крелля, в котором (т. 33) он помещает свой *Mémoire sur les Hyperdéterminants* („Мемуар о гипердетерминантах"). Термин „гипердетерминант" для „инварианта" ясно указывает на следы развития этой теории, образовавшейся как обобщение теории детерминантов. Кели участвует в дальнейшем развитии этой теории, которой довольно долго занимались и в Германии, систематизируя материал и получая собственные результаты. Знамениты его девять статей *Memoirs on Quantics*, появившиеся в Philosophical Transactions (от 1854 до 1878 г.). Во всех этих исследованиях ярко видны, наряду с большой творческой одаренностью, неутомимый труд и упорная энергия автора.

Этой спокойной уравновешенной натуре можно противопоставить его соратника Сильвестра, который был несколько старше и является одной из самых живых и переменчивых фигур из всех рассмотренных нами. Родившись в 1814 г. в Лондоне, он начал работать очень рано, но в продолжение нескольких лет часто менял место своего жительства и занятия. В 1841—1845 гг. он был профессором в университете в Виргинии, с 1845 по 1855 г. он работал в качестве актуария (математик, работающий в страховом деле) и стряпчего (как и Кели); затем до 1871 г. он был профессором военной академии в Вульвиче. Следующие несколько лет он не имел никаких определенных занятий, пока в 1876 г. не получил профессуру в университете Джона Гопкинса в Балтиморе. На этой должности он вел, впервые в Америке, продуктивную работу над вопросами чистой математики, принимая участие и в преподавательской деятельности, которой он занимался крайне интенсивно и почти исключительно в области теории инвариантов. Он основал

также American Journal, один из наиболее известных и поныне математических журналов. В 1884 г. Сильвестр вернулся в Англию и 70-летним старцем принял новую профессуру в Оксфорде, которую уже сохранил до своей смерти в 1897 г.

В Лондоне Кели приобщил Сильвестра к новым идеям, в разработке которых последний вскоре и занял одно из руководящих мест. Ему принадлежат все обычные в этой теории термины: инвариант, ковариант, комитант, дискриминант и др. Это только очень немногие из введенных им терминов; он сам себя шутя называл новым Адамом: подобно Адаму, и он всем вещам давал новые имена.

Сильвестр обладал исключительно живым многосторонним умом, который с большим интересом вникал в самые разные вопросы и умел сопоставлять, синтезировать все, что ему встречалось; между тем ему гораздо менее было свойственно планомерно и систематически разрабатывать возникшую идею и завершать ее законченным трудом высокого стиля. Его областью было чисто абстрактное, комбинаторное исследование каждого затронутого им вопроса. В этом направлении он, наряду с теорией инвариантов, занимался с исключительным успехом вопросами самых разных областей математики, например проблемами механики. Для его образа мысли характерно мнение, которое он мне как-то случайно высказал по вопросу о том, как обработать химические формулы, которые привлекли к себе тогда интересы математиков; позже он провел удивительно интересную параллель между этими формулами и символическим методом теории инвариантов бинарных форм. В химических формулах он усматривал только логическую связь двух понятий и, посмеиваясь, отказывался от представления о конкретных, связанных между собой атомах. Однако не в этом, во всяком случае, состоит тот идейный фундамент, опираясь на который естествознание добилось своих успехов.

Как личность Сильвестр был исключительно занимательный, остроумный, яркого ума человек. Он был блестящим оратором и часто увеселял общество своими меткими и ловкими стихами. По блеску и живости своего ума он был истинным представителем своего народа; он происходит из чисто еврейской семьи, которая, не имея в прошлом определенного имени, только в его поколении приняла фамилию Сильвестр.

Из отдельных математических творений Сильвестра я упомяну только теорию *элементарных делителей* двух квадратичных форм, по крайней мере в ее начале, и прежде всего теорию *канонических форм*, т. е. задачу приведения заданной формы к простейшему виду; по сути вопрос здесь заключается в том, чтобы найти такую систему однородных координат, в которой данный алгебраический образ имел бы простейшее уравнение. Для поверхностей третьего порядка Сильвестр нашел такую систему, названную им „*пентаэдром*“ и состоящую из пяти

плоскостей $x=y=z=t=u=0$, связанных еще тождественно удовлетворяющимся равенством

$$x+y+z+t+u=0.$$

В этом пентаэдре уравнение поверхности третьего порядка приводится к виду

$$ax^3+by^3+cz^3+dt^3+eu^3=0,$$

из которого очень удобно получаются многие геометрические свойства этих поверхностей.

Мне хотелось бы здесь же заметить, что это — один из результатов, которые неожиданно опубликовал без доказательства стареющий Штейнер, утверждая, что он их сам обнаружил. На самом же деле он только от Шлефли узнал о работах Сильвестра (см. переписку этих двух швейцарских геометров, опубликованную Графом в 1896 г.).

К Сильвестру и Кели примыкает еще третье лицо, совершенно отличное от них: я говорю о теологе Георге Сальмоне (George Salmon) в Дублине. В течение почти всей своей жизни он был связан со старым ирландско-протестантским Trinity College. Эта старая почтенная высшая школа, из которой вышел также и Гамильтон, испокон века была местом созерцательного направления мысли и до сих пор остается центром протестантского обучения в Ирландии. Занятия теологией, классической филологией и математикой идут там рука об руку. Крепко обосновавшись, опираясь на прочную традицию [епископ Беркли (Berkeley) и др.], это направление приняло раз навсегда установленные формы. „Кембридж уж очень амбициозен", говорили мне, когда я в 1899 г. посетил Дублин, имея в виду господствовавшие в Кембридже новейшие научные тенденции. Унаследованные от далекого прошлого достоинство и культура выступили в особом блеске в 1892 г. на праздновании трехсотлетнего юбилея; в этом праздновании принимал участие и Геттинген, выступивший с торжественным адресом, составленным нашим умершим коллегой Лео блестящими латинскими стихами. На мою просьбу отвести среди заслуг колледжа и математике заслуженное ею место Лео ответил мне: „Пегас возьмет и это препятствие", и действительно, мы находим в законченной оде стих: „Unde mathematicis lumen praeluxit Hamilto" („Отсюда воссияло математическое светило Гамильтон").

Вот из какой среды вышел Сальмон. Он родился в 1819 г. в Дублине, учился в Trinity College, в котором с 1840 г. сделался преподавателем. Начиная с 1860 г., у него преобладают теологические интересы, которые приводят к тому, что он в 1866 г. делается профессором богословия и остается до своей смерти в 1904 г. теснейшим образом связанным с этим колледжем.

Сальмон — человек очень мягкий — в организационных вопросах был чрезвычайно консервативен. Когда я посетил его в 1899 г., он жил в деревне на даче удобной, спокойной жизнью.

в математические разговоры он не вдавался, наоборот, развлекал меня приятными безобидными маленькими анекдотами, как это обычно бывает в каждом маленьком городе.

Все трое — и Кели, и Сильвестр, и Сальмон — провели свою необычайно продолжительную жизнь довольно разнообразно, отлично от обычной жизни ученых, как мы ее себе представляем.

Из специальных исследований Сальмона я назову здесь его знаменитые учебники, которыми он способствовал широкому распространению современной аналитической обработки проективной геометрии и теории инвариантов:

1848 г. — *Conic sections* („Конические сечения");

1852 г. — *Higher plane curves* („Плоские кривые высших порядков");

1859 г. — *Modern higher Algebra* („Современная высшая алгебра");

1862 г. — *Analytic geometry of three dimensions* („Аналитическая геометрия трех измерений").

Все эти книги выдержали много изданий, переводов и обработок и долгое время справедливо пользовались большой любовью. Они не представляют собой систематического строгого изложения предмета, — это только спокойное повествование о различных изящных результатах алгебраически-геометрических исследований, написанное в удобочитаемом тоне бесед. В новые издания введены также и полученные к этому времени новые результаты, что из-за легкой и гибкой формы изложения можно было сделать без нарушения цельности этих произведений. Чтение этих книг напоминает радостную и вместе с тем поучительную прогулку по полям, лесам и возделанным садам, в которой руководитель обращает ваше внимание то на красоту окружающего, то на какое-нибудь редкое явление, не заключая однако всего наблюдаемого в одну систему безукоризненной полноты и строгости, — тенденция, характерная для переводчика Фидлера, — и не указывая также на какие-либо растения, как на особо полезные для пересаживания в заранее приготовленную почву и выращивания из них с помощью рационального ухода более высоких культур. В этом саду мы все выросли, в нем собирали мы наши основные познания.

Я хотел бы теперь несколькими штрихами набросать состояние, которого достигла теория форм при содействии этих ученых.

С абстрактной точки зрения задача заключается в том, чтобы для заданной формы построить так называемую полную систему форм, т. е. найти наименьшее число простейших инвариантов и ковариантов, через которые все другие выражались бы с помощью целых и рациональных функций. Уже Эйзенштейн нашел для бинарной кубической формы

$$f = ax_1^3 + 3bx_1^2x_2 + 3cx_1x_2^2 + dx_2^3$$

простейший ковариант (второй степени)

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

и простейший инвариант

$$3b^2c^2 + 6abcd - 4b^3d - 4ac^3 - a^2d^2,$$

представляющий собой детерминант квадратичной формы H, равный дискриминанту формы f, который обычно обозначают через Δ. Сюда присоединяется еще функциональный детерминант форм f и H, обозначаемый через Q и тоже имеющий третью степень. Кели показал, что эти четыре величины f, H, Δ, Q образуют полную систему форм. Отсюда возник вопрос о полной системе инвариантов также и для других форм.

Для случая бинарной биквадратичной формы

$$ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4$$

Кели показал, что к величинам $f_{(4)}$, $H_{(4)}$ и функциональному определителю $Q_{(6)}$ форм f и H присоединяются еще два инварианта, которые в обозначениях, введенных позже Вейерштрассом, имеют вид

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

Здесь, напротив, $\Delta = g_2^3 - 27\,g_3^2$, т. е. принадлежит полной системе форм. Требуемое здесь доказательство инвариантности выходит за пределы возможностей обыкновенной теории детерминантов. Поэтому стало необходимым ввести символические обозначения и с их помощью развить новое самостоятельное исчисление, чтобы полностью овладеть проблемой, которая для форм более высокого порядка делается очень сложной и чрезвычайно обширной. Кели, Аронгольд и Клебш провели эти исследования, которые наложили глубокий отпечаток на всю дальнейшую очень обширную литературу.

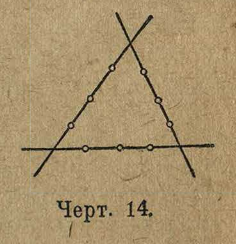
Заканчивая обзор этой области исследования, я хотел бы еще указать на несколько подробностей геометрически-алгебраического характера из так называемой теории уравнений геометрии, которая была развита упомянутыми учеными.

1. Задача о девяти *точках перегиба плоской кривой*, как уже было упомянуто, была поставлена Плюкером, а затем Гессе и наконец Аронгольдом решена до конца. Плюкер заметил, что эти девять точек лежат по три на 12 прямых. Гессе показал, что эти 12 прямых составляют четыре трехсторонника, каждый из которых содержит все девять точек (черт. 14). Семейство $f + \lambda H = 0$ определяет, таким образом, четыре кривых C_3, вырождающихся

в тройки прямых, а из уравнения двенадцатой степени, решениями которого служат 12 линий перегиба, должно получиться одно уравнение четвертой степени с инвариантными коэфициентами. Это требуемое Гессе уравнение четвертой степени было в явном виде дано Аронгольдом. После его решения для определения девяти точек перегиба остаются только элементарные преобразования.

Аналогичного исследования требует вопрос о 28 *двойных касательных к плоской кривой* C_4. И этот вопрос был поставлен Плюкером, который однако, как это было уже упомянуто, впал в ошибку. Полное решение проблемы удалось одновременно Штейнеру и Гессе (Crelle, 49, 1853)[1].

2. В том же направлении заинтересовались также поверхностями высших порядков. В 1849 г. Сальман и Кели открыли существование 27 *прямых на поверхности* F_3, которые удивительным образом расположены друг относительно друга: каждая из них пересекается десятью другими (Cambridge and Dublin Journal, т. 4). Они могут быть все вещественными и замечательно наглядно изображаются на *диагональной поверхности*[2], найденной Клебшем в 1872 г. Отнесенная к пентаэдру Сильвестра, она имеет очень простое уравнение


Черт. 14.

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + u^3 = 0.$$

В остальном F_3 и ее созвездие прямых связаны особенным образом с 28 двойными касательными плоской кривой C_4, как это впервые заметил Гейзер (Geiser) (Math. Annalen, т. 1, 1868). Зависимость здесь следующая: если из какой-нибудь точки O, лежащей на поверхности F_3, проектировать F_3 на произвольную плоскость, то контур проекции представляет собой плоскую кривую C_4, для которой 28 двойных касательных получаются пересечением следующих плоскостей, проходящих через точку O: касательной плоскости к F_3 в точке O и 27 плоскостей, проходящих через точку O и каждую из прямых на F_3.

3. В заключение я хочу еще указать на поверхность, найденную Куммером (Kummer) в 1864 г., хотя я при этом и коснусь более позднего периода. Это — поверхность четвертого порядка и класса, сама себе взаимная, имеющая 16 двойных точек, из которых 16 групп по шесть точек расположены в одной двойной касательной плоскости к поверхности (т. е. в плоскости, касающейся поверхности по коническому сечению). Уравнение шестнадцатой степени, определяющее двойной элемент, приводится к одному уравнению шестой степени и нескольким квадратным, как это обнаружил Камилл Жордан (Camille Jordan) в 1868 г.

---

[1] Klein, Ges. Abh., т. 2, стр. 110 и сл.

[2] Math. Annal., т. 4, стр. 331 и сл., 1871; Klein, Ges. Abh., т. 2, стр. 29 и сл.

(Crelle, т. 70) и что я подтвердил геометрическими исследованиями (Göt. Nachr., 1869; Math. Annalen, т. 2; Ges. Abh., т. 1, стр. 53). Это была моя первая работа, которой я заслужил рыцарские шпоры (продолжение моей диссертации от 1868 г.).

III. Пространство *n* измерений и обобщенные комплексные числа.

Я перехожу теперь к краткому изложению третьего основного этапа в азвитии алгебраической геометрии. Я рассмотрю те обобщения, которые получили рассмотренные уже нами вопросы и геометрические идеи за интересующий нас период времени, — обобщения, которые стали возможными после введения понятия об n-мерных пространствах и гиперкомплексных числах.

Рассмотренные до сих пор проективная, аффинная и метрическая геометрии могут быть кратко охарактеризованы теми группами преобразований, относительно которых (см. мою Эрлангенскую программу, 1872; Ges. Abh., т. 1, стр. 460) остаются инвариантными соотношения и теоремы каждой из этих геометрий. Так:

1. Для проективной геометрии характерно общее дробно-линейное преобразование, которое в неоднородном виде выражается уравнениями

$$x' = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''},$$

$$y' = \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''},$$

$$z' = \frac{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}.$$

2. Для аффинной геометрии характерным является такое же преобразование, но без знаменателя:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,$$
$$y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',$$
$$z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''.$$

3. Для метрической геометрии — то же преобразование, но только при условии, чтобы детерминант преобразования

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

был так называемым ортогональным детерминантом, откуда будет вытекать инвариантность выражения

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

При этом будет глубокое различие между исследованиями, ограничивающимися только случаем детерминанта, равного $+1$, и исследованиями, включающими также и случай детерминанта, равного -1.

Вид этих формул приводит к почти самоочевидному обобщению, заключающемуся в том, чтобы вместо трех переменных x, y, z рассматривать n переменных и соответственно изучать геометрию пространства n измерений. Эта идея так очевидна, что сколько нибудь значительное продвижение вперед нужно отнести только к тому времени, когда уже возник более глубокий интерес к этой расширенной области изучения и когда были более подробно развиты необходимые теории.

Современному поколению эти идеи кажутся столь естественными, — теперь представляется даже слишком скромным ограничиваться при обобщении каким-либо конечным числом n переменных, — так что я должен несколько подробнее рассказать о тех трудностях, о том упорном сопротивлении, какое встречали эти идеи в течение долгого времени после их возникновения.

И тут опять помехой на пути развития этих идей явились философы; этим последним нехватало понимания того имманентного значения, которое присуще математическим теориям и которое оставляет сначала в стороне вопрос о транзиентном их применении. Повидимому, судьба всякого действительно научного достижения — наталкиваться в первую очередь на противодействие со стороны прочно обоснованной и строгой правоверности. И все-таки тайна продвижения вперед лежит в наивном творчестве, возникающем из чистой радости того дела, к которому толкает творцов их мысль.

Но кроме сопротивления со стороны философов, утверждающих, как и следовало ожидать, что n-мерное пространство есть бессмыслица, возникла еще одна неожиданная трудность, как раз противоположного характера. Появились философы-энтузиасты, которые из существования и плодотворности математической теории сделали вывод о существовании некоего действительного четырехмерного пространства, существующего в природе, откуда и вытекала, по их мнению, необходимость экспериментального доказательства его существования.

В связи с этим я должен рассказать о лейпцигском астрофизике и философе Цельнере (Zöllner), родившемся в 1834 г. Цельнер известен своими многочисленными и весьма ценными исследованиями и идеями, в особенности благодаря его „Научным статьям" (1878 — 1881). Многие из его физических идей в области электродинамической теории строения материи теперь снова получают значение, так, например, представление о непрерывном излучении мельчайших частиц, объяснение силы тяготения с помощью некомпенсированных электрических сил притяжения и т. д. В области экспериментальной физики он также сделал много ценных открытий. Он первый применил радиометр для количественных измерений, он успешно наблюдал солнечные протубе-

ранцы не во время солнечного затмения и т. д. С этой безусловно значительной естественно-научной одаренностью Цельнер соединял и склонность к экзальтированной мистике и спекуляциям, что при его горячей натуре сыграло роковую роль. Всегда склонный страстно встать на защиту какого-нибудь свободного мнения, преследуемого и подавляемого традицией или модой, полный фантазии и раздражения против общепринятых предрассудков, он попал в фарватер спиритизма и, как этого и следовало ожидать, был здесь бессовестнейшим образом использован.

Но любопытнее всего то, что я сам, не подозревая, конечно, такого своего влияния, дал толчок к окончательному приобщению Цельнера к спиритизму. Это было в середине 70-х годов, когда знаменитый американский спирит Слэд (Slade), замечательно ловкий фокусник, — который между прочим был через несколько лет разоблачен, — давал свои знаменитые сеансы, вызывавшие широкий и всеобщий интерес. Незадолго до этого я случайно, во время разговора на научные темы, рассказал Цельнеру о результатах, которые я получил относительно замкнутых, имеющих узлы пространственных кривых, и которые я опубликовал в девятом томе Math. Annalen (Ges. Abh., т. 2, стр. 63).

Речь идет о том, что наличие узла может считаться существенным, т. е. инвариантным относительно деформации свойством, только постольку, поскольку мы находимся в трехмерном пространстве; в четырехмерном пространстве замкнутая кривая может быть освобождена от узла путем одной только непрерывной деформации; таким образом, „узел“ перестает быть существенным свойством геометрии положения, если выйти из трехмерного пространства.

Это замечание Цельнер встретил с непонятным для меня энтузиазмом. Он решил, что получил в руки средство для экспериментального доказательства „существования четвертого измерения“, и предложил Слэду выполнить на практике освобождение замкнутой нити от узлов. Слэд принял это предложение своим обычным: „we schall try it“ („мы это попробуем“), и действительно, ему удалось вскоре выполнить это к великому удовольствию Цельнера.

Что в этом опыте участвовала разорванная нить, место разрыва которой Цельнер должен был сжать обоими большими пальцами, в то время как Слэд держал свою руку поверх его рук, — об этом я упомяну только вскользь. В результате опыта Цельнер пришел к выводу, что существуют „медиумы“, которые находятся в тесном общении с четвертым измерением и обладают способностью перемещать тела из нашего пространства в четырехмерное, и обратно, так что они то исчезают, то вновь возникают для наших чувств.

К этому же времени и относится распространение этой широкой мистификации, которая в соединении с гипнотизмом, внушением, религиозным сектантством, популярной натурфилософией и т. п. в течение долгого времени владела многими умами.

И поныне можно еще встретить ее следы в театральных представлениях типа варьетэ, в кино, во всякого рода фокусах и наконец даже в обиходном языке.

Большое возбуждение, в котором находился Цельнер благодаря всем этим вещам и благодаря тому сопротивлению, которое они встречали, вероятно, сыграло роль в приближении конца его жизненного пути. Им овладела лихорадочная деятельность; в течение последнего года своей жизни он выпускал ежедневно в печать больше печатного листа. В 1882 г., не достигши 50 лет от роду, он был оторван от своей работы мозговым ударом.

Среди всех этих недоразумений, споров и противоречий пространство n измерений все-таки завоевало себе наконец право гражданства в царстве научных понятий; и даже к большому удовлетворению нас, математиков, не только в узком математическом кругу, но и в более широком кругу идей теоретической физики. В механике понятие об R_n было принято как желанное вспомогательное средство, дающее возможность, например, математически отобразить твердую систему с n степенями свободы. В кинетической теории газов изучаются даже пространства $6N$ измерений, где N есть число молекул в одной граммолекуле изучаемого газа, причем каждая из них характеризуется шестью координатами, определяющими ее положение и скорость. Так как $N = 6 \cdot 10^{23}$, мы имеем здесь, следовательно, дело с пространством $36 \cdot 10^{23}$ измерений. Стимулирующее влияние, заложенное в этих представлениях, упрощения, которым поддаются на их основе трудные проблемы, — все это очевидно для всякого, который пользовался этим орудием исследования.

Особенно плодотворным является использование представления о специальном четырехмерном пространстве в механике, где к трем пространственным координатам x, y, z добавляется в качестве четвертого „измерения" переменная t — время, входящее во все механические соотношения.

Значение, которое получило это представление, введенное впервые Лагранжем, но не получившее тогда дальнейшего развития, в современной нам физике, в так называемом принципе относительности, теперь достаточно хорошо известно.

Именно с Лагранжа начинается историческое развитие учения о многомерных пространствах. В чисто формальном виде оно появляется даже у Коши и др. Так, в 1844 г., т. е. тогда, когда ему было 22 года, Кели печатает в четвертом томе Cambridge Mathematical Journal статью: *Chapters on the analytical geometry of n dimensions* („Главы из аналитической геометрии *n* измерений") [1]. Однако первое связное изложение этих теорий, в виде самостоятельной научной дисциплины, было дано в 1844 г. в чрезвычайно своеобразном сочинении, на котором я ниже подробно остановлюсь, именно в *Ausdehnungslehre* („Учение о

[1]) Papers, т. I, стр. 55 и сл.

протяженности"), принадлежащем преподавателю гимназии в Штеттине Грассману.

Прежде чем перейти к нему, я должен упомянуть о двух других авторах, которые в различной форме пришли к одним и тем же идеям и которые сыграли существенную роль в том, что понятие пространства n измерений, R_n, сделалось около 1870 г. общим достоянием стремящегося вперед юного поколения.

Раньше всего следует упомянуть о Плюкере, который в 1846 г. в своей книге *System der Geometrie des Raumes*, в знаменитом § 258 (стр. 322 и сл.), подошел к проблеме четырехмерного пространства с совершенно новой точки зрения. Плюкер делает прямую основным элементом геометрии пространства. Прямая задается двумя линейными уравнениями

$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

т. е. четырьмя параметрами r, ρ, s, σ. Можно поэтому сказать, что наше пространство имеет четыре измерения, поскольку прямую рассматривают как элемент пространства. Именно таково было представление о n-мерном пространстве у Плюкера: он видел в нем геометрию обыкновенного пространства, построенную так, что основным элементом был такой, который определялся n параметрами. Представление об n-мерном пространстве точек он считал, как это выяснилось в одном случайном разговоре, „слишком метафизичным".

На этой основе развивается новая дисциплина, так называемая *геометрия линий*, т. е. учение о тех агрегатах прямых, которые могут быть заданы одним, двумя или бóльшим количеством уравнений от параметров r, ρ, s, σ. Плюкер называет геометрический образ, заданный уравнением $f(r, \rho, s, \sigma) = 0$, *комплексом*, а пересечение двух комплексов — *конгруэнцией*. „Прямолинейные системы лучей", изучение которых начал в 1866 г. Куммер, представляет собой такие конгруэнции. Более подробное изложение всего этого можно найти у Плюкера в книге *Neue Geometrie des Raumes* (1869/70).

На втором месте следует упомянуть о Римане (Riemann) и его знаменитой диссертационной речи, читанной им в Геттингене 10 июня 1854 г., *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* („О гипотезах, лежащих в основании геомерии"); не нужно смешивать ее с его докторской диссертацией о тригонометрических рядах. Последняя также проложила новые пути в другой области математики.

И здесь, как и во многих других областях математики, Риман является продолжателем идей, созданных Гауссом. В *Disquisitiones circa superficies curvas* (1827 г., Werke, т. 4, стр. 217) Гаусс исследовал так называемую „внутреннюю" геометрию на поверхности.

Исходя из вида линейного элемента

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

он поставил вопрос о нахождении тех свойств поверхности, которые не зависят от выбора системы криволинейных координат p, q. Он обнаружил существование геодезических линий, определяемых условием $\delta \int ds = 0$; он построил из E, F, G и их первых и вторых производных по p и q инвариантную величину — „кривизну“ поверхности и т. д.

Аналогичным образом Риман исходит из пространства, или,— как он говорит, чтобы избегнуть связанных с этим словом возражений, —из многообразия n измерений, в основу которого он кладет линейный элемент, заданный положительной определенной квадратичной формой

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

и связывает с этой квадратичной формой вопрос о нахождении свойств, не зависящих от выбора переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Особенный интерес в этом исследовании получают многообразия, линейный элемент которых может быть приведен к виду

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2,$$

и вопрос об условиях, налагаемых на коэфициенты a_{ik} для того, чтобы исходная форма могла быть приведена к такому виду, а также аналогичный вопрос для пространств, линейный элемент которых может быть приведен к виду

$$ds^2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \right).$$

Пространства первого рода представляют собой непосредственное обобщение пространства с евклидовой геометрией; пространства второго рода включают в себя и неевклидовы пространства. Применительно к элементарной теории поверхностей в R_3 Риман называет пространства первого рода плоскими, а второго рода— пространствами постоянной кривизны. Эта аналогия весьма привлекательна, но она имеет и недостатки. Ибо свойства „плоский“, „постоянной кривизны“ имеют место для многообразий двух измерений лишь постольку, поскольку они находятся в некотором трехмерном многообразии; а когда рассматривается риманово многообразие R_n, то нет никакой речи об объемлющем многообразии R_{n+1}.

Этот доклад Римана вызвал необычайный интерес, когда он был напечатан Дедекиндом в 1868 г. в тринадцатом томе Göttinger Abhandlungen, уже после ранней смерти Римана (1866). Ибо в этой работе Риман не только положил начало глубоким

математическим исследованиям, — от нее ведет начало новая математическая дисциплина, а именно учение об общих свойствах и классификации диференциальных форм $\sum a_{ik} dx_i dx_k$, — но и коснулся вопроса о внутренней сущности наших пространственных представлений и о применении этих идей к объяснению явлений природы.

Весьма замечательно, что по истечении значительного промежутка времени новейшее естествознание воспринимает эти идеи. Теория относительности Эйнштейна кладет в основу изучения линейный элемент ds^2, который в простейших координатах имеет вид

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2.$$

Таким образом, здесь идет речь о выражении рассмотренного Риманом типа, с той только разницей, конечно, что рассматриваемая здесь форма не является положительно определенной.

Теперь мы вернемся к Грассману, которым и займемся подробнее. Личность Грассмана и его труды представляются нам теперь вполне отчетливо благодаря изданному в период 1894—1911 гг., по поручению Лейпцигского научного общества, собранию его сочинений в трех двойных томах, из которых третий содержит весьма подробную и интересную биографию, написанную Энгелем. Эта работа Энгеля тем более ценна, что он свободен от присущего секте грассманианцев обыкновения некритически прославлять своего вождя.

Герман Грассман (Hermann Grassmann), родившийся в 1809 г. в Штеттине, был потомком старой протестантской пасторской фамилии, в традициях которой был интерес к наукам и искусствам. Это происхождение сыграло важную роль в жизни Грассмана. Под непрекращавшимся в течение всей его жизни влиянием семейных традиций развивалась по собственному пути и по собственным законам его тихая, медлительная натура. Характерно, что свой научный путь Грассман начинает с изучения теологии и филологии, которыми он занимался в Берлине с 1827 по 1830 г. отчасти под влиянием Шлейермахера, отчасти самоучкой.

Грассман никогда не слушал математических лекций; в 1832 г. он начинает самостоятельно заниматься математическими вопросами; проработав с 1836 г. в качестве учителя в Штеттине (до этого в Берлине), он в 1839/40 г. подвергается дополнительному экзамену на звание преподавателя математики (написав экзаменационную работу на тему о приливах и отливах). С 1842 г. он был преподавателем Штеттинской гимназии и не оставил этой работы до своей смерти в 1877 г.

Таким образом, несмотря на оригинальность и значительность своих трудов, Грассман никогда не был университетским преподавателем, и вообще, вследствие своеобразного развития его научной деятельности, в течение главной части жизни его математические заслуги не получили должного признания

со стороны окружающих. Естественно, что он часто жаловался на несправедливость судьбы, хотя в ней, между прочим, имелись и некоторые преимущества, последствия которых сказались на работах Грассмана и на развитии его личности. Мы, работники высшей школы, растем в атмосфере острой конкуренции с людьми, стремящимися к тем же целям, что и мы сами, как дерево в лесу, которому приходится не расти вширь, а простирать свои ветви только вверх, чтобы получить возможность выжить и завоевать себе свою часть света и воздуха; тот же, кто стоит одиноко, как Грассман, может полностью развивать все стороны своего дарования, гармонически сочетать особенности своего характера со своей работой. Конечно, многосторонность приводит в некоторой мере к дилетантизму, который неизбежно был присущ и Грассману; эта черта особенно отчетливо отразилась на его написанных в старости работах.

Едва обозримо число тех разнообразных областей, которыми занимался Грассман и которые он обогатил своими исследованиями. Он был не только математиком оригинальнейшего склада с сильно выраженными философскими интересами, но и физиком, занимавшимся как теоретическими, так и практическими вопросами; ему мы обязаны великолепными работами об электрическом токе, об учении о цветах и о теории гласных звуков. В исследованиях в последней области, которые шли параллельно исследованиям Гельмгольца и были этим ученым высоко оценены, он использовал свой необычайно тонкий музыкальный слух; нужно сказать, что Грассман проявлял большой интерес к музыкальному искусству и был в этой области весьма одарен. При всем этом он развивал и свои филологические наклонности: в особенности его привлекала область сравнительного языкознания, в которой он деятельно работал; эта область обязана ему составлением словаря к Ригведам [1]), сборником немецких народных песен, исследованием, посвященным немецким названиям цветов, и мн. др. При всем этом он находил время для живейшего участия в окружающей его жизни. Политические, социальные, церковные вопросы живейшим образом его интересовали. В течение многих лет он был редактором газеты; франкмассоны считали его своим членом и возвысили его в звание мастера кафедры; особенно деятельный интерес он проявил к работе китайской миссии.

Не следует поэтому удивляться, что при такой чрезмерно разнообразной деятельности Грассмана имеется и одна сфера деятельности, которая ему никак не удавалась: он был плохим учителем. Правда, и в этом направлении он проявил всю свойственную ему добросовестность; но его слишком любезное, скромное и всегда приветливое обращение не способствовало тому, чтобы вызвать к себе уважение со стороны учеников. Грассман бывал доволен, если ему удавалось заинтересовать

[1]) Ригведы—один из древнейших памятников санскритской письменности. *Прим. перев.*

своим предметом нескольких учеников, и смирялся с тем, что оставшееся большинство непонимающих забавлялось всеми доступными им способами,— яркий и предостерегающий пример того, что качество преподавателя не всегда идет рука об руку с его научными достижениями и заслугами.

Перейдем теперь к математическим достижениям Грассмана. Они представлены его большим сочинением *Ausdehnungslehre* („Учение о протяженности"), первое издание которого, относящееся только к аффинной геометрии, появилось в 1844 г.; второе издание (1861) содержит эту же теорию, но в совершенно ином изложении и охватывает также и метрическую геометрию. Оба произведения изложены в высшей степени мало доступно и даже почти неудобочитаемы. В первом все выводится из наиболее общих философских понятий, без помощи всяких формул. Во второй части автор пользуется уже n координатами, но в ней вводится необычайно много новых терминов и алгорифмов и она изложена в строго систематическом порядке, напоминающем изложение Евклида. Чтобы познакомить вас с содержанием этой книги, я попытаюсь изложить наиболее существенное на нашем теперешнем языке.

Предмет исследования составляет континуум n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (не однородных), т. е. пространство R_n. В первом издании Ausdehnungslehre это R_n рассматривается с точки зрения аффинной геометрии; Грассман называет эту теорию „lineale" Ausdehnungslehre, т. е. теорией линейной протяженности. Во втором издании он присоединяет сюда изучение величины

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2},$$

т. е. переходит к изучению *метрических* свойств. Суть дела заключается в обобщении свойств обыкновенной евклидовой геометрии на пространство R_n. Исследованию подвергаются прежде всего линейные образы, т. е. точка, прямая, плоскость, и вообще — так как обобщение такой терминологии на R_n невыполнимо — последовательность образов $S_0, S_1, \ldots, S_n$, которые можно, согласно закону двойственности, расположить и в обратном порядке.

До сих пор мы имели дело с основными образами Штейнера, определенными в пространстве R_n. После этого Грассман делает важный шаг вперед: он связывает с этими образами понятие об их *величине* (Inhaltsbegriff) и отличает от неограниченных образов определенные ограниченные *куски*, вырезаемые из неограниченных образов, и делает эти конечные куски объектами геометрических исследований; он говорит об „отрезках", т. е. о частях прямой, о „плоских величинах" (Plangrösse), т. е. о частях плоскости, далее о частях трехмерных образов и т. д. [1]).

[1]) См. мою книгу „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus" („Элементарная математика с точки зрения высшей", т. 2, 3-е изд., стр. 22 и сл., стр. 31 и сл.; вышел русский перевод).

На примере обычного пространства R_3 можно хорошо уяснить, как меняется при этом число основных образов по сравнению с теорией Штейнера; я использую для этого указания самого Грассмана, сделанные им в Gruneris Archiv [1]) (т. 6, 1845). Мы увидим, что вместо четырех основных образов Штейнера: точка, прямая, плоскость, пространство, у Грассмана появляется семь (или шесть) образов. При построении этих образов Грассман строго придерживается систематического метода детерминантов и их матриц, хотя, конечно, и не делает это в тех привычных для нас обозначениях, которыми я в дальнейшем буду пользоваться.

Первый существенный шаг заключается в том, что он относит каждой точке „массу" m — явное позаимствование у Мебиуса, с которым Грассман по всему своему характеру имел много общих черт; при этом получается четырехмерная и, следовательно, однородная система координат. Точку он определяет координатами mx, my, mz, m, что дает возможность определить координаты центра тяжести двух точек

$$m_1x_1,\ m_1y_1,\ m_1z_1,\ m_1,$$

$$m_2x_2,\ m_2y_2,\ m_2z_2,\ m_2$$

простейшим образом, т. е. сложением соответствующих координат:

$$m_1x_1+m_2x_2,\quad m_1y_1+m_2y_2,\quad m_1z_1+m_2z_2,\quad m_1+m_2.$$

Если масса обращается в нуль, т. е. если точка удаляется в бесконечность, то система чисел

$$x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2,\ 0$$

или

$$X,\qquad Y,\qquad Z,\qquad 0$$

характеризует отрезок прямой, имеющий определенное направление, но могущий свободно перемещаться в пространстве; это можно представить себе лучше, если принять во внимание, что координаты разности двух точек, имеющих равные массы, представляют собой разности координат этих точек, причем четвертая координата равна нулю. Построенный таким образом основной образ мы будем, ввиду последнего из указанных свойств, называть „свободным отрезком"; в механике ему соответствует хорошо известное понятие „свободного вектора".

Мы перейдем теперь к основным образам второй ступени. Они определяются с помощью матрицы, составленной из компонент двух точек равной массы:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix}$$

(так как, рассматривая две точки неравной массы, мы получим

[1]) Grassmann, Werke, т. 1, стр. 297—312.

весьма несущественное обобщение, то мы сначала рассмотрим случай масс, равных единице, а впоследствии остановимся на том частном случае, когда массы равны нулю). Детерминанты этой матрицы определяют „часть линии“ или „связанный отрезок“ (связанный вектор), т. е. прямолинейный отрезок, могущий перемещаться только вдоль одной какой-нибудь прямой; сила, приложенная к твердому телу, представляет собой величину такого рода. Если сочетать подобным же образом две точки массы нуль, т. е. два „свободных отрезка“

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \\ X' & Y' & Z' & 0 \end{pmatrix},$$

то получится „свободная плоская величина“, т. е. часть определенным образом расположенной плоскости, имеющая определенную величину и определенное направление обхода, могущая однако перемещаться параллельно самой себе в пространстве, — пара сил в механике.

Образы третьей ступени получаются таким образом:

1. Из матрицы

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \end{pmatrix}$$

получается часть плоскости или „связанная плоская величина“, которая может перемещаться только в одной определенной плоскости.

2. Из матрицы

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \\ X' & Y' & Z' & 0 \\ X'' & Y'' & Z'' & 0 \end{pmatrix}$$

получается часть пространства, имеющая определенную величину и определенное направление.

Наконец образ четвертой ступени представляет собой снова часть пространства, имеющую определенную величину и определенное направление, ибо детерминант его

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix}$$

сводится к детерминанту предыдущего типа после вычитания

элементов одной горизонтали. Всем этим образам следует предпослать как образ нулевой ступени простую числовую величину.

Как мы видим, все эти образы теснейшим образом связаны с механикой твердого тела; они представляют собой, по сути, то, что мы получили кружным путем через Англию в виде векторного исчисления, в то время как уже давно, совершенно о том не подозревая, имели это и в Германии. Указанный нами путь исследования весьма плодотворен и при изучении кристаллографии.

Грассман не только ввел совершенно новые объекты исследования, но и пользовался своеобразными глубоко проникающими методами, в основе которых лежали широкие общие идеи и которые он разрабатывал с помощью новых и весьма остроумных алгорифмов.

Общая идея, положенная в основу теории протяженности и возникающая у всех склонных к геометрии натур, заключается прежде всего в том, что непрерывное многообразие, т. е. протяжение, пространство, представляет собой такое же исходное, основное понятие, как, с другой стороны, число, с которым оно уже только позже может быть поставлено в связь, устанавливаемую измерением; что, таким образом, совершенно неестественно и не нужно включать „измерение", как это делает Евклид, в основные геометрические понятия и строить на них, например учение о пропорциях, причем после введения понятия об иррациональном числе мы приходим к тому жалкому положению, что континуум исчерпывается дискретным. Мысль о том, что этот указанный Евклидом путь является обходным путем для развития геометрии и что он даже не ведет к цели, т. е. к выяснению и овладению проблемой континуума, характеризует то постоянно вновь возникающее математическое направление, которому в корне противоречат победившие теперь тенденции арифметизирования математики [см. реферат об элементарной математике Цахариаса (Zacharias), Enzykl., III, AB 9]. Так, например, Гильберт в своих *Grundlagen der Geometrie* („Основаниях геометрии") вводит понятие о предельном переходе только в конце своих исследований, после того как он обосновывает чистое исчисление отрезков, которым он однако в дальнейшем не пользуется. Грассман точно так же протестует против того, что геометрия является только приложением арифметики, и возвышает свое „учение о протяженности" в степень самостоятельной науки, от которой он отличает — опять-таки как самостоятельную дисциплину — теорию измерений.

Построение последней производится с помощью арифметики, и поэтому вполне последовательно то, что Грассман занимается *основами арифметики*: один из первых он обращает внимание на исследование основных свойств обыкновенного счета. Рядом с ним здесь следует упомянуть из немецких ученых Мартина Ома (M. Ohm), долгое время бывшего профессором Берлинского

университета; брат его — физик Георг Ом, именем которого назван „закон Ома“. Не будучи глубоким математиком, Ом все-таки построил „полную и последовательную“ систему основ арифметики.

Характерными особенностями правил счета Грассман считает для сложения то, что оно коммутативно и ассоциативно:

$$a+b=b+a; \quad a+(b+c)=(a+b)+c;$$

для умножения — то, что оно коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению:

$$a\cdot b=b\cdot a; \quad a(b\cdot c)=(a\cdot b)c; \quad a(b+c)=ab+ac.$$

Я пользуюсь здесь терминами, взятыми из французских и английских работ, ибо они, будучи латинскими, а следовательно, и интернациональными, получили широкое распространение; само собой понятно, что для всех этих понятий Грассман создал чисто немецкие термины.

Интересы Грассмана направляются далее главным образом к выяснению того, как эти правила счета могут быть обобщены. Он приходит к введению *высших комплексных чисел*, у которых свойство коммутативности умножения не имеет места. Из многих различных систем, построенных и изученных Грассманом, — в статье в журнале Крелля (Crelle, т. 49, 1885, стр. 10, 123 и сл.) он рассматривает не меньше чем 16 различных видов комплексного умножения, — я бы хотел рассмотреть только комбинаторное произведение, которым он пользуется в линейном учении о протяженности и которое вполне аналогично теории детерминантов.

Пусть точка в пространстве R_n задана выражением

$$x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n=\sum_{i=1}^{n} x_ie_i,$$

где e_i суть единичные элементы различного рода. Суммой двух точек мы будем, конечно, называть точку, получающуюся в результате сложения численных величин, стоящих при единицах одного и того же рода:

$$\sum_{i=1}^{n} x_ie_i+\sum_{i=1}^{n} y_ie_i=\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)e_i,$$

так же, как мы это делали при нахождении центра тяжести двух точек. Для произведения двух точек мы установим следующие правила.

Положим, что

$$\sum x_ie_i\cdot\sum y_ie_i=\sum\sum(x_iy_k)e_ie_k,$$

причем $e_ie_k=-e_ke_i$, так что $e_i^2=0$. При этом мы получаем $\frac{1}{2}n(n-1)$ всевозможных различных произведений из основ-

ных единиц по два, которые мы будем называть единицами второй ступени. Точно так же строятся единицы третьей ступени и т. д. вплоть до n-й ступени. Если взять произведение большего, чем n, числа основных единиц, то получится нуль, ибо по крайней мере одна из единиц встретится дважды. Произведение n точек

$$\sum x_i e_i \cdot \sum y_i e_i, \ \ldots$$

равно детерминанту

$$\begin{vmatrix} x_1 \, x_2 \ldots x_n \\ y_1 \, y_2 \ldots y_n \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{vmatrix},$$

умноженному на единицу n-й ступени $e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \ldots e_n$, которая, если не принимать во внимание знака, имеет только одно значение. Этим произведением завершается процесс образования новых величин, который действительно протекает вполне параллельно описанному нами процессу составления детерминантов. То, что произведение двух единиц дает нечто новое, — единицу более высокой ступени, — имеет свое геометрическое отображение: две точки определяют отрезок на прямой и т. д.

Так изложен этот материал во втором издании *Ausdehnungslehre*, сообщение которого я считал тем более желательным, что теория высших комплексных чисел, над которыми установлены определенные правила счета, сделалась затем неотъемлемой составной частью высшей теории алгорифмов, постоянно привлекающей к себе внимание.

Рядом с этими алгорифмическими исследованиями Грассману принадлежит большое число интересных работ по специальным вопросам, в каждой из которых заключается какое-нибудь особое достижение; только о немногих из них я могу весьма коротко здесь рассказать.

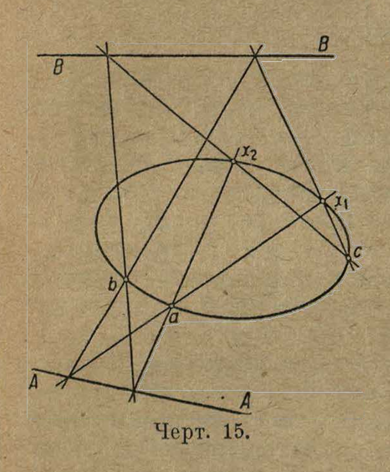
1. Во втором издании *Ausdehnungslehre* дано исторически первое исчерпывающее перечисление всех тех случаев, которые могут представиться в так называемой *проблеме Пфаффа*. Пфафф (Pfaff), учитель Гаусса, поставил в 1814 г. задачу о приведении к простейшему виду выражения

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n = 0,$$

где X_i — „произвольные" функции в тогдашнем смысле, т. е. диференцируемые функции, не имеющие особых точек высшего порядка. Относительно этого выражения могут быть сделаны различные предположения. Либо функции X_i могут быть совершенно произвольны и независимы друг от друга, либо между ними могут существовать некоторые зависимости; весьма частный случай имеет место тогда, когда это выражение пред-

ставляет собой полный диференциал; несколько более общий случай, — если оно представляет полный диференциал только после умножения на некоторый множитель. Заслуга Грассмана заключается в том, что он выяснил и сгруппировал все эти возможные случаи.

2. Особенного упоминания заслуживают так называемые „линейные построения", т. е. образования алгебраических образов с помощью „планиметрических произведений". Эта теория, к сожалению, не получила достаточной известности, хотя она и отличается большой доступностью для понимания.



Черт. 15.

Я ограничусь плоскостью, и именно вопросом о кривых второго и третьего порядка. Хорошо известно так называемое маклореновское построение конических сечений, — метод, который, конечно, сводится к проективному построению, но проводит его особенно наглядно. Пусть x — точка искомого конического сечения (черт. 15); тогда выходящий из точки x путь $xaAbBc$, состоящий из последовательности прямых, определяемых с помощью заданных трех точек a, b, c и двух прямых A, B, возвращается обратно в точку x [1]). Таким образом, с помощью пяти величин a, b, c, A, B можно построить произвольное количество точек конического сечения.

Грассман выражает эти соотношения символическим равенством

$$xaAbBcx = 0$$

и называет выражение, стоящее слева, планиметрическим произведением. Таким путем можно определить произвольную алгебраическую кривую и даже механически ее построить. Мы получим кривую n-го порядка, если x войдет ровно n раз множителем в планиметрическое произведение. Так, например, равенство

$$xaAbBxCcDdx = 0$$

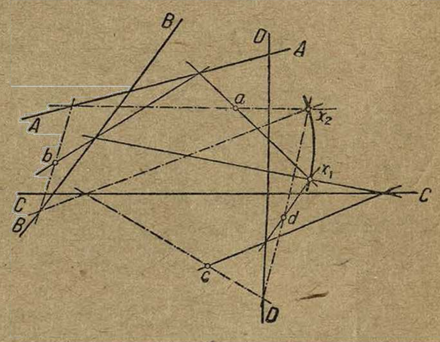
характеризует кривую третьего порядка, которая может быть построена по схеме, уясняемой из черт. 16.

---

[1]) То-есть искомое коническое сечение характеризуется тем, что если провести последовательно прямые: xa — соединяющую точки x и a; $xaAb$ — соединяющую точку пересечения прямых xa и A с точкой b, и наконец прямую $xaAbBc$, соединяющую точку пересечения прямых $xaAb$ и B с точкой c, то последняя из этих прямых проходит через точку x, что Грассман выражает равенством $xaAbBcx = 0$. *Прим. ред.*

Если построить соответствующий этой схеме пишущий прибор и установить его, путем испытаний, так, чтобы получить первую точку x_0, то он автоматически опишет ветвь алгебраической кривой C_3, на которой лежит точка x_0; для того чтобы получить и другую, быть может существующую, ветвь C_3, понадобится новая установка прибора.

Наиболее существенным во всей этой теории является данное Грассманом доказательство того, что любая кривая C_n может быть таким же образом построена и, следовательно, может быть чисто геометрически определена при помощи достаточно сложного планиметрического произведения. Эта теорема может быть положена в основу такого построения теории алгебраических кривых, проще которого вряд ли что можно придумать.



Черт. 16.

На этом я закончу мои замечания о работах Грассмана. Прежде чем окончательно перейти к дальнейшему, я должен еще упомянуть о том своеобразном влиянии, которое исходило от него и следы которого ощущаются еще и в наше время. Две черты характера Грассмана и его судьбы делают его — и чем дальше, тем больше — главою школы или, вернее сказать, секты последователей, проникнутых обычным в таких случаях фанатизмом. Первая из них заключается в его явно выраженной склонности к особенным алгорифмам, к которым всякий новопосвященный настолько привыкает, что они получают для него некое обязательное значение и становятся отличительным признаком, тесно связующим между собой адептов. При этом возникает опасность, что в ортодоксальном стремлении к строгому сохранению некоторых определенных форм исследования будет утеряно то, что математически наиболее существенно, т. е. глубоко идущее исследование проблемы; этой опасности грассманианцы не всегда могли избежать. Второе важное обстоятельство заключается в том, что Грассман при своей жизни действительно не получил того признания, которого он был достоин, и его последователи видели в нем поэтому мученика, которого нужно было окружить ореолом для того, чтобы восстановить его значение. Именно этому и нужно приписать стремление по возможности необыкновенно выбирать термины; для того чтобы возвратить своему мастеру почет и славу, стараются освободиться раньше всего от всего обычного, чтобы избегнуть таким образом сравнительной критики.

В качестве примера проявления такой тенденции укажу на небезынтересную книгу по „проективной геометрии“ Г. Грассмана

(младшего), вышедшую в 1909 г. (первая часть второго тома вышла в 1913 г.). Для шести основных грассмановых понятий здесь придуманы термины: точка, отрезок, стержень (Stab), поле (Feld), лист (Blatt), блок (Block).

Все эти термины несомненно имеют нечто подкупающее, ибо они все представляют собой краткие немецкие слова. Однако после ближайшего рассмотрения все эти „улучшения“ вызывают некоторое раздумье. Почему, например, отрезок свободно перемещается в пространстве, в то время как стержень можно перемещать только вдоль одной прямой? Точно так же остается необоснованной свободная подвижность поля, в то время как лист остается приклеенным к одной плоскости; кроме того, термин „поле“ уже давно получил в механике совсем другой смысл. Таким образом, эти термины не имеют никакой непосредственной наглядности, на которую они претендуют и наличие которой сделало бы их ценность несомненной. Так как к тому же в них не отразилась и история возникновения этих понятий — как например в термине „Linienteil“, — то они представляют собой, по сути, совокупность названий, принадлежность которых к понятиям может быть усвоена только механическим заучиванием наизусть. И нужно затратить некоторое время для того, чтобы научиться ими владеть с полной уверенностью.

Все эти черты сектантства встречаются и у кватернионистов, учеников Гамильтона, к соответствующим исследованиям которого мы сейчас и перейдем. Нет почти нужды упоминать о том, что грассманианцы и кватернионисты ведут между собой, конечно, оживленную борьбу, причем каждая школа в свою очередь распадается на дико враждующие между собой группировки.

Вилльям Роуэн Гамильтон (William Rowan Hamilton) родился в 1805 г. в Дублине. Как и Сальмон, он вышел из Trinity College, который он блестяще окончил еще в ранней своей юности. В 1827 г. он занял почетный и высокий пост директора обсерватории в Дэнсинке (Dunsink), около Дублина, и получил звание королевского астронома Ирландии; он сохранил его до конца своей жизни (1865).

Гамильтон был одарен необыкновенно блестящим, многосторонним дарованием, которое выявилось замечательнейшим образом уже в его ранние годы. Десяти лет он уже знал наизусть Гомера и начал изучение арабского и санскритского языков; уже через несколько лет он знал и вполне владел тринадцатью языками. При всем этом у него была очень сильная склонность и к искусству: до своих поздних лет он был весьма продуктивным поэтом и в течение всей жизни сохранял тесную дружескую связь с Вордсвортом. Тот, кто захотел бы ближе узнать личность Гамильтона и историю ее развития, с удовольствием прочтет толстую трехтомную биографию, написанную Р. П. Грэвсом (R. P. Graves, 1882 — 1889), которая, однако, будучи написана не математиком, посвящена в большей мере Гамиль-

тону как личности, чем как ученому. Последний период жизни Гамильтона почти не затронут в этой биографии. Как мне рассказывали в Дублине, в последние годы своей жизни Гамильтон вел себя крайне странно, чтобы не сказать даже безумно. Очевидно, что его слишком рано развившийся дух скоро переутомился и омрачился раньше, чем этого можно было ожидать при его возрасте. Рассматривая все то, что сделал Гамильтон, можно также притти к этому выводу; сплошь и рядом в его работах мы находим новые блестящие по остроумию идеи, но в дальнейшем они теряются в подробностях, не претворяясь в полную, законченную систему.

Математическое творчество Гамильтона, как и его творчество в других областях, началось очень рано. С 1824 по 1835 г. он занимается вопросами геометрической оптики и аналитической механики. Его достижения в этой области мы рассмотрим позже.

С 1833 г. он все больше и больше углубляется в изучение сущности алгебраического алгорифма. Первое изложение его мыслей по этому вопросу находится в статье, напечатанной в семнадцатом томе Transactions of Royal Irish Academy за 1833 и 1835 гг. (стр. 293 и сл.): *Theory of conjugate functions or Algebric Couples; with a preliminary and elementary essay on Algebra as the Science of pure time* („Теория сопряженных функций или алгебраических пар; с предварительным и элементарным опытом об алгебре как науке о чистом времени“).

Как это видно из названия, понятие о числе мыслится здесь как нечто, для чего существенным является время, а не пространство, ибо сначала исследуется только идея последовательности. Мысль эта идет от Канта, но Гамильтон развивает ее дальше. Количественное, пространственное, по представлению Гамильтона, наступает только после введения операции вычитания, благодаря чему делается возможным и измерение. Далее он переходит к рассмотрению комплексных чисел $x+iy$; они рассматриваются, как это теперь уже всюду принято, как пары чисел (x, y), над которыми установлены определенные условные правила действий. К этому примыкают общие аксиоматические соображения относительно правил обыкновенного счета, аналогичные тем, которые были позже установлены Грассманом.

Начиная с этой статьи, Гамильтон все с бо́льшим и бо́льшим интересом отдается проблеме разыскания такой новой системы комплексных чисел, которая допускала бы полезную геометрическую интерпретацию в пространстве, т. е. в нашем обычном R_3, подобную той, которую имеют комплексные числа $x+iy$ в плоскости. Его неутомимые поиски привели его наконец в 1843 г. к нахождению кватернионов, т. е. к системе особенных четырехчленных комплексных чисел, разработке и распространению которой он себя с этой поры исключительно посвятил. Теорию этих чисел он изложил в двух обстоятельных трудах: *Lectures on Quaternions* („Лекции о кватернионах“, 1853) и *Elements on*

Quaternions („Элементы теории кватернионов“, 1866, посмертное издание) [1].

Очень скоро кватернионы стали в Дублине той областью математических интересов, которая сосредоточила на себе максимальное внимание; они были сделаны даже предметом, по которому был установлен специальный экзамен и без знания которого было немыслимо окончание колледжа. Для самого Гамильтона они сделались краеугольным камнем его математического credo, и он насильственно связывал с кватернионами все свои геометрические и прочие работы; эта фанатическая вера в универсальное значение теории кватернионов росла по мере того, как вырастала к концу его жизни односторонность его интересов и омрачался его дух под влиянием алкоголя.

Как я уже говорил, вокруг Гамильтона возникла школа, которая в фанатичности и нетерпимости превзошла своего учителя. Эти черты способны были вызвать только противодействие, и поэтому кватернионы встречали, например, в Германии упорное сопротивление со стороны большинства математиков до тех пор, пока они не проникли кружным путем, через физику, в форме векторного анализа, необходимого раньше всего в динамике. Если теперь выразить свое мнение о кватернионах, то нужно сказать так: кватернионы хороши и применимы на своем месте, но они не имеют все же такого значения, какое имеют обыкновенные комплексные числа.

Переходя теперь к более подробному изложению теории кватернионов в том виде, в каком я ее уяснил себе в течение многих лет и который связан с рассматриваемыми здесь идеями, я ясно понимаю, что становлюсь на позицию, резко противоречащую позиции „гамильтонианцев“, глава которых придал своему открытию совсем другой внешний облик. Больше того, я знаю, что эта группа еще и теперь оспаривает право называть кватернионами все то, о чем я собираюсь кратко говорить здесь и что я более подробно изложил в первой тетради сочинения о теории волчка [2].

Однако я слишком часто убеждался в тщетности всякой попытки установить взаимное понимание, чтобы хоть сколько-нибудь принимать в расчет эти возражения.

Я буду исходить из геометрической интерпретации чисел $x+iy$ на плоскости. Как известно, число $x+iy$ представляет собой как точку с координатами (x, y), так и отрезок, соединяющий эту точку с началом координат. Сложение

$$(x+iy)+(a+ib)=(x+a)+i(y+b)$$

соответствует сложению двух направленных отрезков, а следовательно, и параллельному смещению всей плоскости вдоль отрезка $a+ib$.

---

[1] Немецкий перевод П. Глана (P. Glan, Leipzig 1881).

[2] Klein-Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Heft 1, Кар. I, § 7.

Наконец умножение

$$(x+iy)\cdot(a+ib)=(x+iy)\cdot\rho\cdot e^{i\varphi}$$

соответствует вращению всей плоскости вокруг точки 0 на угол φ и одновременному удлинению всех размеров в отношении $1:\rho$, т. е. подобному преобразованию и вращению или, как мы это будем коротко называть, вращательному растяжению (Drehstreckung).

Таким образом операции сложения и умножения охватывают совокупность всех возможных движений на плоскости; они даже охватывают большее, если принять во внимание растяжение в отношении $1:\rho$. Из этого и вытекает целесообразность применения алгебраических вычислений с обыкновенными комплексными числами в вопросах метрической геометрии.

Возникает вопрос, нельзя ли соответствующие преобразования в пространстве интерпретировать с помощью каких-нибудь комплексных чисел более высокого порядка. Можно было бы попытаться воспользоваться трехчленным выражением и условиться, что число $ix+jy+kz$ должно изображать точку с координатами x, y, z, или отрезок — как теперь говорят, вектор — соединяющий эту точку с точкой 0. (Термин „вектор" появляется впервые у Гамильтона, Quarterly Journal, т. I, 1845, стр. 56.)

Как и в плоскости, сложению двух таких векторов соответствует параллельное смещение всего пространства. Однако с умножением дело обстоит иначе. Вращение вокруг нулевой точки определяет в пространстве некоторую ось, и поэтому вращение с растяжением, характеризуемое в плоскости *двумя* константами, может быть охарактеризовано в пространстве только *четырьмя* параметрами: два из них определяют направление оси вращения: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, причем $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; один служит для определения угла вращения ω; с помощью четвертого определяется растяжение r.

Гамильтон составляет четырехчленное комплексное число — *кватернион*

$$r\cos\frac{\omega}{2}+ir\sin\frac{\omega}{2}\cos\alpha+jr\sin\frac{\omega}{2}\cos\beta+kr\sin\frac{\omega}{2}\cos\gamma=$$
$$=t+ix+jy+kz.$$

Чисто числовую часть t кватерниона Гамильтон называет *скалярной частью* кватерниона, направленную часть $ix+jy+kz$ он называет *векторной частью*. Если $r\cos\frac{\omega}{2}=0$, то мы получаем чистый вектор; в этой теории ему соответствуют либо отрезок, либо растяжение и вращение на угол в 180°, которые мы естественно назовем „растяжением с переворачиванием" (Klappstreckung).

Вторая интерпретация чистого вектора дает еще одно объяснение тому, что для изображения вращения с растяжением в пространстве недостаточно вектора, т. е. трехчленного комплексного числа. Вектор соответствует только вращению на 180°;

для представления всевозможных вращений с растяжением необходимы кватернионы, в которые входит и скалярная часть.

Весьма замечательно, что проблема общего вращения с растяжением пространства, т. е. проблема сложения двух вращений с растяжением, была почти одновременно (в 1840 г.) решена и Олинд Родригесом (Olinde Rodrigues), исходившим из совсем другой точки зрения (Journal de Liouville, т. 3). Но еще большего удивления достойно то, что Гаусс владел интересующей нас проблемой еще в 1819 г., как это видно из его литературного наследия. На стр. 357 и сл. восьмого тома собрания его сочинений содержатся заметки об этом преобразовании, названном им „мутацией пространства“ [1]).

В то время как последние авторы выводят правила сложения двух вращений с растяжением, исходя из геометрических соображений, Гамильтон связывает этот вопрос с формальным умножением своих кватернионов, которое он определяет некоторыми правилами. Как и Грассман, он отказывается от закона коммутативности и полагает, что

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$jk = i, \quad ki = j, \quad ij = k,$$
$$kj = -i, \quad ik = -j, \quad ji = -k.$$

Далее, он принимает закон дистрибутивности, так что

$$\begin{aligned}(d + ia + jb + kc)\cdot(t + ix + jy + kz) &= \\ = dt - ax - by - cz + i(at + dx + bz - cy) &+ \\ + j(bt + dy + cx - az) + k(ct + dz + ay - bx)&.\end{aligned}$$

В результате перемножения двух векторов получается в частности

$$\begin{aligned}(ia + jb + kc)\cdot(ix + jy + kz) &= \\ = -(ax + by + cz) + i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx)&.\end{aligned}$$

---

1) См. по этому поводу статью П. Штеккеля в собрании сочинений Гаусса (т. 10, 2. IV, стр. 68), а также E. Study (Enzyklop. I A 4, стр. 173). Позже в письме к Клейну Штекель писал (28 апреля 1917) относительно приводимых далее формул умножения: „Эйлер нашел их, решая проблему Ферма о представлении целого числа в виде суммы квадратов четырех чисел, и сообщил их 4 мая 1748 г. Гольдбаху (Corresp., т. I, стр. 452). Они напечатаны в статье Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, Novi Comment. Petrop. 5 (1754/5) 1760, § 93, Opera I 2, стр. 369; см. также Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata, Nova Acta Petrop. 1777, II, 1780, Opera I 3, стр. 229 (§ 9). Следует особенно отметить статью Эйлера Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile, Novi Comment. Petrop. 15 (1770) 1771, в которой он устанавливает ортогональные преобразования трех, четырех, пяти переменных и выводит при этом вышеупомянутые соотношения. Вы, конечно, догадываетесь, как я это все узнал: дело шло о шкале мутаций Гаусса для моей главы о комплексных числах [l. c.], которой я сейчас занят. При этом я придавал определенное значение формулам Эйлера потому, что для меня все больше выясняется, как хорошо знал Гаусс своего Эйлера...“ *Прим. ред. нем. изд.*

Скалярную часть этого кватерниона с измененным знаком называют *внутренним произведением* обоих векторов, векторную часть — *внешним произведением*, пользуясь терминологией, идущей от Грассмана. Внутреннее произведение есть, следовательно, скаляр, внешнее — вектор.

Я хотел бы тут же обратить внимание на три важных различия между первоначальными комбинаторными произведениями Грассмана и произведением у Гамильтона.

1. У Грассмана произведение двух единиц $e_i \cdot e_k$ не выражается через основные единицы; у Гамильтона, напротив, эти произведения линейно выражаются через основные единицы. Единицы же более высокой ступени совсем не участвуют. Вопрос о построении подходящей системы высших комплексных чисел получает при этом несколько другой смысл. Можно иметь в виду такие исчисления, в которых, подобно исчислению кватернионов, действия сложения и умножения могут повторяться любое число раз, что в системе Грассмана невозможно.

2. Грассман с самого начала руководится интересом к n-мерному пространству, чего совершенно нет у Гамильтона.

3. У Гамильтона однако имеется одно, не встречающееся у Грассмана, понятие, которое и создает особую ценность кватернионов для физики, это понятие *поля* [1]).

Гамильтон исходит из того, что обе части кватерниона суть функции точки; он представляет себе, что в каждой точке пространства приложен кватернион, т. е. один скаляр и один вектор. К такого рода полю кватернионов $t(x, y, z) + iu(x, y, z) + jv(x, y, z) + kw(x, y, z)$ он применяет определенные операции и в результате получает новые поля. Опираясь на метод, особенно хорошо разработанный в Кембридже, Гамильтон дает этим операциям так называемые „символические обозначения". Суть их заключается в чисто формальных сокращениях, состоящих в том, что все, даже, например, обозначающие диференцирование, символы получают роль алгебраических величин. Так, например, именно в кембриджской школе было принято записывать ряд Тейлора в виде

$$f(x+h) = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} \cdot f(x),$$

где $e^{h\frac{\partial}{\partial x}}$ предполагалось развернутым в ряд, а входящие в него произведения $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} f(x)$ обозначали производные $\frac{\partial^{\nu} f(x)}{\partial x^{\nu}}$ [2]).

---

[1]) Собственно говоря, и у Грассмана имеется это понятие (в форме „функции" или экстенсивной величины) и даже в значительно более общем виде, будучи как раз поэтому менее доступным. Однако построения Гамильтона сразу метрические, Грассман же начинает с аффинных построений.

[2]) Эта символическая манера обозначений восходит к Лагранжу. См. Lagrange, Sur une nouvelle espèce de calcul rélativ à la différentiation et l'intégration des quantités variables, 1772; Oeuvres, т. III, стр. 441—476.

Подобным же образом Гамильтон строит так называемые символические „операторы“ из частных производных по координатам точки поля.

Наиболее важный из них — это оператор, обозначенный Гамильтоном ∇ и названный им, ввиду его сходства с древнееврейским музыкальным инструментом, „набла“:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

Формальные операции над набла производятся так, как если бы он был вектором; при применении этой операции к полю кватернионов сразу получаются важнейшие, известные нам теперь из векторного анализа, понятия. Если t скаляр, то

$$\nabla t = i\frac{\partial t}{\partial x} + j\frac{\partial t}{\partial y} + k\frac{\partial t}{\partial z} = \operatorname{grad} t.$$

Это — вектор, „*градиент скаляра* t“, который дает в каждой точке поля величину и направление наибольшего изменения t.

Примененная к вектору $iu + jv + kw$ операция ∇ дает

$$\nabla(iu + jv + kw) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \\ + i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Скаляр этого кватерниона называют *дивергенцией поля*, а вектор — *вихрем* или керлем (curl). Выяснение исключительного значения этих понятий в физике завело бы нас слишком далеко. Двукратное применение оператора ∇ к скаляру приводит к известному выражению, которое принято обозначать через Δ (дельта), часто применяемому в теории потенциала:

$$\nabla^2 t = -\Delta t = -\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right).$$

Легкость и изящество, с которыми получаются на этом пути глубоко содержательные теоремы, действительно изумительны; этим и объясняется восхищение кватернионистов своей системой, которая, как мы уже говорили, вскоре была ими расширена за разумные границы, в ущерб не только для математики в целом, но и для самой теории кватернионов. Такому развитию способствовал и высоко развитый формальный аппарат системы, богато питаемый символикой обозначений, внушавший глубокое уважение, доходившее до благоговения. Возникло много больших надежд на дальнейшее систематическое развитие теории кватернионов наподобие теории обыкновенных чисел. На основе исчисления кватернионов, как четырехчленных комплексных чисел, должна была быть построена алгебра с обстоятельной теорией уравнений, которая, как предполагали, получится от приравнивания нулю полиномов относительно кватернионов.

Крайней целью было — и остается теперь — создание теории функций для кватернионов, от которой ожидали совершенно новых, необычайно широких результатов для всей математики. Для содействия этой недостаточно четкой, но принятой на веру цели был даже организован в 1895 г. „Мировой союз содействия кватернионам“. Независимо от того, что всегда следует скептически относиться к такого рода нарочитому насаждению и разведению какой-нибудь области науки, можно теперь уже с определенностью сказать, что это предприятие не принесло никаких плодов. Следование намеченному выше пути, который претендовал на новизну, хотя на самом деле сводился к почти буквальному перенесению уже давно известных идей на один единственный новый объект и, следовательно, не представлял собой какой-нибудь гениальной концепции, — повело ко всякого рода расширению известных предложений, которые при такой общности теряли самое существенное в своем содержании и становились беспредметными; только в редких случаях это приводило к некоторым частным результатам, которые могли доставить определенное удовольствие. Так, например, не существует теоремы, аналогичной основной теореме алгебры, но существует такое кубическое уравнение, которому удовлетворяют все кватернионы вообще, и т. д.

В упорном следовании по намеченному пути кватернионисты упустили из виду более глубоко лежащие проблемы, представляющие действительный интерес; вследствие своего предубеждения они не усмотрели, что более широкая точка зрения дает ясный критерий плодотворности применения их теории и одновременно может указать пути, которые должны привести к успехам.

Такой более глубокой точкой зрения на все эти соотношения мы обязаны Кели. В статье *A Memoir on the Theory of Matrices* („Мемуар о теории матриц“, Philosophical Transactions, 1858) он развивает матричное исчисление, которое, охватывая теорию 4-, 9-, 16-, ... членных комплексных чисел, содержит как частный случай и теорию кватернионов. Основная идея заключается в том, чтобы установить над матрицами, характеризующими линейные преобразования, действия так, как это непосредственно вытекает из теории линейных преобразований. Таким образом сложение двух матриц производится путем сложения их соответствующих членов, т. е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{11} \dots a'_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{n1} \dots a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a'_{11} \dots a_{1n}+a'_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}+a'_{n1} \dots a_{nn}+a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц получается в результате последовательного применения тех линейных преобразований, которые

задаются перемножаемыми матрицами, т. е. с помощью известного правила перемножения двух определителей. В случае $n=2$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\alpha'+\beta\gamma' & \alpha\beta'+\beta\delta'\\ \gamma\alpha'+\delta\gamma' & \gamma\beta'+\delta\delta'\end{pmatrix}.$$

В этом правиле умножения заключается, как частный случай, и правило умножения кватернионов.

Действительно, пусть, как обычно, $i=\sqrt{-1}$ и пусть

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d+ia & b+ic\\ -b+ic & d-ia\end{pmatrix}$$

(так что определитель $\alpha\delta-\beta\gamma$ равен $a^2+b^2+c^2+d^2$); точно так же пусть

$$\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+ix & y+iz\\ -y+iz & t-ix\end{pmatrix}.$$

Перемножив эти две матрицы по только что указанному правилу, и приняв во внимание, что $i=\sqrt{-1}$, получим новую матрицу вида

$$\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D+iA & B+iC\\ -B+iC & D-iA\end{pmatrix},$$

где величины A, B, C, D имеют следующие значения:

$$A=dx+at+bz-cy,$$
$$B=dy-az+bt+cx,$$
$$C=dz+ay-bx+ct,$$
$$D=dt-ax-by-cz.$$

Легко видеть, что мы таким образом из двух кватернионов $d+ia+jb+kc$ и $t+ix+jy+kz$ построили новый кватернион $D+iA+jB+kC$, который получился бы в результате перемножения обоих кватернионов по способу Гамильтона.

Этот на первый взгляд необычайный результат становится очень хорошо понятным после более внимательного рассмотрения геометрической сути рассматриваемых соотношений. Тогда выясняется, что основная причина плодотворности применения кватернионов заключается в появлении бинарного линейного преобразования, и в сущности действия над кватернионами представляют собой не что иное, как операции над такими преобразованиями. По этой же причине кватернионы весьма пригодны для изображения вращения с растяжением. Как известно, такое преобразование оставляет неизменным мнимый шаровой круг, т. е. геометрический образ, точки которого рационально выра-

жаются через один параметр λ. Если вместо λ писать $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, то параметры λ_1, λ_2 после вращения с растяжением подвергаются бинарному линейному преобразованию.

Точно так же можно объяснить и блестящую приложимость кватернионов в теории относительности. Поверхность второго порядка $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$ в пространстве R_4 остается здесь инвариантом. Она несет два семейства прямых, каждое из которых может быть изображено при помощи одного параметра $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ и $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$. При вращении и растяжении каждый из этих параметров $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ и $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ сам по себе подвергается бинарному линейному преобразованию [1]).

[1]) См. по этому поводу Klein, Ges. Abh., т. 1, Nr. XXX, стр. 533 и сл.

Глава пятая.

Механика и математическая физика в Германии и Англии приблизительно до 1880 г.

I. Механика.

В связи с учением о протяженности и теорией кватернионов мы имели уже случай обрисовать характерные черты того развития, которое получили основные геометрические понятия механики твердых тел. В первой части этой главы будет итти речь о развитии общей аналитической механики в том классическом виде, в каком она была разработана Лагранжем, именно как учения о диференциальных уравнениях и траекториях произвольных механических систем.

Я начну с того, что перечислю здесь некоторые важнейшие теоремы, получившие со времени Лагранжа всеобщее распространение, причем однако ограничусь случаями относительно небольшой общности и буду пользоваться современной терминологией.

Положим, что нам дана, как принято говорить, система с n степенями свободы, т. е. система, положение которой в каждый момент полностью определяется n независимыми параметрами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Тогда движение описывается с помощью двух важных величин:

1) Живой силы, или кинетической энергии, $T = \sum a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$. В этом выражении величины $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ представляют собой скорости изменения q; величины a суть известные функции от q.

2) Силовой функции, или потенциальной энергии, U, причем я замечу, что величина, принятая в настоящее время как силовая функция, имеет обратный знак по сравнению с применявшейся прежде и в силу этого тождественна с потенциальной энергией.

Величины T и U для замкнутой системы, не подвергающейся действию внешних сил, не зависят явно от времени t; движение в этом случае описывается так называемыми уравнениями Лагранжа, которые при введении „компонент импульса“ $p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$ имеют вид

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}.$$

К правой части этого выражения, в том случае, когда имеются внешние силы, которые мы можем, например, рассматривать как заданные функции от времени, может еще присоединяться величина $+P_\alpha$. Несколько другой вид принимают эти уравнения при введении так называемой „функции Лагранжа"

$$L=T-U.$$

Так как U не зависит от $\dot{q}_\alpha$, то мы имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=p_\alpha,\ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\dot{p}_\alpha.$$

Главной задачей всей аналитической механики является выяснение широты охвата и богатства содержания этих уравнений и применение их к конкретным частным случаям.

В качестве интеграла уравнения

$$\dot{p}_\alpha=\frac{d\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}}{dt}=\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

получается закон сохранения энергии

$$T+U=h=\text{const}.$$

или при наличии внешних сил

$$T+U=h+\int P_\alpha\,dt.$$

Это предложение по своему фундаментальному значению является главенствующим во всей механике.

Приведенные соотношения и их обобщения, которых я здесь не буду касаться подробнее, часто выводятся также из так называемых *вариационных принципов*. При этом исходят не из диференциальных уравнений, а из известных интегралов, которые должны принимать минимальные или „стационарные" значения. Это условие выражается приравниванием нулю задаваемой определенным образом более точно их первой вариации. Я упомяну три такого рода положения, с которыми нам часто придется встречаться в дальнейшем.

1. Уравнения Лагранжа получаются непосредственно из вариационной задачи

$$\delta\int_{q_1^0,\ldots,q_n^0;\,t^0}^{q_1^1,\ldots,q_n^1;\,t^1} L\,dt=0$$

(при неизменяющихся пределах интегрирования). Удивительно, что у Лагранжа это предложение приведено лишь между строк; этим объясняется тот странный факт, что это соотношение в Германии,—главным образом благодаря трудам Якоби,—а затем

и во Франции обычно называется *принципом Гамильтона*, тогда как в Англии никто не понимает этого обозначения; там это равенство известно под правильным, хотя и мало наглядным наименованием *принципа стационарного действия*.

2. Широко известный „*принцип наименьшего действия*" представляет собой иную трактовку, которую предпочитал Лагранж, пришедший к нему в начале своих исследований, в 1759 г. В XVIII столетии этот принцип вызывал живой интерес, главным образом с точки зрения философской, так как ему приписывали важное значение как аргументу в пользу телеологического мировоззрения. Особенно нужно отметить здесь Мопертюи.

Форма этого принципа получается из прежней путем комбинирования равенств

$$\left.\begin{aligned} L &= T - U \\ h &= T + U \end{aligned}\right\} \; 2T = L + h.$$

Это дает

$$\int L\,dt = \int 2T\,dt - h(t_1 - t_0),$$

и в качестве вариационной проблемы получаем $\delta \int 2T\,dt = 0$, причем однако нужно иметь в виду дополнительное условие $T + U = h$, так что хотя пределы $q_1^0, \ldots, q_n^0$ и $q_1^1, \ldots, q_n^1$ остаются неизменными, тем не менее это не имеет места для пределов t^0 и t^1. Но интеграл $\int 2T\,dt$ представляет собой то, что издавна называли „*действием*" (actio), откуда и происходит название этого принципа, который должен был так много высказать о целесообразной экономической сущности природы.

3. В последнее время Якоби придал этому принципу новую важную формулировку, совершенно исключив из нее время. Он написал

$$T = h - U = \sqrt{T(h - U)}$$

и получил

$$\delta \int\limits_{q_1^0, \ldots, q_n^0}^{q_1^1, \ldots, q_n^1} \sqrt{(h - U) \sum a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta} = 0.$$

В этой форме принцип, конечно, определяет только траекторию, а не время, за которое она должна быть пройдена.

Если с точки зрения Римана рассматривать в этом „*принципе Якоби*" выражение $\sqrt{\Sigma a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta} = \sqrt{ds^2} = ds$ как элемент дуги в n-мерном пространстве, то мы получаем в окончательном результате

$$\delta \int \sqrt{h - U}\, ds = \delta \int v\, ds = 0,$$

где v есть скорость движущейся в n-мерном пространстве

точки, дающей наглядный геометрический образ нашей механической задачи. В этой последней форме принцип будет удобен нам в дальнейшем.

Мы возвращаемся теперь снова к Гамильтону и его достижениям в области механики. Может показаться удивительным, что успехи, достигнутые им в этом направлении, являются следствием из его работ в другой, гораздо более специальной области, именно в *геометрической оптике* или, как говорит Гамильтон, „теории лучей“ („theory of rays“). Этой теории, трактующей проблему распространения световых лучей в прозрачной среде вне зависимости от интенсивности, длины волны, поляризации и т. п., Гамильтон посвятил четыре основных работы в „Transactions of Royal Irish Academy“:

т. 15 — *On Systems of rays* („О системах лучей“, датировано 1824 г., том от 1828 г.);
т. 16 — *Supplemente I and II* („Дополнения I и II“, датировано 1830 г., том от 1833 г.);
т. 17 — *Supplement III* („Дополнение III“, датировано 1832 г., том от 1837 г.).

О форме этих работ можно сказать все, что угодно, кроме того, что она безупречна; но несмотря на запутанное, неумелое расположение, на многочисленные намеки и повторения, эти работы содержат огромное богатство мысли.

Целью Гамильтона было выяснение принципов устройства и усовершенствования оптических приборов; поэтому когда он говорит об оптической среде, то под ней нужно в первую очередь разуметь дискретную последовательность слоев различных однородных изотропных тел, которые могут быть отграничены друг от друга отражающими поверхностями. Лишь во вторую очередь может итти речь о среде с непрерывно меняющейся плотностью, вроде атмосферы.

Чтобы понять, каким образом проблема хода лучей в среде такого рода связана с механикой, нужно стать на точку зрения эмиссионной теории света. Испускаемые источником световые частицы трактуются как обычные материальные частицы. Если предположить, что их движение в каждой отдельной однородной среде обладает постоянной силовой функцией U, которая в более плотной среде имеет меньшее значение, то для однородной среды получается прямолинейный луч, изменяющий на границе двух сред свое направление в точном соответствии с экспериментально установленными законами преломления Снеллиуса. Это и есть ньютоновская эмиссионная теория, лишь изложенная в современных терминах.

Для скорости луча v (которую не следует смешивать с принятой в волновой теории величиной v) имеет при этом место соотношение

$$v = c \cdot n,$$

где c есть скорость света в пустом пространстве, а n показатель преломления данной среды.

Для этого частного случая движения был впервые найден и установлен принцип наименьшего действия, притом в последней из указанных выше формулировок, т. е. в виде

$$\delta \int v \, ds = 0.$$

Впервые высказал его Ферма (Fermat), по имени которого принцип и получил название принципа Ферма. Понятно, что у Ферма условие не имело еще указанного вида; вместо v он подставлял значение показателя преломления n, вместо интеграла у него стоял знак суммы, а вариационные обозначения были заменены требованием, чтобы эта сумма обращалась в минимум при одновременном выполнении тех или иных дополнительных условий.

С этого положения и начал Гамильтон. Однако прежде чем излагать подробно его основные результаты, я хотел бы отметить один пункт, который у Гамильтона появляется как бы случайно, в третьем дополнении, но которому работы Гамильтона обязаны своей широкой известностью.

В применении к кристаллическим средам Гамильтон обобщил принцип Ферма; он рассматривает v не только как функцию от координат точки x, y, z и от введенного им параметра цвета χ („chromatic index“), но и как величину, зависящую от направляющих косинусов α, β, γ (где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) по отношению к некоторой особой системе осей кристалла. Это дало ему возможность подойти к проблеме распространения света в двуосных кристаллах, которую очень упорно разрабатывал в это время Френель. В 1832 г. Гамильтон начинает подробно заниматься так называемой френелевской волновой поверхностью двуосных кристаллов. Он впервые составил себе ясное представление о ее геометрической форме и открыл существование четырех вещественных двойных точек и четырех плоскостей, касающихся ее вдоль целых конических сечений, именно кругов. Исходя из этого, Гамильтон предсказал факт двойной — внутренней и внешней — конической рефракции в двуосных кристаллах, который в 1833 г. и был обнаружен его коллегой Ллойдом (Lloyd) на кристаллах арагонита. Это был триумф теории, подобные которому знала лишь астрономия.

Для современного геометра френелевская поверхность уже не является необычным образом; она представляет собой частный случай поверхностей Куммера с 16 двойными точками и 16 двойными плоскостями, который характеризуется условиями вещественности и сверх того известными требованиями симметрии. Выше мы говорили уже в общем виде об этих поверхностях Куммера.

Как ни важны были сами по себе эти открытия Гамильтона, они однако не имеют ничего общего с теми основными идеями, которые он ввел в аналитическую механику. Мы подойдем

ближе к этим основным идеям, если выразим принцип Ферма $\delta\int v\,ds = 0$ с помощью понятий, принятых в волновой теории, и выясним физический смысл полученных таким образом формул. Для простоты изложения мы ограничимся изотропными средами.

В то время как в эмиссионной теории мы имели соотношение $v = c\cdot n$, где n есть показатель преломления, в волновой теории скорость $v' = \frac{c}{n}$. Отсюда следует, что $v = \frac{c^2}{v'}$ и интеграл

$$\int_0^1 v\,ds = \int_0^1 c^2\frac{ds}{v'} = \int_0^1 c^2\,dt' = c^2(t_1' - t_0')$$

представляет, если отвлечься от множителя c^2, то время, которое необходимо для распространения волны от точки x_0, y_0, z_0 до точки x_1, y_1, z_1 по направлению $0 \to 1$. Таким образом, принцип наименьшего действия Ферма необычайно просто превращается в „принцип скорейшего прибытия".

Основная идея Гамильтона заключается теперь в том, что он рассматривает этот интеграл действия Ферма $\int_0^1 v\,ds = W$ как функцию $W(x_0, y_0, z_0;\ x_1, y_1, z_1)$ от граничных точек. Иными словами, после того как значение функции W вычислено из соотношения $\delta W = 0$ при постоянных пределах, он рассматривает ее как функцию от этих пределов. Эту функцию W он называет „характеристической функцией" — в физической литературе часто величину $\frac{1}{c}W$, т. е. $c(t_1' - t_0')$ называют „оптическим путем" — и выдвигает ее на первое место при трактовке всех проблем геометрической оптики, в частности проблем, постоянно возникающих при конструировании и применении оптических приборов.

Такая постановка вопроса прежде всего дает формальные достижения. Действительно, если n_0 есть показатель преломления среды, в которой лежит исходная точка x_0, y_0, z_0, если далее α_0, β_0, γ_0 суть направляющие косинусы луча, исходящего из x_0, y_0, z_0, а n_1, x_1, y_1, z_1, α_1, β_1, γ_1 суть значения соответствующих величин для конечной точки, то, как показал Гамильтон,

$$n_1\alpha_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_1; \qquad n_0\alpha_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0;$$

$$n_1\beta_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_1; \qquad n_0\beta_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0;$$

$$n_1\gamma_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_1; \qquad n_0\gamma_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0.$$

Прежде всего мы можем сказать: проблема направления луча этим разрешается, т. е. мы знаем, как нужно выбрать косинусы

α_0, β_0, γ_0, чтобы траектория прошла через точку x_1, y_1, z_1; одновременно определяется и направление падающего луча, т. е. величины α_1, β_1, γ_1. Далее, в силу соотношений

$$\alpha_0^2+\beta_0^2+\gamma_0^2=1;\quad \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$$

наши шесть равенств сводятся к четырем. Мы видим, что функция W должна удовлетворять двум диференциальным уравнениям в частных производных:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_1^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_1^2=n_1^2,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0^2=n_0^2.$$

Мы можем также сказать, что величина W, вычисляющаяся из принципа Ферма при постоянных пределах, дает нам чрезвычайно элегантное и наглядное изображение всего хода луча в оптическом приборе. Действительно, мы имеем достаточно уравнений, чтобы при заданных x_0, y_0, z_0, α_0, β_0, γ_0 определить сколько угодно дальнейших точек траектории x_1, y_1, z_1 и вычислить соответствующие значения α_1, β_1, γ_1.

В этом принципе и заключается, собственно, главное достижение Гамильтона. Он называет его „*принципом вариирующего действия*"; быть может, еще нагляднее было бы говорить о „принципе *функции* действия".

При этом нужно иметь в виду, что эта система уравнений, собственно говоря, не дает ничего нового, например не дает вычисления хода лучей, который заранее должен быть известен для образования функции W. Успех сначала является чисто формальным; он заключается в наглядном и элегантном решении проблемы, исключающем все промежуточные ступени, т. е. рассмотрение всего процесса внутри сложно построенного прибора. Гамильтон сам поясняет, что, быть может, его открытие принципа вариирующего действия „не будет полезно", но оно доставит „интеллектуальное удовлетворение".

Однако в этой самокритике он был слишком скромен. Принцип перерастает свои пределы в совершенно ином направлении, и притом в силу общих функциональных свойств величины W, которые позволяют непосредственно установить известные очень важные физические законы. Так, например, из того обстоятельства, что при нахождении вторых частных производных можно изменять порядок диференцирования: $\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\,\partial x_0}=\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_0\,\partial x_1}$ и т. п. вытекает общий закон взаимности в оптике. Увеличение оптического прибора не меняется, если, не двигая самого прибора, обменять местами глаз и объект.

Этих небольших замечаний достаточно, чтобы отметить богатство и красоту результатов Гамильтона. Тем более удивитель-

ной представляется судьба этих открытий. На континенте они совсем не встретили того признания, которое соответствовало бы их истинной ценности. Тогда как в Германии и во Франции, как было уже отмечено, имя Гамильтона приписывали принципу наименьшего действия $\delta W = 0$, имеющему значительно более раннее происхождение, его принцип вариирующего действия вообще не рассматривался, а тогда, когда развитие теории направило идеи именно в эту сторону, он вновь открывался, чаще всего в гораздо менее удачной форме. Известные конструкторы приборов, как Аббе (Abbe), не знали его и пользовались собственными сложными расчетами. Из астрономов Брунс (Bruns) развил независимо от Гамильтона обширную теорию, в которой величина W получила часто применяемое теперь наименование „эйконала“ (Eikonal).

При этом в Англии теория Гамильтона всегда была известна, а английские книги попадали в Германию. Я укажу, например, на различные работы Максвелла, в которых функция W вычисляется для различных простых случаев, и особенно на книгу Томсона и Тэта (Thomson and Tait) *Treatise on natural philosophy*, появившуюся в 1867 г. и содержащую полное изложение работ Гамильтона с указанием их значения для общей механики. В 1871 г. по инициативе Гельмгольца эта книга была переведена на немецкий язык.

Открытия Гамильтона в области механики являются фактически лишь выводами из его основных оптических идей. Но так как Якоби подхватил механические результаты Гамильтона и, усиленно упоминая его имя, развил их в своем — якобиевском — направлении, то у учеников и читателей Якоби могло создаться впечатление, будто в том, что касается механики, Гамильтон был лишь предшественником Якоби. Я сам, ознакомившись точнее во время моих путешествий с истинным положением вещей, потратил много напрасного труда на то, чтобы сделать результаты, полученные Гамильтоном в области оптики и механики, более широко известными в Германии. В частности летом 1891 г. я доставил себе удовольствие, следуя Гамильтону, изложить всю механику как своего рода оптику в *n*-мерном пространстве, включив сюда и развитие этих идей у Якоби. В том же году я докладывал об этом на съезде естествоиспытателей в Галле [1]); обработка этой лекции лежала в течение 20 лет в читальном зале Геттингенского университета. В четвертом томе „Энциклопедии“ Фосс дал правильное изложение относящихся сюда соотношений, но все эти попытки были в конечном счете безрезультатны. Идеи Гамильтона в их оригинальной, связанной с оптикой форме были и остаются неизвестными как раз в тех кругах, которые должны были бы проявить к ним наибольший интерес. В последнее время лишь Штуди в новой форме изложил



[1]) Ср. Klein, Ges. Abh., т. 2, стр. 601 и сл.

правильно эти соотношения [1]). (Study, Über Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen, Jahresbericht d. D. M. V., т. 14, стр. 424 и сл., 1905).

Причину этой удивительной судьбы работ Гамильтона нужно, быть может, искать в месте их опубликования. „Transactions“ Ирландской академии является в Германии и во Франции редким и мало доступным журналом. Фактически механические работы Гамильтона, которые были напечатаны в „Philosophical Transactions“ Лондонского королевского общества, получили значительно более широкое распространение. Неумелая и запутанная форма изложения юношеских работ Гамильтона, о которой мы уже говорили, также не могла способствовать их распространению.

Отмечу, наконец, еще один фактор, тормозивший распространение этих идей; на нем я хочу остановиться здесь подробнее. Это—полемика с мало сведущими рационалистами, которую пришлось выдержать не только Гамильтону, но и всем другим механикам, пользовавшимся вариационными принципами в его смысле. Ввиду того, что философы были когда-то склонны к указанным принципам, якобы выражавшим идею целесообразности, эти люди прониклись отвращением к ним и упрекали те отрасли естествознания, которые ими пользовались, в телеологии. С этим недоразумением связано в широких кругах другое, в корне ошибочное понимание роли математического естествознания, которое часто защищается чистыми теоретиками. (Я хотел бы здесь отметить статью Планка *Das Prinzip der kleinsten Wirkung* в физическом томе серии „Kultur der Gegenwart“ [2].) Это — мнение, будто эти науки, в частности аналитическая механика, имеют целью только „объяснить“ природу. В противоположность этому нужно особенно подчеркнуть, что при всем значении, которое имели телеологические тенденции для развития науки, задачей естествознания отнюдь не является разыскание в природе сверхестественных „целей“ или даже их привлечение для объяснения явлений; задачу естествознания однако очень легко связать с теми целями, которые человек сам ставит себе и достижение которых облегчает ему наука. Не *объяснение* природы, которое в конечном счете невозможно, а *покорение* ее составляет истинную задачу науки. Никогда не следует забывать о наличии созидающей техники, которая превращает в *дело* положения теоретической науки.

Так и в рассматриваемом случае принцип варирующего действия служит не для того, чтобы дать ответ на вопрос о собственных целях, которые преследует природа в оптических

---

[1]) Из работ последних лет нужно отметить G. Prange, W. R. Hamiltons Bedeutung für die geometrische Optik, Jahresbericht d. D. M. V., т. 30, стр. 69 и сл., 1921; W. R. Hamiltons Arbeiten zur Strahlenoptik und analytischen Mechanik, Nova Acta, Abh. d. Leop.-Carol. Deutschen Akad. d. Naturforscher, т. 107, № 1, Halle 1923.

[2]) Есть русский перевод.

процессах, но для того, чтобы ответить на вполне законный вопрос конструктора оптических приборов, как нужно искусственно сочетать эти процессы для получения возможно более совершенного прибора.

Прежде чем перейти к собственно механическим работам Гамильтона, я должен отметить еще одно математическое направление, в связи с которым также часто упоминается его имя, притом исключительно как имя человека, подготовившего последующие достижения. Его работы о системах лучей побудили действительно Куммера в Берлине к трактовке этих проблем в чисто алгебраической, чуждой всякому физическому подходу форме; в частности Куммер занимался системами прямолинейных лучей — совершенно вне связи с их возможными применениями в оптике — и возникающими здесь чисто геометрическими проблемами. После того как Куммер наметил, примыкая еще известным образом к Гамильтону, общую теорию прямолинейных систем лучей (Crelle, т. 57, 1860), он с успехом занялся перечислением и изучением алгебраических систем лучей первого и второго порядка (Abhandlungen der Berliner Akademie, 1866). При этом он нашел носящую его имя поверхность четвертого порядка с 16 двойными точками и 16 двойными плоскостями, о которой мы много раз уже говорили; эту поверхность он получил как фокальную поверхность систем лучей второго порядка, являющихся в то же время системами второго класса (это значит, что через каждую точку проходят два луча и в каждой плоскости лежат два луча).

В этих важных и глубоких работах Куммера, подготовивших почву для геометрии линий, которую как раз в эту эпоху начал создавать Плюкер, связь с Гамильтоном является чисто внешней; цель и метод, коротко говоря, весь мир идей, в котором движется Куммер, так далек от мира идей Гамильтона, что каждому, кто занимался проблемами одного исследователя, потребуется затратить известный труд, чтобы включиться в проблемы другого. Таким образом и эта преемственность могла только затемнить образ Гамильтона в континентальной науке.

После этих отступлений я хотел бы дать краткое изложение работ Гамильтона в области аналитической механики. Выходя за пределы работ самого Гамильтона, я ограничусь при этом той степенью обобщения, которую я могу позволить себе на основе сказанного выше.

Как уже было упомянуто, обе относящиеся сюда работы были опубликованы в Philosophical Transactions Лондонского королевского общества за 1834—1835 гг. В обеих развивается оригинальная идея Гамильтона: рассматривать входящий в принцип наименьшего действия интеграл после его вычисления как функцию от его пределов.

В первой работе Гамильтон исходит из формы

$$\delta W = \delta \int\limits_{q_1^0, \ldots, q_n^0}^{q_1^1, \ldots, q_n^1} \sqrt{2(h-U)\sum a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta} = 0,$$

где

$$T = \sum a_{\alpha\beta}\, \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta, \quad T + U = h = \text{const}.$$

После того как диференциальные уравнения проблемы $\delta W = 0$ проинтегрированы, функция $W(q_1^1, \ldots, q_n^1, q_1^0, \ldots, q_n^0, h)$ рассматривается как *„характеристическая функция“* механической проблемы. Варьируя пределы q^1, q^0, получаем

$$\frac{\partial W}{\partial q_\alpha^1} = p_\alpha^1, \quad -\frac{\partial W}{\partial q_\alpha^0} = p_\alpha^0,$$

где

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

есть компонента импульса, соответствующая $\dot{q}_\alpha$. Далее

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t^1 - t^0.$$

Таким образом, если мы образуем функцию $W(q^1, q^0)$, предварительно определив траектории механической проблемы, то указанные уравнения дают полезное для многих целей выражение самих траекторий и времени, в течение которого они пробегаются. Более второстепенным результатом является вытекающее из соотношения $T + U = h$ следствие, что p_α и, следовательно, $\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ удовлетворяют известным диференциальным уравнениям в частных производных. Чтобы ввести $p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$ в выражение для $T = \sum a_{\alpha\beta}\, \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta$, нужно применить как раз то же преобразование, которое применяется обычно при дуализировании уравнения — переходе от точечных координат к плоскостям. Выражение для T оказывается при этом равным отношению двух определителей, один из которых „окаймлен“ величинами p_α:

$$T = \frac{-\begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & p_\alpha \\ p_\beta & 0 \end{vmatrix}}{|a_{\alpha\beta}|}.$$

Так как

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \quad \text{и} \quad T + U = h,$$

то для верхних и нижних значений параметров q_α имеют место следующие диференциальные уравнения для W:

$$-\frac{\begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & \frac{\partial W}{\partial q^1_\alpha} \\ \frac{\partial W}{\partial q^1_\beta} & 0 \end{vmatrix}}{|a_{\alpha\beta}|} + U = h; \qquad -\frac{\begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & \frac{\partial W}{\partial q^0_\alpha} \\ \frac{\partial W}{\partial q^0_\beta} & 0 \end{vmatrix}}{|a_{\alpha\beta}|} + U = h.$$

Вторая работа связана с другой формой интеграла действия:

$$S = \int\limits_{q^0_1, \ldots, q^0_n, t^0}^{q^1_1, \ldots, q^1_n, t^1} (T - U)\, dt,$$

где $T - U$ есть функция Лагранжа, причем в условии $\delta S = 0$ снова предполагается, что пределы постоянны. Если из этого условия определить величины q как функции от t, то функция

$$S\,(q^1_1, \ldots, q^1_n;\; q^0_1, \ldots, q^0_n;\; t^1, t^0)$$

может быть введена в качестве так называемой *„главной функции“* (*principal function*) механической проблемы и может быть использована для выражения интегралов. Имеют место соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q^1_\alpha} = p^1_\alpha; \qquad -\frac{\partial S}{\partial q^0_\alpha} = p^0_\alpha;$$

$$\frac{\partial S}{\partial t^1} = -h; \qquad \frac{\partial S}{\partial t^0} = h.$$

Совершенно аналогично „характеристической функции“ W и функция S удовлетворяет двум рядам диференциальных уравнений по n уравнений в каждом.

Во всем этом гораздо большую роль играло „интеллектуальное удовлетворение“ от изящного изложения, чем интерес к интегрированию диференциальных уравнений механики.

Наряду с этим последовательным применением „принципа вариирующего действия“, во второй работе Гамильтона важно также упрощение диференциальных уравнений механики. Речь идет о преобразовании, которое в других областях математики часто называют „преобразованием Лежандра“, т. е. о введении компонент импульса p_α вместо скоростей $\dot{q}_\alpha$.

Применяя теорему Эйлера об однородных функциях T, имеем

$$2T = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha.$$

Если общую энергию $T+U$, рассматриваемую как функцию от p_α и q_α, обозначить через $-H(p_\alpha, q_\alpha)$, то

$$T-U-\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha = -T-U = H(p_\alpha, q_\alpha),$$

и для диференциала функции H получаем выражение

$$dH = \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \sum \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum p_\alpha d\dot{q}_\alpha =$$

$$= \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha.$$

Но так как согласно диференциальным уравнениям Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{dp_\alpha}{dt} = \dot{p}_\alpha,$$

то для диференциальных уравнений механики мы получаем очень простую форму

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = -\dot{q}_\alpha.$$

Эти уравнения (хотя они встречаются попутно еще у Лагранжа) называют *диференциальными уравнениями Гамильтона* или, по предложению Якоби, *каноническими диференциальными уравнениями.* Они, так сказать, осуществляют идеал энергетика, так как ставят во главу угла полную энергию и из нее полностью определяют движение.

Мы обращаемся теперь к опубликованным в 1837 г. работам Якоби, которые хотя и примыкают во многом, как было указано, к работам Гамильтона, но идут по совершенно иным, самостоятельным путям. Якоби, собственно говоря, является продолжателем французской школы, ведущей свое начало от Лагранжа, Пуассона и т. д.; именно поэтому его влияние было особенно прочно не в Германии, а во Франции.

Развитие, которое получила механика у Якоби, относится главным образом к аналитической стороне дела. Оно касается между прочим следующих вопросов:

1. Общее понятие *канонических переменных.*

Как мы видели, Гамильтон придал диференциальным уравнениям динамики простую форму, которую Якоби назвал канонической:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}; \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$$

Здесь функция $H(p_\alpha, q_\alpha)$ есть взятая с отрицательным знаком

общая энергия. Якоби впервые поставил вопрос о том, каковы *самые общие канонические подстановки*, т. е. те подстановки

$$\overset{1}{p}_\alpha = \varphi_\alpha(\overset{0}{q}_1, \ldots, \overset{0}{q}_n; \overset{0}{p}_1, \ldots, \overset{0}{p}_n),$$

$$\overset{1}{q}_\alpha = \psi_\alpha(\overset{0}{q}_1, \ldots, \overset{0}{q}_n; \overset{0}{p}_1, \ldots, \overset{0}{p}_n),$$

которые переводят канонические диференциальные уравнения снова в канонические уравнения. Эта проблема имеет важное значение для астрономии и математической физики. Ее роль сказывается в той трактовке этих дисциплин как квази-геометрий пространства R_{2n}, которая была развита Больцманом и Пуанкаре. С чисто геометрической точки зрения она была совершенно иначе разработана Софусом Ли в так называемой теории *преобразования прикосновения*. Подробные указания по этим вопросам можно найти в математической энциклопедии (Enzyklop. III, D 7, Liebmann).

Поставив проблему, Якоби дал одновременно и первое решение ее при помощи так называемых *ведущих функций* („Leitfunktionen"). Он показал, что величины p^1, q^1 всегда связаны с величинами p^0, q^0 каноническим преобразованием в том случае, если можно положить

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \overset{0}{q}_\alpha} = -\overset{0}{p}_\alpha; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \overset{1}{q}_\alpha} = \overset{1}{p}_\alpha,$$

где Ω есть произвольная диференцируемая функция от $\overset{0}{q}_\alpha$ и $\overset{1}{q}_\alpha$.

Эти формулы сильно напоминают гамильтоновскую характеристическую функцию W или главную функцию S. Ясно, что именно формулы Гамильтона привели Якоби к его исследованиям, которые первоначально имели целью определение области приложимости этих формул. Действительно, переход в механическом движении от начальных значений величин $q_1^0, \ldots, q_n^0$; $p_1^0, \ldots, p_n^0$ к конечным их значениям $q_1^1, \ldots, q_n^1, p_1^1, \ldots, p_n^1$, есть пример канонического преобразования с ведущей функцией W или S; последняя на первый взгляд кажется относящейся только к данной механической задаче, но общий ее характер легко доказать простыми выкладками. Более того, так как во всем процессе движения удовлетворяются канонические уравнения и так как для любого сколь угодно малого измене-

ОПЕЧАТКА

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Следует*	*По чьей вине*
245	5 снизу	$\ldots, q_n^0 + \Delta^0_{q_n}$	$\ldots, q_n^0 + \Delta q_n^0$	коррект.

Клейн

то механическое движение представляет собой непрерывное бесконечно малое каноническое преобразование.

В этом изложении с введением совершенно произвольной функции Ω область канонических преобразований представляется нам уже достаточно обширной; однако этим охватываются не все канонические преобразования. Может действительно случиться, что когда мы хотим вычислить величины $\overset{0}{p}_\alpha$ с помощью уравнений

$$\overset{1}{q}_\alpha = \varphi_\alpha(\overset{0}{q}_1, \ldots, \overset{0}{q}_n; \overset{0}{p}_1, \ldots, \overset{0}{p}_n),$$

то нужно удовлетворить условиям

$$\Omega_1(q^0, q^1) = 0, \ \Omega_2(q^0, q^1) = 0 \text{ и т. д.}$$

В этом случае нужно положить

$$\frac{\partial(\Omega + \lambda\Omega_1 + \mu\Omega_2 + \ldots)}{\partial \overset{0}{q}_\alpha} = -\overset{0}{p}_\alpha,$$

$$\frac{\partial(\Omega + \lambda\Omega_1 + \mu\Omega_2 + \ldots)}{\partial \overset{1}{q}_\alpha} = \overset{1}{p}_\alpha$$

и, выразив q^1, p^1 как явные функции от q^0, p^0, снова исключить параметры $\lambda, \mu, \ldots$

В такой расширенной форме этот метод дает *все* канонические преобразования. Позже однако оказалось более предпочтительным не определять величины $\overset{1}{p}_\alpha, \overset{1}{q}_\alpha$ так явно (с выделением отдельных частных случаев), а установить те диференциальные уравнения, которым они должны удовлетворять. Примыкая к Пуассону, Шеринг и Ли выступили одновременно в 1873 г. со своими *символическими скобками*. Если ввести определение

$$[u, v] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \overset{0}{p}_\alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \overset{0}{q}_\alpha} - \frac{\partial u}{\partial \overset{0}{q}_\alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \overset{0}{p}_\alpha} \right),$$

то условие того, что функции $\overset{1}{p}_\alpha, \overset{1}{q}_\alpha$ определяют каноническую систему преобразований, можно записать в виде

$$[\overset{1}{p}_\alpha, \overset{1}{p}_\beta] = 0, \quad [\overset{1}{q}_\alpha, \overset{1}{q}_\beta] = 0, \quad [\overset{1}{q}_\alpha, \overset{1}{p}_\beta] = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta; \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Из этих формул легко получить так называемую теорему Лиувилля (1838), заключающуюся в том, что функциональный определитель канонического преобразования равен $+1$ или -1.

Для доказательства достаточно только умножить этот определитель на самого себя в несколько измененной форме:

$$\begin{vmatrix} \overset{1}{q}_1 \ldots \overset{1}{q}_n & \overset{1}{p}_1 \ldots \overset{1}{p}_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \overset{0}{q}_1 \ldots \overset{0}{q}_n & \overset{0}{p}_1 \ldots \overset{0}{p}_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overset{1}{p}_1 \ldots \overset{1}{p}_n & \overset{1}{q}_1 \ldots \overset{1}{q}_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \overset{0}{p}_1 \ldots \overset{0}{p}_n & \overset{0}{q}_1 \ldots \overset{0}{q}_n \end{vmatrix} = \Delta^2 = 1.$$

Доказательства того, что Δ действительно равно $+1$, мы дать здесь не можем.

Эти формулы, особенно теорема Лиувилля, приобрели особое значение в современной математической физике, особенно с тех пор, как получила распространение интерпретация соответствующих зависимостей в пространстве $2n$ измерений (Больцман, начиная с 1868 г.).

Я хотел бы еще указать на одну случайную, совершенно излишнюю и внешнюю трудность, которая затрудняла взаимное понимание физиков и математиков в этой области, очень важной для обеих сторон. В то время как мы со времен Лагранжа привыкли обозначать координаты импульса буквой p (в связи со словом сила — potentia), а чистые координаты состояния — буквой q (что должно напоминать о слове качество — Qualität), — физики, следуя примеру Гельмгольца, употребляли как раз противоположные обозначения. Легко представить себе, какую путаницу создавала эта несогласованность в словоупотреблении.

2. Методы *интеграции гамильтоновых диференциальных уравнений.*

Согласно теореме Гамильтона, функция

$$W(q^1,\ q^0;\ h) = \int\limits_{q^0}^{q^1} \sqrt{(h-U)\sum a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta},$$

из которой с помощью

$$\frac{\partial W}{\partial \overset{1}{q}_\alpha} = \overset{1}{p}_\alpha, \quad \frac{\partial W}{\partial \overset{0}{q}_\alpha} = -\overset{0}{p}_\alpha$$

можно получить координаты импульса, в силу равенства

$$H(q_1, \ldots, q_n;\ p_1, \ldots, p_n) + h = 0$$

дважды [1]) удовлетворяет некоторому диференциальному уравнению в частных производных

$$H\left(\overset{0}{q}_1, \ldots, \overset{0}{q}_n;\ \frac{\partial W}{\partial \overset{0}{q}_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial \overset{0}{q}_n}\right) + h = 0,$$

$$H\left(\overset{1}{q}_1, \ldots, \overset{1}{q}_n;\ \frac{\partial W}{\partial \overset{1}{q}_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial \overset{1}{q}_n}\right) + h = 0.$$

---

[1]) Как функция от $\overset{0}{q}_\alpha$ и как функция от $\overset{1}{q}_\alpha$. *Прим. ред.*

Исходя из этого обстоятельства, Якоби показал, что если найдено какое-нибудь достаточное общее решение этого гамильтонова уравнения в частных производных, так называемое „полное решение", т. е. решение с $n-1$ независимыми постоянными, то этого достаточно для того, чтобы с помощью такого полного решения можно было получить траектории проблемы в проинтегрированной форме.

Действительно, если мы имеем такое решение:

$$\overline{W}(q_1, \ldots, q_n; c_1, \ldots, c_{n-1}),$$

то достаточно написать

$$p_\alpha = \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial \overline{W}}{\partial c_1} = d_1, \ldots\ldots, \quad \frac{\partial \overline{W}}{\partial c_{n-1}} = d_{n-1}.$$

Число постоянных c и d, т. е. $2n-2$, является как раз тем числом произвольных постоянных, которое необходимо для определения всех траекторий в пространстве, число измерений которого снижено благодаря соотношению $H+h=0$ до $2n-1$.

Эта связь между диференциальными уравнениями динамики и диференциальными уравнениями в частных производных первого порядка представляет собой факт, относящийся к общей теории диференциальных уравнений в частных производных первого порядка, где он и был действительно открыт Коши в 1819 г., задолго до Якоби. Взаимная связь двух проблем и является причиной того многостороннего интереса, который был этим открытием вызван. После того как Якоби самостоятельно подметил и проследил эту связь, он получил общую теорию интегрирования диференциальных уравнений динамики и дал мощный толчок исследованию специальных проблем аналитической механики. Метод заключается в том, что вместо непосредственного исследования основных уравнений динамики стремятся найти достаточно общее решение гамильтоновых уравнений в частных производных, из которого интегрирование первых получается, так сказать, само собой.

Такое решение $\overline{W}$ действительно часто может быть найдено при решении частных проблем. Якоби решил своим методом многие из важнейших проблем механики и астрономии. Так, например, в его лекциях мы находим решение проблемы двух тел (кеплерово движение) в трехмерном пространстве, проблему притяжения к двум неподвижным центрам, построение геодезических линий на трехосном эллипсоиде, причем последняя проблема вообще была решена этим методом впервые. Подробнее можно прочитать об этом у самого Якоби или в любом учебнике механики или астрономии.

Для частных случаев Якоби развил и усовершенствовал свою теорию интегрирования еще дальше. Так, в частности, он занимался вопросом о том, какие преимущества при интегрировании основных уравнений механики дает знание некоторых

интегралов этих уравнений. Развивая это исследование, Якоби нашел ряд замечательных и глубоких предложений, например такое: если для системы уравнений имеют место два интеграла площадей, то имеет место и третий. Это развитие механики, в более подробное освещение которого я, к сожалению, не могу здесь входить, ведет свое начало от Пуассона и, выйдя за пределы исследований Якоби, достигло расцвета в 70-х годах, в работах Ли и Адольфа Майера. Поднятые на высокую степень аналитического обобщения эти результаты одновременно имеют значение и для вариационного исчисления простых интегралов и т. п. и, с другой стороны, для общей теории диференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В этой постоянной связи с двумя важными самостоятельными ветвями анализа и заключена математическая прелесть этого способа изложения механических фактов.

Несмотря на несомненную красоту этой области, я хотел бы однако предостеречь против одностороннего увлечения ею. Когда занимаешься механикой в этой абстрактной форме, то остается не развитым чутье конкретного отдельного случая, а вместе с тем и способность действительно подойти к данной частной механической проблеме и овладеть ею. В этом смысле Поске (Poske) говорит в своей книге „Didaktik des physikalischen Unterrichts" („Дидактика физического образования"), появившейся в 1915 г., о „тонком яде математического образования" для физика. Действительно, физик для своих задач может извлечь из этих теорий лишь очень немного, а инженер—ничего[1]). Они представляют собой, так сказать, схему с пустыми клетками, куда нужно уложить сначала пестрый мир явлений, для того чтобы она приобрела смысл.

После этого предостережения я хотел бы особенно горячо рекомендовать как очень стимулирующую книгу лекции Якоби по динамике (изданы Клебшем в 1866 г. по обработке, сделанной Борхардтом зимой 1842/43 г.)[2].

На этом мы окончательно оставим Якоби; за общей характеристикой и оценкой этого своеобразного мыслителя я отошлю читателя к сказанному в главе III (стр. 147 и сл). Со следами его необычайно сильно плодотворного влияния в Германии и за границей мы будем еще встречаться все время и в дальнейшем.

От Якоби мы естественно обращаемся к последующему развитию аналитической механики.

Человек, о котором мы сейчас будем говорить,—англичанин Рут (Routh), сразу переносит нас в совершенно иную среду.

---

[1]) Мы оставили это замечание, опровергнутое развитием науки в последние годы, так как оно является примером отмечавшегося и Клейном явления, что часто теории, кажущиеся чисто математическими, совершенно неожиданно приобретают важное значение и для естествознания. *Прим. нем. изд.*

[2]) Вошли в дополнительный том собрания сочинений Якоби (1884). Русский перевод лекций по динамике Якоби вышел в изд. ОНТИ в 1936 г.

Это—научная жизнь Кембриджа, с его системой обучения, строго приспособленной к требованиям школы и экзаменов. Здесь около 1860 г. Рут играл выдающуюся роль благодаря своей обширной и прославленной педагогической деятельности, которую он развил в качестве „private tutor“, т. е. частного преподавателя, готовившего к „tripos“ и другим экзаменам. В течение долгих лет из его подготовительного курса выходил обычно первый лауреат, так называемый „senior wrangler“. Большое число значительных людей получило здесь, у Рута, солидные основы крепкого математического образования с установкой на ее приложения. К ним принадлежит лорд Рэлей (Rayleigh), который часто с благодарностью вспоминал время своего учения у Рута.

Отпечаток этой учительской деятельности имеется и на учебниках Рута, представляющих собой наиболее полную противоположность методу преподавания Якоби, какую только можно себе представить. Общие рассуждения здесь отнюдь не отсутствуют, но они окружены большим числом легко доступных конкретных частных приложений. В немецком переводе эти учебники производят совершенно необычное впечатление. Они представляют собой не связное изложение или последовательность лекций, а состоят из повседневных, строго рассчитанных по времени упражнений, в которых ставятся и решаются до самого конца определенные задачи. Эта система строго соответствует преподавательской деятельности „тютора“, который добивается поражающих нас успехов в знаниях и самостоятельности своего обычно немногочисленного круга учеников многочасовой ежедневной работой. Это тот же самый метод, с помощью которого искусный тренер добивается у своих учеников выдающихся достижений в области спорта.

Характер университетского преподавания чрезвычайно различен в разных странах, и ни одна страна не должна думать, будто она обладает единственно пригодным или наиболее „академическим“ методом. Каждый метод имеет свои преимущества и каждый обнаруживает свои дурные стороны, если его применять односторонне. Организационные формы и методы преподавания нельзя просто перенести из страны, в которой они были созданы, и из культуры, в которой они пустили свои корни, в другую страну; они тесно связаны с традициями учителей и учеников и обусловлены принятой в данной стране системой экзаменов и связанным с ней социальным расслоением.

Впрочем как раз между Германией и Англией можно отметить в этой области известное сближение. В Кембридже испытания, выродившиеся в последнее время в изощренную систему виртуозной казуистики, начиная с 1901 г. несколько смягчены; с другой стороны, у нас наряду с лекциями все больше выступают на первый план упражнения как их необходимое дополнение.

Сейчас, однако, мы рассмотрим, какой вид приняли в руках Рута аналитически-механические проблемы.

В изложении Лагранжа во главе формул аналитической механики стояла функция

$$L = T - U.$$

Гамильтон поставил на ее место другую функцию

$$H = T - U - \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha = -(T + U),$$

которую мы должны рассматривать как зависящую только от p и q; она получается из функции L, зависящей от q и $\dot{q}$, путем так называемого преобразования Лежандра, т. е. путем замены $\dot{q}$ на p.

Изложение Рута занимает среднее место между обеими этими формами. Именно, он проводит указанное преобразование Лежандра частично, выражая из всех n переменных $\dot{q}$ лишь некоторое количество m этих величин через переменные p и через остальные величины $q_{m+1}, \ldots, q_n$; $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$. Таким образом получается так называемая функция Рута

$$R = L - \sum_1^m p_\alpha \dot{q}_\alpha,$$

в которую явным образом входят все три рода переменных $\dot{q}$, p и q.

Для ясности обозначим вновь введенные величины $p_1, \ldots, p_m$ через $\pi_1, \ldots, \pi_m$, а соответствующие им величины q через $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$, так что мы получим следующие группы переменных:

$$q_{m+1}, \ldots, q_n; \quad \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n,$$
$$\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m; \quad \pi_1, \ldots, \pi_m.$$

Тогда диференциальные уравнения механики принимают вид

$$p_\alpha = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}; \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} + P_\alpha \quad (\alpha = m+1, \ldots, n),$$
$$\frac{d\varkappa_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \pi_i}; \quad \frac{d\pi_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varkappa_i} + \Pi_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где P_α и Π_i суть соответствующие внешние силы. Они расщепляются таким образом на группу, построенную по типу Лагранжа, и группу, построенную по типу Гамильтона. Для $m = 0$ функция Рута и с ней система уравнений переходит в случай Лагранжа, для $m = n$ — в случай Гамильтона.

Эта система уравнений приобретает особый интерес благодаря связанным с ней общим принципиальным точкам зрения на сущность механики. Действительно, если в функцию R входят явно не величины $\varkappa_i$, а только соответствующие π_i, то мы имеем частный случай, который был подробно изучен Гельмгольцем (Crelle, т. 97, 1884) под названием случая *циклических систем*; несколько раньше этот случай встречается у Томсона и Тэта как случай „циклоидальных систем“.

Практически этот случай осуществляется всюду, где мы имеем вращательное движение тел вращения, т. е., например, во всех маховиках; здесь угол вращения является всегда „циклической“ координатой $\varkappa$, проявляющейся только в соответствующем импульсе вращения. Если мы заключим вращающееся тело в непрозрачную оболочку, то действительно *скрытое движение* тела проявит себя только в необычном поведении при движении тела как целого в пространстве (волчок, жироскоп). В подобных случаях, где невозможно внешнее воздействие на вращение маховика, т. е. $\Pi_i = 0$, имеем

$$\frac{d\pi_i}{dt} = 0,$$

т. е. импульсы, соответствующие циклическим координатам, должны оставаться постоянными.

Из этих фактов вытекают замечательные представления о природе потенциальной энергии. Если мы предположим, что кинетическая энергия T распадается на часть $T(\dot{q})$, которая зависит только от скоростей $\dot{q}$, и на часть $T(\pi)$, которая обусловлена только циклическими импульсами π (так что предполагается, что отсутствуют члены, в которых перемножаются скорости $\dot{q}$ с импульсами π), то функция Рута имеет вид

$$R = T(\dot{q}) - T(\pi) - U = T(q, \dot{q}) - T(q, c) - U(q),$$

если мы примем во внимание зависимость всех величин от координат q и заменим постоянные импульсы π_i величинами c_i. Величины $q_{m+1}, \ldots, q_n$ определяются из диференциальных уравнений

$$p_a = \frac{dT(\dot{q})}{d\dot{q}_a}, \quad \frac{dp_a}{dt} = \frac{\partial\,[T(\dot{q}) - (U + T(c))]}{\partial q_a}.$$

Получается, таким образом, система формул, строго соответствующая системе с $n - m$ степенями свободы, потенциальная энергия которой кажется увеличенной на $T(c)$ — кинетическую энергию скрытых движений[1]). Обе величины U и $T(\pi)$ являются функциями от q с постоянными коэфициентами; они входят в формулы только в виде суммы, а не порознь. Поэтому возникает вопрос: поскольку мы все равно ничего не знаем о сущности потенциальной энергии, не являются ли в действительности *все* механические величины, проявляющиеся как „потенциальные энергии“, по существу кинетическими энергиями, обусловленными скрытыми циклическими, так называемыми „игнорируемыми“ движениями. Как Фата-Моргана, вдали маячила возможность построения чисто кинетической теории материи.

Во всей всеобщности этот замысел был развернут Дж. Дж. Томсоном (J. J. Thomson) в его книге *Application of Dynamics to Physics and Chemistry* („Приложения динамики в физике и

[1]) См., например, W h i t t a k e r, Analytische Dynamik, § 38, Berlin 1924.

химии", лекции в Кембридже в 1866 г., напечатанные затем в Philosophical Transactions в 1886—1887 гг.). Но на отдельных примерах его развивал еще Вильям Томсон (лорд Кельвин), например в своем докладе Британской Ассоциации в Монреале в 1884 г., который он осторожно назвал „Steps towards a kinetic theory of matter" („Этапы по пути к кинетической теории материи"). Наконец разработанный в законченную систему он нашел себе выражение в посмертном сочинении Генриха Герца *Die Prinzipien der Mechanik* („Принципы механики", 1904).

Подробнее с этим своеобразным ходом идей можно познакомиться по первой статье Фосса в четвертом томе „Энциклопедии". Обсуждать здесь подробнее ее ценность или ее недостаточность я не в состоянии; сколь ни блестящей кажется она на первый взгляд, однако возникают серьезные затруднения как в смысле логического ее построения (Герц, например, перенял из обычной механики всю большую область уравнений, выражающих налагаемые на движение условия (связи), без всякого дальнейшего сведения их к кинетическим понятиям),—так и в смысле придания этим идеям конкретной формы, что между прочим отметил Больцман. Даже и вихревая теория лорда Кельвина, которая, правда, принимала в качестве единственной чуждой кинетическому ходу идей гипотезы предположение о несжимаемости содержащей вихри жидкости, не может удовлетворить нас вследствие недостаточного охвата.

Идея скрытых циклических движений дала толчок к другой аналогии, которую я не хотел бы оставить здесь без упоминания; речь идет о той аналогии, которая по Гельмгольцу (Crelle, т. 97, 1884) существует между статикой простейшей „моноциклической" системы,—циклическое движение которой однако мыслится как „доступное",—и основами *механической теории теплоты*.

Этому я предпошлю однако небольшой экскурс в механическую теорию теплоты. Здесь играли существенную роль две математические концепции:

1. Проблема частных производных $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ от функции нескольких переменных $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и их изменений при введении новой системы независимых переменных.

2. Различный характер выражения Пфаффа

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

которое, как было указано выше в связи с Грассманом, может обладать всеми возможными степенями общности, начиная от случая точного диференциала и переходя через случай превращения в таковой при помощи „интегрирующего множителя" в наиболее общий случай, когда такое преобразование невозможно. В частности здесь представляет интерес различие между точным и неточным диференциалом, проявляющееся в их отношении к интегрированию по замкнутому пути или, как говорят в термодинамике, к круговому процессу.

Этот знакомый каждому математику материал предстал здесь перед новичком не только в термодинамическом облачении, но и обремененным к тому же большим и тяжелым историческим баластом. Ему предлагается пробиваться к цели сквозь барьеры непривычных математических понятий по пути, с трудом проложенному первыми исследователями [Карно, Клаузиус (Clausius)], между тем как очертания этой цели могут быть уже издали ясно и отчетливо постигнуты, если только обратить внимание в соответствующую сторону. Мне кажется, что это можно сделать, если сначала дать ориентирующее сводное изложение основ в авторитетно-догматической форме, а затем провести подробные доказательства, проникающие во все детали. В этом смысле я и хотел бы вкратце наметить здесь все существенное.

Мы имеем систему, зависящую от $n+1$ параметров $q_1, \ldots, q_n$, ϑ, где ϑ называется *абсолютной температурой*. Термодинамика занимается не движением такой системы, а рассматривает ее в равновесии или при так называемых „бесконечно медленных движениях", т. е. в последовательности мало отличающихся друг от друга различных состояний равновесия. Положим, таким образом, что данная система находится в равновесии, притом, находясь под влиянием внешних сил $P_1, \ldots, P_n$, которые определены так, что при малом изменении величин q выражение

$$P_1\,dq_1 + \ldots + P_n\,dq_n = dA$$

равно необходимой для этого изменения и доставляемой извне работе. Вместе с тем вся система заключена в непроницаемую для теплоты, так называемую адиабатическую оболочку.

Оба основных положения теории теплоты относятся к изменениям величин $q_1, \ldots, q_n$, ϑ соответствующих состоянию равновесия, которые вызываются тем, что сначала к системе подводится бесконечно малое количество внешней работы dA, а затем бесконечно малое количество теплоты dQ, измеренное в механической мере. Изменение касается двух преимущественно интересующих нас величин: знакомой нам из механики величины *энергии* E и вновь вводимой величины — *энтропии* S. Имеем

Первое начало термодинамики: $dA + dQ = dE$.

Второе начало термодинамики: $dQ = \vartheta\, dS$.

Понимание первого начала не представляет никаких трудностей. Во втором же чрезвычайно важное значение имеет понятие точного и неточного диференциала. Именно, это положение гласит, что количество теплоты dQ само по себе не является точным диференциалом функции от $q_1, \ldots, q_n$, ϑ, но превращается в таковой, а именно dS — путем умножения на множитель $\frac{1}{\vartheta}$.

Вместо того, чтобы обосновывать здесь эти предложения, я предпочел бы пояснить их на одном примере, именно на примере „идеального газа". Положим, что масса газа равна 1. Тогда система обладает двумя параметрами, именно, объемом v этой единичной массы и абсолютной температурой ϑ. Соответствую-

щая v компонента силы P обычно обозначается через $-p$, где p измеряет внешнее давление газа. Мы имеем две постоянные: c_v, удельную теплоемкость при постоянном объеме, и c_p, удельную теплоемкость при постоянном давлении. Через эти постоянные и параметры выражаются функции состояния идеального газа следующим образом:

$$E = c_v \vartheta,$$

$$S = c_v \ln \vartheta + (c_p - c_v) \ln v.$$

Оба начала термодинамики принимают вид

$$-p\,dv + dQ = dE = c_v\, d\vartheta,$$

$$dQ = \vartheta\, dS = c_v\, d\vartheta + (c_p - c_v)\,\vartheta\, \frac{dv}{v}.$$

Из этих двух уравнений получается закон Мариотта-Гей-Люссака или *уравнение состояния газа*:

$$p \cdot v = (c_p - c_v)\,\vartheta,$$

которое было экспериментально получено еще до создания всей теории и из которого, обратно, можно вычислить S, если известно E.

До этого пункта, как показал Гельмгольц, можно заменить термодинамическую систему механической моноциклической системой.

Чтобы не уходить от примера идеального газа, представим себе систему с одним параметром $q = v$ и циклическим параметром $\varkappa$ с импульсом π. Ее энергия определяется выражением

$$E = \frac{c_v \pi^2}{v^{\frac{c_p - c_v}{c_v}}}$$

и в соответствии с этим условие равновесия принимает вид

$$p = -P = -\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{(c_p - c_v)\,\pi^2}{v^{\frac{c_p}{c_v}}}.$$

При этом мы получим совпадение с прежними формулами

$$E = c_v \vartheta; \quad pv = (c_p - c_v)\,\vartheta,$$

если положим

$$\vartheta = \frac{\pi^2}{v^{\frac{c_p - c_v}{c_v}}}, \quad S = 2c_v \cdot \ln \pi.$$

Таким образом ϑ является своего рода живой силой; так же как и величину S, ее нужно отнести за счет скрытого движения, представляемого импульсом π.

До сих пор, таким образом, можно провести совершенно удовлетворительную механическую аналогию с термодинамическим процессом. Классическая механика (не признающая никакого

трения или неупругих ударов) отказывается однако служить нам, если мы попытаемся далее „связать“ две термодинамические системы с различными температурами в одной адиабатической оболочке.

Правда, как и в механическом случае, общая энергия

$$E = E_1 + E_2;$$

но при этом устанавливается новое состояние равновесия с общей температурой ϑ, имеющей среднее значение между ϑ_1 и ϑ_2, и оказывается, что общая энтропия больше, чем сумма энтропий отдельных систем:

$$S > S_1 + S_2.$$

Если в частности смешивались два единичных количества одного и того же газа с одинаковым объемом, но с разными температурами, то так как общая энергия E должна быть равна сумме $E_1 + E_2$ и теперь она относится к массе 2, то $\vartheta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$, и потому общая энтропия

$$S = 2c_v \ln \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + 2(c_p - c_v) \ln v.$$

Но мы имели

$$S_1 = c_v \ln \vartheta_1 + (c_p - c_v) \ln v,$$
$$S_2 = c_v \ln \vartheta_2 + (c_p - c_v) \ln v.$$

Далее имеет место неравенство

$$2 \ln \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} = \ln \frac{\vartheta_1^2 + 2\vartheta_1\vartheta_2 + \vartheta_2^2}{4} > \ln \vartheta_1\vartheta_2 = \ln \vartheta_1 + \ln \vartheta_2,$$

так как

$$\vartheta_1^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 + \vartheta_2^2 = (\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 > 0.$$

Таким образом мы находим, что действительно $S > S_1 + S_2$.

Здесь мы имеем, следовательно, пример так называемого *необратимого* процесса, какого механика не знает; при всех природных процессах энтропия *возрастает*. Клаузиус говорит (Poggendorffs Annalen, 5. Reihe, т. 125, стр. 390) о „запасе превращения“ в данном теле, так же как он строит понятие энергии из „запаса теплоты и работы“; эту величину S он называет энтропией, от греческого слова ἡ τροπή — превращение, чтобы выразить этим близкую его связь с понятием „энергии“.

Понимание таких необратимых процессов, в частности возрастания энтропии, является главной целью термодинамики. В старой форме предмет лучше всего изложен в статье В. Томсона в Британской энциклопедии (Encyclopaedia Britannica) и в книге Клаузиуса „Die mechanische Wärmetheorie“ („Механическая теория теплоты“, 1-е изд. 1861 г.). Качества последующих изданий (1864 г. и сл.), к сожалению, понизились вследствие добавлений.

Принципиальное современное изложение дает Каратеодори (Carathéodory, Math. Annalen, т. 67, 1909, стр. 381 и сл.)[1]).

Необратимые процессы никоим образом нельзя имитировать чисто механическими моделями, исключая трение и т. п. Синтез обеих ветвей — механики и термодинамики — намечается только с более высокой точки зрения, именно с точки зрения статистической механики молекулярных систем. Здесь в качестве совершенно нового момента появляется понятие о вероятности распределения компонент скорости по отдельным молекулам. Одной из наиболее блестящих идей Больцмана является предположение, что $S = k \cdot \ln W$, где W есть эта вероятность. Об этом, однако, мы здесь говорить не можем.

II. Математическая физика.

Замечания относительно развития аналитической механики в Англии и Германии подвели нас уже ко второй части настоящей главы, которая должна охватить развитие математической физики в Германии и Англии в период приблизительно с 1830 по 1880 г.

Под *„математической физикой"* я хотел бы понимать здесь по возможности всю область „феноменологической" физики, оперирующей диференциальными уравнениями, в том виде, как она была развита Францем Нейманом и англичанами и нашла свое завершение в уравнениях Максвелла. Это есть, следовательно, та физика, которая работает представлениями о непрерывной среде—в отличие от выступающей сейчас снова на передний план атомистической физики. Я должен буду однако несколько переступить через эти рамки — как национальные, так и тематические — там, где этого потребует историческая связь.

Мы говорили уже о развитии математической физики во Франции (примерно до 1830 г.), которое постепенно привело от атомистической точки зрения Лапласа (точечные центры сил) к феноменологической, которую представляли Фурье и Коши. Целью этого направления является описание процессов с помощью диференциальных уравнений, относящихся к материи, которая считается непрерывной. После этого мы рассматривали дальнейшее развитие взглядов в Германии в работах Гаусса и Вебера, первого из которых нужно в большей мере причислять к феноменологам, а второго, благодаря его основному электрическому закону, — к атомистам (ср. стр. 52). Наконец мы проследили за чисто математической, основанной на феноменологическом базисе точкой зрения, которая связана с именем Дирихле и которая

[1]) См. также в Sitzungsber. d. Akademie Berlin, 1925, стр. 39 и сл. „Über die Bestimmung der Energie und der absoluten Temperatur mit Hilfe der reversiblen Prozesse" („Об определении энергии и абсолютной температуры с помощью обратимых процессов").

по сути дела преследовала выяснение математических трудностей и их преодоление в отдельных случаях (стр. 133 и сл.).

Мы должны были бы теперь раньше всего рассмотреть работы Римана (1826—1866) как продолжателя этих начинаний. Однако подробную оценку выдающихся достижений этого исключительного мыслителя во всех областях математики мы хотим дать позже в их взаимной связи. Здесь мы прежде всего хотим остановиться на развитии, которое теснейшим образом связано с естественно-научными наблюдениями и которое в первую голову представлено Францом Нейманом и кенигсбергской школой.

Франц Нейман (Franz Neumann) родился в семье старшего лесничего в Укермарке в 1798 г.; умер он в 1895 г., т. е. в возрасте 97 лет. Уже в этом своем долголетии он является истым представителем упорного прусского характера, который он укреплял всю свою жизнь неуклонным исполнением долга и которому он в первую очередь обязан своей обширной деятельностью и выдающимися успехами.

Живое впечатление от личности Неймана оставляют воспоминания его дочери Луизы Нейман, которые она посвятила ему в 1904 г.; его научная деятельность нашла оценку в монографиях Фолькмана (1896) и Вангерина (1907).

Еще гимназистом, в возрасте 17 лет, Нейман вступил в 1815 г в армию Блюхера, полный одушевления делом войны за освобождение. Шестнадцатого июня при Линьи он был тяжело ранен выстрелом. Несмотря на скверный уход за ранами в то время и большие личные неудачи, его упорная натура взяла верх. Он был вылечен и вернулся в берлинскую гимназию, которую успешно окончил осенью 1817 г.

Его занятия в Иене и Берлине привели его прежде всего к минералогии, которая в 20-х годах переживала у нас период особого расцвета благодаря развитию кристаллографии, выросшей в конечном счете в чисто геометрическую дисциплину. Толчок к этому развитию дал Ой (Haüy, родился в 1784 г.) в Париже, знаменитая коллекция кристаллов которого, к сожалению, погибла при бомбардировке 1870 г. В Берлине эту специальность представлял Вейс (Weiss), в качестве ассистента которого Нейман сделал свои первые очень важные открытия. С 1823 г. его занимал так называемый *закон зон*, чисто геометрическая теорема о граничных плоскостях, которые наблюдаются на кристаллах. Если ряд ребер и граней кристалла известен, то эта теорема гласит, что каждая плоскость, параллельная двум ребрам, также может служить гранью кристалла. Таким образом, зная четыре грани и образованный ими тетраэдр, можно последовательным построением найти все последующие.

Самый существенный пункт в этой теореме, который сам Нейман считал очевидным и не особенно подчеркивал, заключается в том, что среди образующихся при описанном построении плоскостей чаще будут встречаться на практике те плоскости, которые получаются из четырех основных плоскостей с помощью

меньшего числа операций, если, конечно, в качестве основных плоскостей выбрать чаще всего наблюдаемые на опыте. Без этого указания на вероятность появления данной плоскости эта теорема, конечно, не имела бы никакого практического значения, так как построение в конечном счете дает все мыслимые плоскости с „рациональным" индексом.

Этот „закон зон"—совокупность параллельных плоскостей Нейман называет зоной — был особенно изящно интерпретирован его автором в геометрической форме. Действительно, если мы заменим ребра кристалла параллельными им прямыми, образующими пучок, исходящий из точки *O*, и повторим построение закона зон в какой-нибудь плоскости, пересекающей этот пучок, то из полного четырехсторонника, отображающего тетраэдр, получится как раз сеть Мебиуса. Таким образом здесь существует тесная связь с проективной геометрией, и Неймана (1823) можно рассматривать как прямого предшественника работ Мебиуса (1827) и Грассмана (1844), которые также отмечают значение своих теорий для кристаллографии. [Ср. реферат Либиша (Liebisch) в Enzyklop. V 7].

Соприкасаясь, с одной стороны, с проективной геометрией, эта проблема, с другой стороны, соприкасается с теорией решеток, которая может быть применена на основе чисто молекулярного рассмотрения кристаллов. С этой точки зрения теорема гласит: возможна всякая плоскость, содержащая три и, следовательно, бесконечно большое число узлов решетки, причем снова плоскости, получающиеся раньше, имеют преимущества в отношении вероятности их появления.

С 1826 г. Нейман переехал в Кенигсберг, сначала в качестве приват-доцента минералогии и физики, а с 1828 г. в качестве экстраординарного профессора. Деятельность Неймана в Кенигсберге охватывает период свыше 50 лет; сначала совместно с Якоби (до 1843), затем с Рихело (Richelots, ум. в 1875 г.), он проявляет необычайную продуктивность. В 1875 г. Нейман оставил службу; экспериментальную физику после него представлял в Кенигсберге Папе (Pape), а математическую — последний ученик Неймана В. Фойгт (W. Voigt), унаследовавший от своего учителя особый интерес к кристаллографии.

Поворот Неймана к вопросам математической физики произошел под влиянием работ Фурье. Особенно много работал он с 1832 г. над оптикой, которой он хотел овладеть, исходя из теории упругости. Эта теория оставалась господствующей на протяжении последующих 60 лет, вплоть до создания электромагнитной теории света. Трудности, возникающие при этой постановке вопроса, мы отмечали уже, говоря о работах Коши. Вопрос о существовании продольных волн при преломлении, о плоскости, в которой происходят поперечные колебания, и о положении этой плоскости по отношению к плоскости поляризации мог быть разрешен только электромагнитной теорией.

Десятью годами позже появилась важная работа Неймана о законе индукции электрических токов, причем интерес сосредоточивался, главным образом, на „взаимном потенциале двух цепей тока“:

$$\int\int\frac{ds\,ds'\cos(ds\,ds')}{r}.$$

Наряду с этими публикациями, большое и разностороннее влияние на развитие науки имела и интенсивная педагогическая деятельность Неймана, собравшая вокруг него многочисленный круг специализировавшихся учеников. В его многократно читавщихся и постоянно заново перерабатывавшихся курсах можно отметить постоянное тесное взаимопроникновение математических рассуждений и физических измерений. Мы имеем теперь длинный список этих курсов, обработанных его учениками. Среди них нужно отметить следующие: „Магнетизм“ (К. Нейман, 1881); „Электрические токи“ (фон-дер-Мюль, 1884); „Оптика“ (Дорн, 1885); „Упругость“ (О. Э. Мейер, 1885); „Потенциал и шаровые функции“ (К. Нейман, 1887); „Капиллярность“ (Вангерин, 1894). Собрание сочинений Неймана должно состоять из трех томов, из которых, однако, первый еще не вышел.

В своей деятельности Нейман проявил себя как превосходный и бескорыстный учитель; многие из полученных им результатов, он, не публикуя, передавал ученикам. Он любил говорить, что нужно руководить учениками так, чтобы они этого не замечали и думали, что достигали цели собственными силами.

Оба разрабатывавшихся им направления — физическое и математическое — нашли достойных представителей среди его учеников. В первой группе наиболее выдающимся представителем является Кирхгоф, во второй — сын Ф. Неймана — Карл Нейман (род. в 1832), Клебш (1833) и Генрих Вебер (H. Weber, 1842). Клебш и Вебер интересуют нас здесь только отдельными работами. Сюда относятся диссертация Клебша от 1852 г. „Об эллипсоиде в жидкости“ [1]) и его курс теории упругости, примыкающий к французскому инженеру Сен-Венану (Saint Venant). Г. Вебер в работе об уравнении

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

которую мы должны здесь отметить (Math. Ann., т. 1, 1868), уже находится под существенным влиянием Римана.

Мы должны подробнее остановиться на Кирхгофе. Густав Роберт Кирхгоф (Gustav Robert Kirchhoff) принадлежит к большому числу математиков и естествоиспытателей, родившихся в Кенигсберге, с которым он был еще теснее связан благодаря своей жене, дочери Рихело. Он защитил диссертацию в 1848 г. в Берлине и был с 1850 по 1854 г. экстраординарным профессо-

[1]) „De motu ellipsoidis in fluido incompressibili viribus quibuslibet impulsis“ О движении эллипсоида в несжимаемой жидкости под влиянием произвольсил“), Regiomonti 1854.

ром в Бреславле, где встретился с химиком Бунзеном, который и увлек его с собой в Гейдельберг в 1854 г. До 1875 г. Кирхгоф оставался там ординарным профессором теоретической и экспериментальной физики; затем он стал членом Берлинской академии, где занимался преимущественно вопросами математической физики. Он умер в 1887 г.

Имя Кирхгофа широко известно благодаря его блестящим проведенным совместно с Бунзеном работам по спектральному анализу, которые были начаты около 1860 г. и нашли свое завершение в большом трактате *Untersuchungen über des Sonnenspektrum und die Spektra der chemischen Elemente* („Исследования о спектре солнца и спектрах химических элементов"), изданном Берлинской академией в 1861 г.

Наряду с этим, Кирхгоф известен своим широко распространенным *Lehrbuch der Mechanik* („Учебник механики"), появившимся впервые в 1874 г. Учебник этот выделяется своей принципиальной установкой, согласно которой, как говорит Кирхгоф в предисловии, „задачей науки является не объяснение, а полное и простейшее описание явлений природы". Эта формулировка до настоящего времени находит много сочувствия у позитивистически настроенных философов, например у Эрнста Маха (E. Mach).

Другой характерной особенностью этой книги, наряду с указанной абстрактной, самоограничительной точкой зрения на сущность науки, является доведенная до высшей степени сжатость изложения, оперирующего только с пространственными и числовыми величинами и исключающего все антропоморфные представления, опирающиеся на интуицию. Так, например, при введении понятия о „силе" исключается всякая апелляция к нашим мускульным ощущениям, масса вводится только как числовой множитель и т. п. От Кирхгофа ведет свое начало тот стиль, который в течение нескольких десятилетий господствовал в математической физике. Высшим законом этого стиля являются исключение преждевременных гипотез и подавление всякого личного участия, радости открытия или чувства удивления перед неисчерпаемо загадочным миром явлений. Мы были бы несправедливы по отношению к Кирхгофу, если бы совершенно отказали ему в таком участии эмоций и фантазии; об этом свидетельствует его гениальная и плодотворная исследовательская работа. Учитель, однако, не должен по Кирхгофу обнаруживать своего изумления или своей неуверенности, чтобы не лишать свою систему бесспорной убедительности и законченности. Этому идеалу соответствовали и лекции Кирхгофа; он читал наизусть гладко обработанную рукопись и скорее позволил бы себе посреди лекции заглянуть в нее, чем дал бы повод обвинить себя в небольшом отступлении от нее.

Можно привести отдельные, весьма замечательные примеры этой строгой манеры Кирхгофа. Так, например, при исследованиях, посвященных распространению электричества по проводам

(Poggendorffs Annalen, т. 100, 1857, Ges. Abh., стр. 131 и сл.) Кирхгоф сделал мимоходом открытие (Ges. Abh., стр. 147), что постоянная в основном законе Вебера, деленная на $\sqrt{2}$, дает скорость света! Но ни одно слово не намекает на возможность того исключительного значения для развития науки, которое приобрело это открытые в работах Максвелла. Кирхгофу, всецело поглощенному задачей овладения прежним материалом, новые открытия казались неудобными или даже не имеющими значения. Рассказывают, например, что когда Керр (Kerr) открыл в 1877 г. носящее его имя явление вращения плоскости поляризации при отражении света от полированного конца магнита, то Кирхгоф по этому поводу спросил: „а разве вообще осталось что-нибудь открывать?"

Не могу скрыть, что мне лично эта точка зрения на естествознание глубоко антипатична, так как она подавляет радость изучения и тягу к исследованию мира. Более молодое поколение физиков также отвернулось от нее, и именно этими новыми, совершенно отличными методами работы и обусловлены его большие успехи. Мне важно было однако охарактеризовать здесь это направление, типичным представителем которого является Кирхгоф, чтобы иметь возможность сказать, что *математическая* трактовка физики во всяком случае не является ответственной за этот наружный рассудочный холод, ибо математика является отнюдь не только делом рассудка, но и существенным образом делом фантазии.

Как уже было отмечено, эта неплодотворная установка Кирхгофа не имела однако влияния на его собственные научные достижения. Наоборот, мы ценим в нем исследователя, который имеет важнейшие заслуги в математической обработке физики.

Важнейшим достижением здесь является то, что Кирхгоф — в связи со своими работами по спектральному анализу — впервые взялся за математическую обработку законов *теплового излучения*. Он установил основной закон, согласно которому отношение эмиссии к абсорбции должно быть для всех тел одной и той же функцией абсолютной температуры, и доказал этот закон с помощью мысленных экспериментов и специфически математических заключений, вроде того, например, что из тождественного обращения в нуль интегралов Фурье вытекает обращение в нуль подинтегрального выражения. Ценности этих результатов не меняет то обстоятельство, что современные математики находят основания для критики выводов Кирхгофа (Гильберт в Мюнстере, Jahresbericht der D. Math. V., т. 22, стр. 1 и сл., 1912). Эти работы, в которых впервые вводится понятие о „черном теле", были опубликованы в ежемесячных отчетах Берлинской академии за 1859 г. (Ges. Abh., стр. 571 и сл.).

Помимо этих фундаментальных достижений, мы имеем в работах Кирхгофа блестящее решение важнейших проблем теории упругости, гидродинамики, теории электричества и т. п.

Насколько глубоко охватывает и преобразует математическая трактовка Кирхгофа уже известный ранее материал, можно видеть из одного примера. В своем фундаментальном сочинении „Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet“ („Гальваническая цепь в математической обработке“, 1827) Ом пользуется еще неопределенным понятием об электрическом напряжении, причем он исходит из положения, что покоящийся проводник равномерно заполнен электричеством постоянного напряжения, которое он считает пропорциональным „плотности“. Кирхгоф впервые показал (Poggendorffs Annalen, т. 78, 1849; Ges. Abh., стр. 49), что это напряжение есть электрический потенциал и что покоящиеся электрические массы и в гальванических цепях располагаются на наружных поверхностях, соответственно на поверхностях проводников.

Одним из наиболее красивых результатов мне всегда казался проведенный Кирхгофом параллелизм между изгибанием и закручиванием бесконечно тонкой проволоки, с одной стороны, и вращением твердого тела вокруг неподвижной точки, — с другой (Crelle, т. 56, 1858; Ges. Abh., стр. 285 и сл.). Это — замечательный пример того, как одни и те же формулы могут охватывать столь различные по существу проблемы. Их связь проще всего можно обнаружить, если рассматривать обе проблемы как вариационные.

Мы переходим теперь к новому центру математически-физического развития, создавшемуся в 40-х годах в Берлине.

Как мы уже говорили, жизнь нашей науки началась в Берлине не сразу после 1810 г., года основания университета. Напротив, она тормозилась господствовавшими течениями неогуманизма и философией Гегеля, и только деятельность Александра фон-Гумбольдта в 20-х годах положила начало ее расцвету. Неутомимо содействовал развитию математики Крелль. Для естествознания же, поскольку оно нас здесь интересует, исходным моментом развития является переезд в Берлин из Ост-Фризии химика Митчерлиха (Mitscherlich) в 1822 г. Важное значение его деятельности отметил университет, поставив ему в университетском саду памятник.

Митчерлих работал в пограничной области химии и физики. Из его школы вышли первые берлинские физики, которые, однако, из сознательной оппозиции к господствовавшей спекулятивной философии были чистыми эмпириками. В первую очередь здесь нужно отметить Магнуса (Magnus) и Поггендорфа (Poggendorff), оба они были экстраординарными профессорами с 1834 г. Имя последнего широко известно благодаря издававшемуся им журналу „Poggendorffs Annalen“. Поггендорф вначале был аптекарем и всегда оставался верен своей природе, склонной к практике. Педагогическая деятельность Магнуса сосредоточивалась, главным образом, в его „коллоквиуме“, к которому принадлежал и я в 1869/70 г.; в дальнейшем этот коллоквиум

стал в значительной мере питомником последующего поколения физиков. Магнус заботился и о потребностях своих учеников в практической деятельности, предоставив в общее пользование свою частную лабораторию, поскольку та эпоха еще не знала публичных физических институтов.

Однако высший расцвет естествознания в Берлине был обусловлен совершенно иным влиянием, именно влиянием рейнского физиолога Иоганна Мюллера (J. Müller), который после работы в Бонне (1824—1833) развернул обширную деятельность в Берлине. Это был исследователь, который умел при осторожном ограничении собственной области работ дать мощный стимул к работе своим многочисленным ученикам. Он боролся против чисто эмпирического, интересующегося только экспериментом направления, и потому его влияние было направлено в сторону точного теоретического обоснования.

Под этими влияниями выросло молодое поколение естествоиспытателей, из которого шесть молодых людей объединились в 1845 г. для тесной совместной работы и создали *Берлинское физическое общество.* Идею организации такого общества дал физиолог Эмиль Дюбуа-Реймон (Emil du' Bois-Reymond, род. в 1818 г.), а организовал его Г. Карстен (G. Karsten, род. в 1820 г.), приват-доцент физики в Берлине, который позже (начиная с 1848 г.) проявил свои организационные способности и в Киле, создав бюро погоды и другие практические организации.

Под руководством Карстена молодое общество занялось рядом работ и прежде всего — изданием реферативного журнала „*Fortschritte der Physik*", представлявшего собой годичные обзоры физической литературы, которые стали впоследствии совершенно необходимыми как справочник; по этому образцу позже были созданы „Fortschritte der Mathematik". Второй задачей было создание „Энциклопедии физики", которая, конечно, так и не была доведена до конца. Она содержит изложение ряда отдельных отделов физики весьма различной ценности. Среди них, например, имеется физиологическая оптика Гельмгольца.

В этот круг вскоре вступили еще другие молодые исследователи, имена которых стали в физике ведущими. В первую очередь нужно отметить среди них Гельмгольца, который, будучи тогда военным врачом в Потсдаме, впервые изложил в физическом обществе в 1847 г. свою теорию сохранения силы. К нему присоединился офицер инженерных войск Вернер Сименс (Werner Siemens, род. в 1816 г. в Ганновере), который участвовал в 1848 г. в войне с Данией и выдвинулся установкой электрических мин в кильской гавани. В 1849 г. он основал совместно с Гальске (Halske) электротехническую фирму, которая скоро приобрела мировую известность. Очень интересно освещено это развитие в „Воспоминаниях" Сименса (Берлин 1893). Не меньшее значение имел следующий член физического общества, в то время учитель средней школы — Клаузиус (род. в 1822 г. в Померании), о важнейшем достижении которого — обосновании

второго начала термодинамики — мы уже говорили выше. В своей работе „*Über die bewe ende Kraft der Wärme*“ („О движущей силе теплоты“, Poggendorffs Ann., т. 79, 1850) он отделил имеющиеся у Сади Карно правильные положения от неверной и несовершенной оболочки; этот факт Мах в своей истории учения о теплоте[1]) называет „значительным интеллектуальным прогрессом“.

Своими работами по кинетической теории газов Клаузиус выдвинулся в дальнейшем в число основных борцов за атомизм.

Кирхгоф также принадлежал к кругу развивающихся талантов, вступивших в это добровольное содружество, основанное на началах исключительно самопомощи. Окружавшая атмосфера быстро растущего крупного европейского города не мало способствовала развитию этого общества, которое, благодаря созданной им оживленной и вдохновляющей к творчеству научной связи, вскоре стало средоточием небывалого расцвета духовной жизни.

Выдающейся фигурой в этом обществе был Гельмгольц, на котором я хочу теперь остановиться подробнее. Причиной исключительного положения, занимаемого им в истории науки, являются необычайная *разносторонность* и глубина его дарования, в котором нас, конечно, в первую очередь интересует здесь математическая сторона.

Герман Гельмгольц (Hermann Helmholtz) — сын учителя — родился в 1821 г. в Потсдаме. По совету отца он решил стать врачом, чтобы возможно скорее проложить себе путь к независимому существованию. Он был студентом в так называемом „Pepinière“, военномедицинской высшей школе в Берлине, защитил в 1842 г. диссертацию „De fabrica systematis nervosi evertebratorum“ и, согласно принятым на себя обязательствам, стал военным врачом в Потсдаме. Все свои математические знания Гельмгольц получил частным образом. О том, как мало откликов встречали склонности Гельмгольца в окружавшей его среде, ярко свидетельствует такая маленькая история. Узнав о книге Гельмгольца „*Über die Erhaltung der Kraft*“ („О сохранении силы“), один из его начальников сказал ему: „Наконец-то что-нибудь практическое“. Он думал, что речь идет о сохранении военной работоспособности его солдат.

При посредстве Гумбольдта Гельмгольц стал в 1848 г. ассистентом анатомического музея в Берлине, годом позже профессором физиологии и анотомии в Кенигсберге; эти же предметы он преподавал позже в Бонне (1855) и Гейдельберге (1858). Гейдельбергское время представляет собой расцвет деятельности Гельмгольца. Здесь он все больше и больше отдавался своим физическим интересам, которые привели его в 1871 г. в Берлин

---

[1]) E. Mach, Die Principien der Wärmalehre, Лейпциг 1896. Пуанкаре (Poincaré, Thermodynamique, стр. 114) говорит впрочем, что Клаузиус снова нашел второе начало термодинамики независимо от Карно.

в качестве лучшего представителя физики. В 1888 г. он отказался от академической деятельности, оставшись президентом основанного по инициативе Сименса Государственного физико-технического института (Physikalisch-technische Reichsanstalt). Умер он в 1894 г.

Уже это краткое жизнеописание свидетельствует об исключительном значении Гельмгольца, не ограничивающемся одной какой-либо специальностью. До своей смерти он оставался как бы официальным представителем точного естествознания перед общественностью, тем более, что ему удалось занять видное общественное положение. Как бы для того чтобы увековечить память о центральном положении Гельмгольца, его памятник перед университетом расположен посередине; сбоку к нему примыкают со стороны улицы памятники Александру и Вильгельму фон-Гумбольдту, а несколько позади памятники Моммсену и Трейчке.

Живую картину образа и деятельности Гельмгольца дает большая трехтомная биография его, написанная Лео Кенигсбергером (L. Königsberger, Vieweg 1902/3). Его научные достижения собраны в трехтомном собрании сочинений, выпущенном издательством Barth в 1882—1895 гг.

Характерной чертой научного дарования Гельмгольца является его многогранность при большой интенсивности во всех направлениях. Особый дар количественного эксперимента, наблюдения и измерения, который он развил собственной работой до виртуозности, сочетался у него со способностью к математической формулировке, которую он сам развил в себе. Оба эти качества дали ему господство над теми проблемами из различных областей естественных наук, которые он черпал из необычайного богатства своих знаний. К тому же способность к философскому мышлению и восприимчивость ко всем сторонам жизни дали ему возможность выработать законченное миросозерцание, в котором органически сочетались результаты его исследований. В целом в нем мышление понятиями брало верх над интуитивным охватом явлений или творческой фантазией. Гельмгольц не является биологом, охватывающим широкое многообразие живых организмов и создающим в нем порядок, как Дарвин; он не открывал нового мира физических явлений, подобно Фарадею, и не был математиком ради самой математики. Все вещи возбуждали его интерес лишь в рамках большого естественнонаучного целого.

В соответствии с этим его талант проявился не в бурной юношеской деятельности; он мог созреть лишь на основе богатого опыта и в медленном развитии, но затем сохранял свою свежесть и живость до глубокой старости. В ином смысле, чем Франца Неймана, мы можем рассматривать и Гельмгольца как представителя чисто прусского типа в отличие от южнонемецкого или нижнесаксонского, представителями которого являются, например, Гаусс, Риман, Вейерштрасс.

Здесь мы можем проследить лишь за математическими работами Гельмгольца, да и то выделив в них лишь наиболее существенное. Согласно сказанному, достижения Гельмгольца и здесь лежат не столько в создании новых математических построений, сколько в распространении уже имеющихся на новые области. С особой благодарностью мы хотим отметить, что Гельмгольц в противовес противоположным тенденциям в современной ему науке всегда подчеркивал, каких исключительных достижений можно добиться, используя математическое мышление в области общих вопросов.

В первую очередь я назову здесь небольшое сочинение, создавшее славу Гельмгольцу, — *Über die Erhaltung der Kraft* („О сохранении силы“, 1847).

В современной терминологии мы говорили бы о „сохранении энергии“. Гельмгольц развивает здесь ту мысль, что определенная величина — та, которую мы сейчас называем „энергией“,— должна сохранять свое значение, так что perpetuum mobile, т. е. машина, создающая работу из „ничего“, лишь в силу расположения своих частей, невозможна. Эта мысль в то время витала в воздухе. Я не хотел здесь подробно обсуждать ход исторического развития этого вопроса, которого мы будем касаться в разных местах; отмечу лишь, что речь идет, если ограничиться механикой, о теореме $T + U = h =$ const., где T есть кинетическая, а U — потенциальная энергия рассматриваемой механической системы. Если мы примем, как полагал еще в 1758 г. Боскович (Boscovich) и в 1820 г. Лаплас и как было общепринято считать в 40-х годах, что в конечном счете все явления природы основаны на игре точечных масс, которые действуют друг на друга в направлении их расстояния r с силой, являющейся функцией только от расстояния r, то становится самоочевидной всеобщая применимость соответствующей теоремы ко всей области явлений природы.

Таким образом задача Гельмгольца заключалась не столько в открытии этих общих идей, сколько в том, чтобы математически проследить их во всех доступных ему явлениях природы, поскольку имелись соответствующие измерения. В сочинении 1847 г. Гельмгольц разрешил эту задачу для явлений теплоты, электростатики и магнитостатики, а также электродинамики; она заканчивается указаниями на применимость того же закона к явлениям жизни.

Позже (1887) Гельмгольц, основываясь на работах англичан, которые мы еще будем обсуждать, дал всему этому построению значительно более общую форму. В работе *Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung* („О физическом значении принципа наименьшего действия“) он высказывает утверждение, что не только интеграл $T + U = h$, но и все выводы, которые основаны на диференциальных уравнениях механики, должны иметь силу для всех явлений природы. Конечно, это расширение наметившегося уже в 1847 г. переноса

механических рассуждений на физические явления отнюдь не было для Гельмгольца навязанной или даже только дедуцированной идеей. Как он сам сказал мне в личном разговоре — путешествие на международную выставку в Чикаго в 1893 г. свело меня с ним на время довольно долгого пути туда и обратно, — это общее предложение казалось ему в обоих случаях самоочевидным.

Тем не менее уже в работе о сохранении силы это общее положение является большим шагом вперед. До Гельмгольца вместо

$$T+U=h$$

писали $T=U+h$ или $T-U=h$ (хотя это было сделано еще Лагранжем в его аналитической механике). Здесь U была так называемая „силовая функция“, а $2T$ (вместо T) „живая сила“ — в простейшем случае произведение mv^2. Таким образом в словесной форме это предложение гласило: половина живой силы, уменьшенная на силовую функцию, остается постоянной. Только благодаря Гельмгольцу, который написал U вместо $-U$, теорема получила свою значительно более важную форму в виде постоянной суммы, более удобную и отчетливее воспринимаемую; обе входящие в эту сумму величины T и U являются симметричными и внутренне равноценными. Только с этого времени можно говорить о „законе сохранения энергии“.

Успех сочинения Гельмгольца отнюдь не последовал немедленно. Физические тенденции эпохи, возникшие в оппозиции к скороспелым заключениям натурфилософов, создавали сильнейшее противодействие и даже возбуждали недоверие ко всякому дедуктивному мышлению. Поэтому Поггендорф отказался принять работу Гельмгольца в свой журнал, и только стараниями Дюбуа-Реймона удалось найти для нее издателя. Из академиков Берлина только Якоби сразу оценил ее значение. Дирихле во всех этих трениях не принимал участия.

Это непризнание, коренившееся в условиях эпохи, не покажется странным и современному читателю. Уже терминология представляется нам чуждой. Мы привыкли обозначать словом „сила“ только произведение массы на ускорение. Гельмгольц же говорит о „живой силе“ T и „силе натяжения“ U, чем и объясняется название работы. Далее, самому исследованию предшествуют априорные рассуждения, которые строгий естествоиспытатель не может читать без внутреннего противодействия и которые никак нельзя признать обязательными. В них отражается влияние Канта, ход мыслей которого Гельмгольц считал идеалом чистой дедукции из высших основных принципов. Наконец, и отдельные заключения часто делаются ощупью и неполны вследствие недостаточного знакомства с литературой, обусловленного условиями жизни Гельмгольца в Потсдаме.

Эта работа начинающего ученого и стилистически несравнима с той классической полнотой и совершенством, которыми

Гаусс владел с самого начала и к которым Гельмгольц не мог и не стремился приблизиться и в позднейших своих работах, к рассмотрению которых мы переходим. Это — большие работы гейдельбергского периода, как раз и являющиеся особенно важными для математика.

Они относятся в первую очередь к учению об ощущениях, о глазе и ухе; над созданием этого учения Гельмгольц работал особенно усердно, побуждаемый к этому, с одной стороны, редкой тонкостью чувств и способностью к художественному восприятию и, с другой стороны, теоретико-познавательным интересом. Сюда относятся два больших труда:

1. *Die Lehre von den Tonempfindungen* („Учение о звуковых ощущениях", 1863) как „физиологическая основа теории музыки".

2. *Handbuch der physiologischen Optik* („Курс физиологической оптики", 1867), к которому примыкает еще:

3. Первое издание широко распространенных *популярно-научных лекций* (1865—1870). Последние возникли из докладов в „естественно-историческом и медицинском кружке" и содержат изложение труднейших проблем в наглядной и доступной неспециалисту форме.

Для нас особенно важна первая из этих работ и в еще большей мере те математически-физические работы, которые возникли в период создания этого труда. Мы назовем из них две работы по гидродинамике:

1. *Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen* („Интегралы гидродинамических уравнений, соответствующие вихревым движениям", Crelle, т. 55, 1858).

2. *Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden* („Колебания воздуха в трубах с открытыми концами", Crelle, т. 57, 1860).

В первой работе содержатся знаменитые общие теоремы о вихревом движении и в частности учение о круговых вихрях [1]). Поскольку до тех пор ограничивались изучением так называемых потенциальных движений, — эти предложения представляют большой успех гидродинамической теории так называемых идеальных жидкостей в смысле охвата действительных явлений. Гидродинамика, действительно, дольше других областей оставалась недоступной математической обработке, так как ее диференциальные уравнения нелинейны. Работа Гельмгольца также допускает еще улучшения и дополнения. Как я хочу отметить уже здесь, эти предложения были значительно проще выведены В. Томсоном в его большой работе *On Vortex Motion* („О вихревом движении", 1868—1869). В ней в качестве нового важного момента вводится понятие о циркуляции жидкости вдоль некоторой кривой. Выводы Гельмгольца оставляют во

---

[1]) Те же теоремы о вихрях нашел независимо и почти одновременно Дирихле, исследования которого были почти немедленно после его смерти опубликованы Дедекиндом (Dirichlet, Werke, т. 2, стр. 363 и сл.).

многом желать лучшего и с точки зрения их строгости. Однако этот недостаток, свойственный многим физикам-теоретикам, не нужно здесь особенно подчеркивать, так как он не имеет большого значения по сравнению с положительной ценностью работы.

Вторая работа Гельмгольца содержит первые теоремы об уравнении $\Delta u + k^2 u = 0$, соответствующие рассуждениям Грина в теории потенциала; теперь мы сказали бы, что это — трактовка краевых задач этого диференциального уравнения. И это исследование не строго в смысле современной математики, напротив, все оно пронизано непоясненными интуитивными моментами и именно поэтому явилось работой, проложившей новые пути.

В конце 60-х годов Гельмгольц познакомился с работами Римана, которые вызвали в нем живой интерес, так что он имел привычку брать их с собой во все путешествия. Именно они постепенно все больше отвлекали Гельмгольца от физиологии и направляли его в сторону математически-физических вопросов. Об этом влиянии свидетельствуют две работы Гельмгольца от 1868 г.:

1. *Diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen* („Разрывные движения жидкости", Berliner Monatsberichte).

2. *Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen* („О фактах, лежащих в основании геометрии", Cöttinger Nachrichten).

Первая работа представляет собой важный прогресс в области приближающейся к действительности гидродинамики. Она касается образования свободных струй при потенциальном движении и разрешает методом, указанным Риманом, простейшие случаи плоской задачи с помощью конформного отображения. Эту проблему в скором времени разработал дальше Кирхгоф.

Толчок к опубликованию второй работы, которая, правда, вытекала из философских потребностей Гельмгольца и долго подготовлялась в нем, также дал Риман, именно своим исследованием „*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*" („О гипотезах, лежащих в основании геометрии"), которое было прочитано как диссертантская лекция в 1854 г., но опубликовано только в 1868 г. Как мы упоминали уже раньше, Риман предполагает, что элемент дуги в пространстве определяется квадратичной формой $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, и дает классификацию различных квадратичных диференциальных форм и соответствующих им геометрических систем. Гельмгольц идет еще на одну ступень глубже, исходя из существования свободно движущихся твердых тел и показывая, что приравнивание ds^2 такой квадратичной форме, которая при этом, однако, имеет специальный характер, уже с необходимостью вытекает из этого факта.

Наконец мы должны остановиться на берлинской деятельности Гельмгольца как физика. Как мы уже упоминали, Гельмгольц занимал видное общественное положение. Его научные

обязательства заключались в руководстве основанным тогда физическим институтом и в чтении общего курса экспериментальной физики, наряду с рядом специальных курсов по различным разделам математической физики. Эти лекции были позже изданы Кенигом (König), Кригар-Менцелем (Krigar Menzel), Рунге (Runge) и Рихарцом (Richarz) и дают прекрасно обработанное изложение почти всех разделов теоретической физики (динамика дискретных материальных точек и непрерывно распределенных масс, акустика, электродинамика и магнетизм, электромагнитная теория света, теплота).

В этой форме, во всяком случае, лекции Гельмгольца имели влияние, в большей мере соответствующее богатству их внутреннего содержания, чем в устном изложении. Гельмгольц вообще относился с пренебрежением к этой части своей педагогической деятельности (и вообще к своим лекциям) и почти не готовился к своим занятиям, хотя, с другой стороны, он и был лишен дара импровизации. Основанием этого его поведения нужно считать чудовищную перегрузку, выпавшую на него в Берлине в большей мере, чем прежде. Большие обязанности по представительству все время предъявляли к нему требования. Он был советником министерства во всех важных вопросах, должен был принимать на себя официальное представительство на международных конгрессах и т. п. и кроме того посвящал много времени и сил своим популярным лекциям, которые заставляли его много путешествовать по Германии и за границей.

Тем не менее благодаря частному руководству в своей лаборатории Гельмгольц сумел воспитать ряд действительно выдающихся учеников с широким кругозором и экспериментальной самостоятельностью; среди них нужно как наиболее значительную фигуру отметить Генриха Герца.

Из больших конгрессов, на которых Гельмгольц играл главную роль, важнейшим являлся руководимый по существу им и Вильямом Томсоном парижский „электрический конгресс" 1881 г., на котором под председательством министра путей сообщения Кошери были установлены международные единицы измерения: вольт, кулон, ом, ампер и фарада. Очень жаль, что Гельмгольц не сумел здесь в достаточной мере выявить значение имен Гаусса и Вебера, с которыми связано создание абсолютной системы мер в области электромагнитных явлений. Название „гаусс" для единицы напряженности магнитного поля было установлено лишь позже по инициативе англичан.

Наряду с национальными противоречиями, здесь сыграло еще известную тормозящую роль одно обстоятельство, именно упоминавшийся уже много раз большой спор вокруг основного электромагнитного закона Вебера, в который в начале 70-х годов был вовлечен и Гельмгольц. Очень оживленная подчас полемика, которую с противной стороны вел К. Нейман, привела — как теперь мы можем сказать — лишь к тому не новому взгляду, что подобного рода вопросы могут быть разрешены не спорами,

а исключительно экспериментом. В тот момент, когда Герц на опыте показал, что электрическая сила требует для своего волнообразного распространения в пустом пространстве известного времени, закон Вебера, требовавший мгновенного действия на расстоянии, был отвергнут.

В свои берлинские годы Гельмгольц мимоходом коснулся почти всех областей математической физики и, проникая глубже то там, то тут, оставил след повсюду. Наиболее замечательной в этом отношении кажется мне „Фарадеевская лекция", прочитанная им в 1882 г. в Лондоне; здесь он ясно показал, что электрохимические факты — в соответствии со взглядами Вебера — приводят к заключению об атомистической структуре электричества, которое нельзя таким образом идентифицировать с эфиром; последний мы представляем себе непрерывным. Это достижение Гельмгольца, являющееся основой современной электронной теории, является тем более замечательным, что в выполненных им работах Гельмгольц всегда оставался феноменологом.

Не могу оставить эту выдающуюся личность, не отметив и тех пределов, которые ограничивали ее деятельность; по крайней мере я должен отметить, что и его многостороннему интеллекту кое-что оставалось недоступным. Я отмечу здесь только один пункт. По своей природе склонный к абстрактным понятиям и чуждый собственно техническому духу Гельмгольц питал недоверчивую сдержанность по отношению к молодому и бурному духу изобретательства. При его исключительном положении и влиянии на руководящие и финансовомощные круги это его поведение имело серьезное значение. И действительно, от этого пострадала самая молодая отрасль нашей техники: авиация. В одной своей работе 1873 г., — в отдельных результатах, конечно, правильной, — Гельмгольц на основе рассмотрения механических аналогий недооценил возможности механического полета. Суждение это, искаженное к тому же невежественным толкованием широких кругов, оказало, конечно, известное замедляющее действие на естественный ход развития авиации.

К сожалению, Гельмгольцем я должен закончить обзор развития математической физики в Германии и Австрии, ни в какой мере, конечно, не исчерпав всего имеющегося здесь интересного и ценного. Я должен теперь обратиться к последнему разделу этой главы, — развитию *математической физики в Англии*, которое хотя и было связано во многих отношениях с Германией и соприкасается с математической физикой в Германии в интересующий нас период, но в целом шло своими широкими путями.

О самоучке Грине (1793—1841), опубликовавшем в 1828 г. в Ноттингеме свою замечательную, но сначала мало замеченную работу: *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* („Опыт приложения

математического анализа к теориям электричества и магнетизма“), мы уже говорили выше. Однотомное собрание его работ „Mathematical Papers“ вышло в Лондоне в 1871 г. Лишь в возрасте 40 лет он попал в Кембридж и опубликовал там ряд важных работ, из которых мы отметим здесь лишь исследование *о притяжении эллипсоида* (1835); это исследование представляет преимущественно математический интерес по сравнению с другими важными работами из области акустики и оптики, так как оно проведено сразу для n измерений, — задолго до того, как началось описанное выше развитие n-мерной геометрии в Германии.

В параллель с Грином можно поставить Мак-Кёллоха (MacCullagh, 1809 — 1847), работавшего в Дублине в „Trinity College“ наряду с Гамильтоном и Сальмоном; это был выдающийся геометрический талант, которому не суждено было проявить себя в достаточной мере, так как он сам лишил себя жизни. Собрание его сочинений („Collected Works“) в одном томе вышло в свет в Дублине в 1880 г.

Особенно замечательна одна работа Мак-Кёллоха: *An Essay towards a dynamical theory of reflexion and refraction* („Опыт динамической теории отражения и преломления“, Dublin, Transactions, т. 21; том этот вышел только в 1848 г., хотя работа Мак-Кёллоха написана в 1839 г.). Здесь он дает принципиально новые основы френелевской теории, что тем более важно, что, поскольку дело касается математических формул, она совершенно совпадает с электромагнитной теорией света. На этом совершенно своеобразном обстоятельстве я хотел бы остановиться еще и потому, что оно очень близко к принятому теперь математически-физическому построению теории.

Пусть u, v, w суть бесконечно малые перемещения некоторого континуума. Особое значение имеют при этом девять частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \ldots,\quad \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Из них можно образовать шесть величин:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

определяющих деформацию элемента объема, и три величины:

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x},$$

которые по умножении на 2 определяют его вращение. Первые по современной терминологии дают тензор, а последние — вектор.

Наиболее общее положение теории упругости — и с ним и „упругой“ оптики — исходит из предположения, что потен-

циал упругой деформации есть функция, в частности квадратичная функция, шести величин, определяющих тензор. В таком виде эта мысль была в частности проведена Грином в его знаменитой работе 1837 г.

Вместо этого Мак-Кёллох имел решимость и мужество сделать потенциал зависящим от трех величин, определяющих *вектор*, положив, например, для кристаллов

$$V=a^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

В результате оказалось, что с помощью такого предположения можно без всякой натяжки, оперируя лишь правилами аналитической механики, точно удовлетворить френелевским законам отражения и преломления света в кристаллах.

Тем не менее идеи Мак-Кёллоха встретили резкий отпор, и его работа осталась на первых порах никем не оцененной. Действительно, его гипотеза о форме потенциала упругой деформации увенчалась вначале исключительно феноменологическим успехом, заключавшимся в получении математических формул, которые великолепно согласуются с обычными схемами механики и вместе с тем с результатами наблюдения; но более глубокий смысл этих формул *остался скрытым*. Физически положение Мак-Кёллоха означает, что потенциал зависит не от деформации элемента объема, а от его вращения по отношению к абсолютному пространству, а это казалось действительно абсурдным. Правда, В. Томсону удалось так построить модель среды, в ячейки которой он поместил вращающиеся волчки с двумя степенями свободы, что ее физическая трактовка приводила к формулам Мак-Кёллоха, по крайней мере, для не слишком больших интервалов времени. Однако и эта интерпретация была достаточно искусственной, и формулы Мак-Кёллоха получили жизнь лишь тогда, когда с ними оказались связанными электромагнитные представления. Тем не менее этот ход мыслей, скорее нащупывающий результаты, чем идущий к осознанной цели, так своеобразен и значителен, что я не мог пройти мимо него.

Грин и Мак-Кёллох являются в своем значении изолированными фигурами; свое непрерывное и блестящее развитие математическая физика в Англии начала лишь с 40-х годов, когда выступили на первый план в Кембридже молодые таланты — Стокс и Вильям Томсон.

Первый является англичанином в узком смысле слова. Родившись в 1819 г. в Скрине, в Ирландии, он начал свои публикации в 1842 г. Его сочинения собраны в пяти томах „Mathematical and Physical Papers“ (том пятый содержит интересный некролог лорда Рэлея). Стокс прожил с 1837 г. по год своей смерти 1903 г., т. е. в течение 66 лет, в Кембридже, где он и развернул сначала в качестве исследователя, а затем в ка-

честве преподавателя свою обширную, непрерывную и благодаря его личной доброте очень благотворную деятельность.

Вильям Томсон, позже лорд Кельвин (1824—1907), родился в Бельфасте, в Северной Ирландии, — области, куда переселилось так много шотландцев; там отец его был профессором математики; мы имеем здесь любопытный пример наследственности, тем более, что и брат Вильяма Джемс также был крупным теоретиком (в частности, он выяснил зависимость точки замерзания от давления). В 1832 г. отец Томсона получил приглашение в Глазго, где мальчик Вильям и воспитывался под непосредственным руководством отца; уже в 1834 г. — в возрасте десяти лет — он поступил в университет, причем, конечно, нужно помнить, что прежний глазговский колледж соответствовал примерно старшим классам наших гимназий. Томсон обучался там до 1841 г., когда он предпочел Кембридж. Его студенческие годы закончились в 1845 г. путешествием в Париж, которое имело на него большое влияние. В 1846 г. он занял сам кафедру „профессора натуральной философии" в Глазго, где и прожил до самой смерти, даже и после своей отставки в 1899 г.

Нужно, конечно, быть шотландцем, чтобы понять привязанность, которую Томсон питал всю свою жизнь к родному городу. Глазго — огромный фабричный город с очень высокими трубами для отходящих газов химической промышленности; он расположен в плоской долине реки Клейда и благодаря шотландскому климату почти всегда окутан облаками черного дыма. Небольшим притоком Клейда является речка Кельвин, имя которой присвоил себе лорд Кельвин, когда в 1892 г. он получил титул лорда.

В течение всей своей долгой жизни Томсон развивал неутомимую деятельность в области математической физики, ее преподавания и технических приложений. Его работы начались в 1840 г., когда в возрасте 16 лет он предпринял со своим отцом первое путешествие в Германию и начал изучать „Теорию теплоты" Фурье. В нем, как и во Франце Неймане, влияние Фурье высекло искру из камня.

За этим последовала богатая творческая деятельность, выражавшаяся большей частью в коротких и глубоких замечаниях. К концу своего обучения в Кембридже Томсон опубликовал уже 16 работ! Первые из них носят чисто математический характер; они относятся к теории потенциала, электростатике и теплопроводности. Однако в 1845 г. в Париже под влиянием Реньо в Томсоне просыпается склонность к количественным измерениям. За этим последовал глазговский термодинамический период. Почти одновременно с Клаузиусом Томсон столкнулся с теми трудностями, которые возникают при попытке согласования выводов Карно о коэфициенте полезного действия тепловых машин с законом сохранения энергии. К этому примыкает математическая разработка теорий электричества, магнетизма и упругости в соответствии с новыми принципами.

К концу 50-х годов начинается великолепная и почти не имеющая примеров практическая деятельность Томсона, обусловленная в первую очередь потребностями трансокеанской кабельной телеграфии. Первый кабель между Англией и Америкой был проложен в 1858 г., но он скоро отказался служить,— как показал Томсон, вследствие применения слишком сильных токов; только третья попытка в 1866 г. привела к установлению надежной связи. Эти годы охватывают один из наиболее замечательных периодов в истории технического развития, в котором В. Томсону принадлежит ведущее место. Благодаря созданию соответствующих приборов и методов ему удалось в конечном счете преодолеть все трудности. В качестве побочного результата Томсону удалось при этом внести значительные усовершенствования почти во все мореходные инструменты. Без его компенсированного компаса, его лота глубин и т. п. сейчас нельзя представить себе рационального кораблевождения.

Эти успехи доставили Томсону большое состояние и широкую популярность. Он оказался в центре богатейших светских связей, напоминая этим Гельмгольца, как равно и тем особым обстоятельством, что его вторая жена была женщиной со светскими наклонностями и честолюбием. При посещении его в 1899 г. я лично имел возможность убедиться в том, насколько глубоко проникало все это в жизнь Томсона. Томсон со свойственной ему любезностью и живым интересом к делу показывал мне свою лабораторию, когда появилась хозяйка дома; с этого момента в большом и чуждом всякой интимности кругу всякое личное общение было подавлено условными светскими формами.

Несмотря на эту чудовищную перегрузку светскими обязанностями, Томсон непрестанно работал дальше, даже во время путешествий, которые он предпринимал на своей яхте для отдыха. Он неутомимо искал механического объяснения всех процессов, что оставалось его идеальной целью до конца жизни. Интересны в этом отношении его „Балтиморские лекции", прочитанные им в 1884 г. и опубликованные в 1904 г., где он различнейшими способами пытается с помощью механических моделей дать представление о противоречивых свойствах светового эфира. Электромагнитную теорию света Томсон отвергал в течение всей своей жизни.

Англия оказала Томсону величайшую честь, какую она может оказать своим великим людям: он был похоронен в 1907 г. в Вестминстерском аббатстве. Эффектнее однако было то торжество, которое принес ему пятидесятилетний юбилей профессорской деятельности в 1896 г. Кульминационным пунктом этого торжества, в котором приняли участие представители всех культурных стран, представляла собой приветственная телеграмма юбиляру, которая была отправлена из его собственной комнаты вокруг земного шара. Прохождение этой телеграммы потребовало $13^1/_2$ минут; ответ Томсона, обойдя земной шар, попал снова к нему в руки через $8^1/_2$ минут.

Работы лорда Кельвина сведены в следующие сборники: один том *Reprint of papers on electrostatics and magnetism* (Переиздание работ по электростатике и магнетизму, Лондон 1884); шесть томов *Mathematical and physical papers* („Математические и физические работы", Кембридж 1882); три тома *Popular lectures and adresses* („Популярные лекции и речи", Лондон 1891). Большая биография его была опубликована в 1910 г. Сильванусом Томпсоном; она заканчивается очень характерным списком отличий, публикаций и патентов лорда Кельвина. Более короткая, но более научная биография, — однако тоже с чисто английской точки зрения, — принадлежит Андрью Грею (A. Gray, Лондон 1908).

Я хотел бы еще вкратце отметить некоторые, впрочем довольно случайно выбранные детали из математических работ Томсона.

Известны его юношеские работы о потенциале, возникшие в 1843—1844 гг. в связи с работами Лиувилля. Томсон установил там инвариантность равенства $\Delta v = 0$ при инверсии и пришел таким образом к своему методу „электрических изображений", который дал ему возможность чрезвычайно просто и наглядно разрешать электростатические задачи, относящиеся к шарам или их частям. За этим последовала в 1847 г. в 12 томе журнала Лиувилля („Reprint", стр. 142 и сл.) работа, в которой содержится в точности то, что мы называем „*принципом Дирихле*".

Из термодинамического периода я хотел бы отметить возникшее около 1852 г. точное определение абсолютной температуры на основании второго начала термодинамики $dQ = \vartheta \cdot dS$ и поверку его при помощи постоянно совершенствовавшихся газовых термометров. Особенно, однако, нужно отметить превосходное *общее изложение термодинамики* в „Британской энциклопедии".

Работы, относившиеся к *геофизике и мореходному делу*, привели Томсона к конфликту с геологами. Именно, исходя из принципов теплопроводности, он дал определение возраста Земли, резко расходившееся с данными геологов. Упругие деформации земного шара и явления приливов и отливов привели его к общепринятому в настоящее время взгляду, что Земля является сплошным твердым телом, а не только твердой оболочкой с жидким ядром. Особенно важны исследования Томсона относительно теории приливов и отливов, великолепно проведенный гармонический анализ этих движений, возникающих из наложения ряда колебаний. Приливно-отливные явления обусловлены, как известно, в первую очередь сменой положений Солнца и Луны относительно Земли; кроме того они в высокой мере зависят и от местных условий, т. е. от ограничения океана массивами суши. Томсон исходит от установленного еще Лапласом принципа, согласно которому, если ряд вида

$$\sum a_k \sin \lambda_k (t - t_k)$$

изображает обусловливающие прилив небесные явления, то сами

эти приливы и отливы в каком-нибудь месте определяются рядом

$$\sum A_k \sin \lambda_k (t - T_k),$$

причем величины A_k и T_k берутся из наблюдений, значения же λ_k определяются первым рядом. Чтобы определить величины A_k и T_k (поскольку они вообще входят в рассмотрение), нужны, конечно, широко разработанные методы наблюдения и вычисления. Томсон изобрел остроумные приборы для построения этих „гармонических компонент" и для механического вычисления суммы конечного числа членов вида $A_k \sin \lambda_k (t - T_k)$, дающие возможность произвести удовлетворительное предвычисление тех явлений, которые можно ожидать в определенном месте. Более подробное изложение результатов Томсона в этой области и дальнейшее развитие этих полуэмпирических теорий можно найти в книге Джорджа Дарвина „Приливы и отливы"[1]. О трактовке Томсоном проблемы волн на поверхности жидкости и в частности движений жидкости, вызываемых продвигающимся сквозь нее твердым телом (судном), я, к сожалению, не могу здесь говорить (см. об этом Popular Lectures Томсона, т. 3, стр. 450).

Эти работы стоят уже на границе чистой механики, которая также многим обязана Томсону с теоретической и конструктивной стороны. Я отмечал уже упрощение и развитие вихревой теории Гельмгольца (Edinburgh Transactions, 1868, стр. 69). Особая склонность к конструированию приборов побуждала Томсона к созданию все новых аппаратов для демонстрирования вихревого движения и его действий. Модели геттингенской коллекции: гиростат, жидкий волчок и т. д., построены по идеям Томсона.

Наряду с чистой радостью экспериментирования, Томсоном руководил в этих работах и интерес умозрительного рода. В глубине души он стремился к созданию вихревой теории материи. Мир должен был быть понят как чистая жидкость, заполненная отдельными, неразрывно связанными друг с другом гельмгольцевыми вихрями, атомами, связанными в молекулы. В этом представлении гравитация — в духе Лесажа[2]) — должна была быть объяснена как результат толчков со стороны очень многих маленьких вихрей с большой скоростью. Томсон предложил для них очень красивое имя „ихтиоидов". Конечно, теория не вышла за рамки наметок, не превратившихся ни во что ощутимое, но для восприимчивой фантазии она все же сохраняет известное обаяние.

Основой всех этих даже и фантастических проявлений томсоновского духа всегда являлась подлинная механика в узком смысле этого слова. Как уже было упомянуто, Томсон упорно противодействовал представлениям электромагнитной теории,

---

[1]) Есть русский перевод, М.-Л. 1919.

[2]) Lesage, Loi qui comprend toutes les attractions et répulsions (Journal des savants étrangers, 1764).

сохраняя в этом полную последовательность, так как в его механистическом мировоззрении не было места для этой теории. Опыты Герца, произведенные в 1888 г., пришли слишком поздно для того, чтобы они могли иметь какое-нибудь влияние на Томсона.

В заключение я хотел бы еще напомнить о широко распространенном в Англии учебнике *Treatise on natural philosophy* („Трактат по натуральной философии“), который составил Томсон совместно с шотландцем Тэтом (1831—1901), учеником Гамильтона и позже профессором в Эдинбурге. Он впервые вышел в свет в 1867 г. в Оксфорде и по инициативе Гельмгольца был переведен в 1871 г. на немецкий язык Вертгеймом. Второе значительно расширенное издание состоит из двух частей и вышло в Кембридже в 1878—1883 гг.; к сожалению, на немецкий язык оно не переведено.

Это знаменитое сочинение Томсона и Тэта, которое английские студенты коротко называют T+T', представляет собой очень своеобразное явление в нашей литературе вследствие резкого расхождения в свойствах и склонностях обоих авторов, которые даже в своей совместной работе впадают в величайшее противоречие друг с другом.

Тэт был натурой доктринерской, отличался резким национализмом, притом он был не свободен от педантизма и чрезвычайно тщательно и последовательно проводил свои планы. Этой картине полностью соответствует то, что он был убежденным сторонником теории кватернионов. Томсон же, хотя он вообще был очень уступчив, раз навсегда отказался что бы то ни было слышать о кватернионах и даже в смягченной форме теории векторов не давал им доступа в свою книгу.

Остов сочинения, его построение и расчленение принадлежат Тэту, но в отдельных рассуждениях, в ячейках этой сети Томсон дает полную свободу своим постоянно обновляющимся идеям. Хотя эти вставки очень богаты содержанием, но даны они в отрывочной, едва понятной форме. Они воспринимаются скорее как беглые заметки из записной книжки и своей отрывочностью дают ясное представление о характере лекций Томсона. Даже перед аудиторией Томсон был не в состоянии развивать последовательно заранее намеченный ход мыслей, не прерывая самого себя непрестанно возникавшими у него в данный момент идеями.

В целом книга Томсона и Тэта представляет собой чрезвычайно богатое мыслями сочинение, всегда имеющее целью овладение конкретными процессами движения и по типу совершенно противоположное механике Кирхгофа. Для самостоятельного, более подготовленного студента, руководимого собственным творческим интересом к делу, она может быть очень полезна; я сам с большим удовольствием, хотя и с большим трудом, проработал в свое время отдельные ее главы. Но большая популярность и широкое распространение этой книги среди

английского студенчества, несомненно, не соответствуют ее фактическому использованию, так как для среднего студента она слишком трудна. Я наблюдал, что книгу T+T′ покупают и ставят на полку, но когда хотят чему-нибудь научиться, то берут более доступный учебник.

Наконец я хотел бы привести один характерный для Томсона случай. Войдя раз в аудиторию, Томсон внезапно обратился к слушателям с вопросом: что такое $\frac{dx}{dt}$? В ответ он получил все мыслимые строго логические определения. Все они были отвергнуты: „Ах, бросьте вы этого Тодгентера (представитель чистой математики в Кембридже), $\frac{dx}{dt}$ есть скорость!"

Легко заметить много точек сходства между Вильямом Томсоном и нашим Гельмгольцем, тем более, что они часто соприкасались друг с другом в личном общении и научной деятельности, например на парижском конгрессе 1881 г. Сопоставление двух этих людей действительно представляет собой заманчивую и благодарную задачу для историка математики.

Конец этой главы мы хотим посвятить тому английскому физику, чье влияние на всю математическую физику было до последнего времени наиболее сильно, именно Клерку Максвеллу (Clerk Maxwell). Как и его великий товарищ по работе Томсон, Максвелл был шотландцем. В то время, однако, как главной характерной чертой личности Томсона являлась неутомимая активность, опиравшаяся на исключительную легкость творчества, здесь мы имеем натуру более углубленную и спокойную, позволяющую медленно созревать своим глубоким идеям. Клерк Максвелл родился в 1831 г. в Эдинбурге, но бо́льшую часть своей жизни, даже и в зрелые годы, проводил в деревне, где его семья владела имением. По внешнему ходу своей жизни, как и по своему внутреннему существу, Максвелл принадлежит к частому в Англии типу знатных частных ученых, которые лишь случайно принимают на себя выполнение каких-нибудь служебных функций. В годы 1850—1856 он учился в Кембридже, затем занимал кафедру в Абердине до 1860 г. и в Королевском колледже в Лондоне до 1865 г., после чего он удалился в частную жизнь. Лишь в 1871 г. он принял на себя руководство *лабораторией Кэвендиша* (Cavendish) в Кембридже; эта лаборатория являлась первым в Англии самостоятельным исследовательским и учебным физическим институтом, с которым неразрывно связано все современное развитие этой науки (кроме нее в Кембридже существуют только небольшие физические лаборатории в отдельных „колледжах"). К сожалению, Максвелл уже в 1879 г., т. е. в возрасте всего 48 лет, умер от внутренней болезни.

Я хотел бы уже здесь дать несколько более подробных сведений о лаборатории Кэвендиша, игравшей такую важную роль в дальнейшем. Кэвендиш (родился в 1731 г. в Ницце, умер

в 1810 г. в Лондоне), по имени которого названа лаборатория, был богатым человеком, родственником герцога Девонширского; он посвятил себя глубоким физическим и химическим проблемам, часто опережая свое время в постановке и трактовке проблем. Его научные работы, относящиеся к вопросам электричества, были изданы в 1879 г. Максвеллом, по инициативе которого уже раньше была создана на частные пожертвования лаборатория Кэвендиша и связанная с ней кафедра. После смерти Максвелла его место занял лорд Рэлей (1879—1884); как и его предшественник на этом посту, он был вождем всей математической физики в Англии. Я напомню только о его двухтомной *Theory of sound* („Теории звука"), вышедшей впервые в 1877/78 г., и об открытии им аргона в 1894 г. После лорда Рэлея руководство знаменитым институтом перешло к Дж. Дж. Томсону, который ведет его до сих пор и который также имеет центральное значение в своей науке.

Подробную биографию Максвелла представляет труд Кэмпбелла и Гарнетта (Лондон 1882), касающийся, однако, больше личной стороны его жизни. В 1890 г. были изданы в двух больших томах научные работы („Scientific Papers") Максвелла с очень ценным научным введением. К этому его научному наследству нужно присоединить очень важный *Treatise on Electricity and Magnetism* („Трактат об электричестве и магнетизме"), вышедший в двух томах в 1873 г.[1]).

Переходя теперь к рассмотрению научного творчества Максвелла, мы не можем не выдвинуть на первый план его наиболее знаменитое творение — электромагнитную теорию света, тем более, что в нем есть много интересного и с математической стороны. К сожалению, здесь нет возможности остановиться хотя бы самым беглым образом на многих других работах Максвелла, замечательных и с математической стороны; многие из них, например работы об *основаниях графической статики*, о строении, устойчивости и движении *колец Сатурна* или широко известные в кругах физиков работы о *кинетической теории газов*, представили бы живой интерес и в той связи, которая нас в настоящий момент занимает.

Электромагнитная теория света Максвелла — или, лучше сказать, его новая теория, рассматривающая свет и электричество как проявления одного и того же агента, — возникла из стремления математически истолковать идеи Фарадея о едином значении наполняющего пространство эфира, — идеи, которую сам Фарадей развивал лишь в очень неопределенной форме. В цепи фактов и заключений, связывающих новую теорию с действительностью, решающее значение имело установление В. Вебером и Р. Кольраушем-старшим в 1855 г. соотношения между электростатической и электромагнитной единицами, которое было окончательно опубликовано в 1857 г. Как мы уже

[1]) Второе издание было переведено в 1882 г. на немецкий язык.

несколько раз говорили, это соотношение заключается в том, что постоянная c в законе Вебера, представляющая собой по размерности скорость, деленная на $\sqrt{2}$, равна скорости света.

В двух фундаментальных пунктах ход мыслей Фарадея разнится от веберовского:

1. В связи с господствовавшей в то время во всех областях натурфилософией ньютоновской школы Вебер принимал чистое дальнодействие электрических сил. Фарадей, напротив, исходил из предположения, что действие силы распространяется через среду, заполняющую пространство.

2. В соответствии с этим действие силы в смысле Вебера происходит мгновенно, у Фарадея же распространение действия силы требует известного времени.

Еще в 1846 г., — как показывает одно весьма замечательное письмо к Филиппсу, — Фарадей высказывал фантастическое предположение, что может существовать связь между оптическими и электрическими явлениями; предположение это однако было высказано в самой неопределенной форме, так как измерений Вебера-Кольрауша еще не было. Я охотно подчеркну здесь тот факт, отмеченный еще в первой главе, что Гаусс в письме к Веберу уже в 1845 г. высказывал идеи, лежащие целиком в направлении идей Фарадея[1]).

Представляет особый интерес проследить, как медленно пробивался Максвелл в трех следовавших друг за другом работах к высотам своей последовательной теории. Обзор, который я хотел бы дать здесь этому развитию, как и все предыдущее, может показаться очень субъективным, так как я придаю больше значения выяснению решающих моментов в развитии идей, нежели отдельным историческим подробностям.

1. Работа *On Faraday's lines of force* („О фарадеевых линиях сил", 1855, Cambridge Philosophical Transactions, т. 10; Scientific Papers, т. I, стр. 155 и сл.) содержит доказательство того, что электро- и магнитостатические теории, опирающиеся на дальнодействие и близкодействие, представляют собой различные математические описания одних и тех же фактов. Там, где теория дальнодействия подставляла силу $\frac{1}{r^2}$, Фарадей видел исходящие из нулевой точки и пронизывающие пространство силовые линии; иными словами, чтобы сразу выразить общую мысль в абстрактной форме: мы может одинаково хорошо обрисовать действительные соотношения, либо исходя из имеющего место во всем пространстве диференциального уравнения в частных производных потенциала V и не заботясь о расположении масс, обусловливающих этот потенциал, либо рассматривая этот потенциал как сумму главных решений этого уравнения, например как интеграл потенциалов масс отдельных элементов некоторой поверхности. Первая точка зрения имеет наглядный эквивалент в представле-

[1]) Gauss' Werke, т. 5, стр. 629.

нии о силовых линиях, которые, подчиняясь в каждой точке диференциальному уравнению, овеществляют существующую в этой точке силу, т. е. общее распределение потенциала; вторая точка зрения удовлетворяется чисто формальным выводом силы из найденного потенциала в рассматриваемой точке.

Рассматриваемые математически и чисто логически оба представления — в пустом пространстве непосредственно вытекающие друг из друга — и связанные с ними точки зрения совершенно равноправны. Однако точка зрения Фарадея имеет большие преимущества с чисто психологической стороны, так как она дает пластическую картину имеющих место соотношений. Каждому, кто сам работает в этой области, она является совершенно необходимой. Никто, например, не может живо представить себе действие динамомашины, не говоря уже о целесообразном ее конструировании, если он не имеет наглядного представления о магнитных силовых линиях, магнитном поле, в котором движутся индукционные катушки; однако о вытекающих отсюда физических постановках вопроса я здесь ничего не хочу говорить.

2. В работах 1861—1862 гг. *On physical lines of force* („О физических силовых линиях“, Scientific Papers, т. I, стр. 451 и сл.), напечатанных в двадцать первом томе Philosophical Magazine, Максвелл занимается тем, что создает в среде, заполняющей пространство, механизм, соответствующий магнитостатическому дальнодействию и возникновению индукционных токов при изменении магнитного поля. Он приходит к следующей картине. Существует, вероятно, очень большое, но во всяком случае конечное число магнитных силовых линий. Вокруг каждой из этих линий среда вращается, тогда как сама линия находится в покое. Чтобы избежать недоразумений, нужно указать, что речь идет здесь не о тех вращениях, которые мы встречали до сих пор в механике, даже, например, в случае гельмгольцевых вихрей. Там движение точки являлось полностью описанным, если вместо первоначальных ее координат x, y, z мы знали занявшие их место величины x' y' z', и вращение получалось лишь косвенно, поскольку точки, близкие к x, y, z, движутся несколько иначе, чем сама точка x, y, z. В молекулярных же вихрях, с которыми мы здесь встречаемся, каждая точка — каждая молекула — сама является носителем системы осей, относительно которых она может поворачиваться на углы λ, μ, ν.

Максвелл представляет себе этот процесс с такой грубой реалистичностью, которая теперь кажется нам поразительной. Он представляет себе, что между вращающимися частями среды помещены для устранения или уменьшения трения небольшие фрикционные ролики. Эти тельца, похожие на шарики в шарикоподшипнике, он и рассматривает как подлинное местоположение электричества.

Несмотря на большие усилия, Максвеллу не удалось далеко продвинуться с этими конкретными представлениями. Он поэтому отбросил их и обратился к чисто феноменологической

точке зрения, в которой сейчас воспитывается каждый начинающий студент. Согласно этой точке зрения, среда, заполняющая пространство, в каждой своей точке является носителем электрических векторов, с одной стороны, и магнитных, — с другой; их действия и формальная связь известны, но о более глубоком их смысле не задумываются.

Большое значение Максвелл придавал только тому, чтобы законы электромагнитного поля не исключали *возможности* механического объяснения, но чтобы, наоборот, всегда можно было сделать такие формальные предположения о живой силе и потенциальной энергии, которые, согласно общим законам механики, ведут к известным электромагнитным действиям. Таким образом он твердо стоит на той точке зрения, которую теперь так часто отвергают, — именно, что механика является основой физики. В основе это явление представляет собой не что иное, как развитие старого, созданного еще Лагранжем формального метода, который предстоит наполнить новым идейным содержанием; но овладение этим материалом и даже познание его было еще совершенно чуждо творцу метода. Несомненно, что одним из наиболее удивительных обстоятельств в истории нашей науки является этот процесс, постепенно подчинявший формальному методу классической механики все новые и все более далекие области применения, в результате чего достигалось удовлетворительное овладение наблюдаемыми явлениями без всякого проникновения в истинные свойства, лежащие в их основе. Последний триумф этой системы был достигнут в физической химии американцем Гиббсом, которому принадлежит знаменитый ряд статей *On the Equilibrium of heterogeneous substances* („О равновесии гетерогенных веществ") в Transactions of Connecticut Academy of Arts and Sciences (1876—1879). Что сказал бы Лагранж, если бы он дожил до того, что его параметру q дают значение процентного содержания иода в некотором соединении!

3. На этой абстрактной, чисто феноменологической основе Максвелл и развил в 1864 г. в большой работе *A dynamical theory of the electromagnetic field* („Динамическая теория электромагнитного поля"), напечатанной в 155 томе Transactions Royal Society (Scientific Papers, т. I, стр. 526 и сл.), свое учение, увенчавшееся установлением электромагнитной теории света и предсказанием многочисленных новых соотношений. Подробную разработку этих идей представляет собой большое сочинение его *A Treatise on electricity and magnetism* („Трактат об электричестве и магнетизме"), появившееся в 1873 г. Книга эта содержит отдельные, очень богатые и интересные главы, но в целом читается с трудом, ибо она добросовестно ведет читателя через теории отдельных областей, нигде не давая ему систематического обзора общей заключительной точки зрения.

Чтобы коснуться хоть слегка существа вопроса, я хочу еще показать, как связаны электродинамические уравнения Макс-

велла для чистого эфира с теми уравнениями, которые вывел в 1839 г. Мак-Кёллох для своей оптической среды из чисто механических представлений. Эту связь впервые показал ирландский физик Фитцджеральд (Fitzgerald, London Philosoph. Trans., т. 171, 1880).

Во главу угла я ставлю „принцип Гамильтона“

$$\delta \int (T - U)\, dt = 0$$

при постоянных пределах. Если обозначить, как выше (стр. 273), смещения континуума Мак-Кёллоха через u, v, w, а компоненты вихря или ротора его через

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

то потенциальная энергия на единицу объема определяется выражением

$$U = \frac{a^2}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

а живая сила—выражением

$$T = \frac{\rho}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2),$$

где ρ означает плотность. Положив $\frac{a^2}{2} = c^2$, где c дальше будет представлять собой скорость света, и принимая во внимание значения величин U и T для всей среды, мы получим для движения среды вариационное соотношение

$$\delta \int\int\int\int dx\, dy\, dz\, dt \,\{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) - c^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\} = 0$$

при постоянных пределах; здесь для простоты мы положим $\frac{\rho}{2} = 1$. Отсюда вытекают уравнения движения:

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{u} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \frac{1}{c^2}\cdot\ddot{v} = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{1}{c^2}\cdot\ddot{w} = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

или, подробнее,

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{u} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{v} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{w} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

которые при выборе подходящих начальных условий движения дают

$$\operatorname{div}(u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Мы получаем таким образом следующие простые диференциальные уравнения движения:

$$\frac{\ddot{u}}{c^2} = \Delta u, \quad \frac{\ddot{v}}{c^2} = \Delta v, \quad \frac{\ddot{w}}{c^2} = \Delta w.$$

Эти выводы принимают особенно элегантную симметричную форму, если ввести некоторые вспомогательные величины, соответствующие рассуждениям Мак-Кёллоха в „Дополнении“ к собранию его работ (стр. 188). Именно, если положить

$$u_1 = c\int \xi dt, \quad v_1 = c\int \eta dt, \quad w_1 = c\int \zeta dt,$$

то вариационный принцип принимает вид:

$$\delta\int\int\int\int dx\,dy\,dz\,dt\,\{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) - (\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + \dot{w}_1^2)\} = 0,$$

и вместе с тем мы получаем две группы по три уравнения:

$$\frac{1}{c}(\dot{u}_1, \quad \dot{v}_1, \quad \dot{w}_1) = -\operatorname{curl}(u, v, w),$$

$$\frac{1}{c}(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}) = \operatorname{curl}(u_1, v_1, w_1),$$

причем каждую из этих групп можно взять в качестве дополнительного условия к вариационному принципу, чтобы получить другую. К этим равенствам присоединяются еще дальнейшие:

$$\operatorname{div}(u, v, w) = 0, \quad \operatorname{div}(u_1, v_1, w_1) = 0.$$

Таким образом мы получаем как раз ту систему формул, которую мы называем теперь *уравнениями Максвелла для свободного эфира*, хотя я хотел бы отметить, что они не встречаются в такой явной форме у самого Максвелла, а были выведены позже Хэвисайдом (Heaviside) и Герцом [1]). Величины u, v, w и u_1, v_1, w_1 называются соответственно компонентами электрического и магнитного вектора. При этом выбор тех или иных обозначений для каждого из обоих явлений еще остается совершенно свободным; когда этот выбор сделан, то одновременно вследствие знака, с которым входит в уравнения вихрь, фиксируется и выбор правой или левой системы координат, принятой за основу. О полной симметричности имеющих здесь место соотношений свидетельствует и форма подинтегрального выражения, входящего в вариационную проблему. Этим дается связь с идеей о том, что потенциальная и кинетическая энергии не представляют собой существенно различных вещей, но что различие между ними является условным.

После этого слишком короткого обзора я должен с сожалением оставить эту область, чтобы сказать еще несколько слов

---

[1]) Литературные указания см. в Enzyklop., V 13, (H. A. Lorentz), стр. 68, сноски 3, 4.

об особом характере Максвелла как математика, конечно не входя здесь в подробные пояснения.

Максвелл не является человеком логически безупречных построений: его заключениям часто недостает силы безусловной необходимости. Высоко развитое индуктивное мышление оттесняет у него, так сказать, на задний план дедуктивное мышление. Так, например, установив в теории шаровых функций предложение о том, что всякое выражение вида

$$r^{2n+1}\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial h_1 \ldots \partial h_n}$$

всегда представляет собой некоторую шаровую функцию, он затем без всяких оговорок, не говоря уже о доказательствах, пользуется обратным предложением! Теорема о том, что для всякой заданной шаровой функции можно всегда одним и только одним способом подобрать η вещественных направлений $h_1, \ldots, h_n$ так, чтобы с помощью их данная функция получалась указанным образом из $\frac{1}{r}$, была позже доказана Сильвестром [1]).

Что, напротив, в высокой мере характерно для Максвелла,— это мощная интуиция, поднимавшаяся иногда до высоты пророчества и сочетавшаяся с полной фантазии силой наглядного представления. О последнем свойстве его мышления свидетельствует много примеров: его любовь к диаграммам, применение разворачивающихся кривых, стереоскопических картин, обратных силовых планов.

И в физике Максвелл является гением, творящим из непосредственной интуиции; в этом отношении его влияние было еще сильнее, чем влияние В. Томсона, которого он превосходил в силе подсознательного прозрения.

Заканчиваемая глава о развитии механики и математической физики показала нам, как математика сопровождала по пятам физическое мышление и, обратно, получала наиболее мощные импульсы со стороны проблем, выдвигавшихся физикой. Это развитие мы проследили почти до начала современной эпохи. В следующей главе мы вернемся снова к чистой математике, продолжая исследование с того момента, на котором мы прервали его в главе четвертой, т. е. приблизительно на 1850 г.

---

[1]) См., например, Курант-Гильберт, Методы математической физики, т. I, М.-Л. 1934, стр. 489 и сл.

Глава шестая.

Общая теория функций комплексного переменного у Римана и Вейерштрасса.

Вернемся к чистой математике и обратимся к общей теории функций комплексного переменного. Эта основная область чистой математики обязана своим дальнейшим успешным развитием в первую очередь двум немецким ученым: Риману и Вейерштрассу. Их деятельность приходится в основном на годы 1850—1880.

Изложением теории функций комплексного переменного мы отнюдь не исчерпаем той работы, которую проделали за свою жизнь эти два исследователя. Ими оставлены капитальные работы в разнообразнейших областях, и в последующих главах мы не раз будем к ним возвращаться. Однако мы считаем полезным именно здесь обрисовать их общую деятельность и их весьма не похожие друг на друга личности.

Риман — человек блестящей интуиции. Своей всеобъемлющей гениальностью он превосходит всех своих современников. Там, где разбужен его интерес, он всегда приступает к исследованию по-новому, не смущаясь традициями, не признавая стеснительных рамок какой-либо системы.

Вейерштрасс — прежде всего человек логики. Он продвигается вперед шаг за шагом, медленно, систематично. Там, где он взялся за работу, он достигает исчерпывающих результатов.

Относительно их публичной деятельности следует заметить, что Риман появился, после незаметной подготовки, как яркий метеор, с тем однако, чтобы вскоре погаснуть; его деятельность ограничивается 15-ю годами: на 1851 г. приходится появление его диссертации, на 1862 г. — болезнь, на 1866 г. — смерть.

Вейерштрасс был способен долго и упорно добиваться своего. Уже в 1843 г. он начинает с отдельных замечаний по поводу аналитических факториалов (Gymnasialprogramm, Deutsch-Crone); в 1897 г. он умер в преклонном возрасте после долгой и плодотворной жизни.

Мы начнем с Римана, несмотря на то, что он моложе, во-первых, потому, что основная его деятельность относится к более раннему периоду времени, чем деятельность Вейерштрасса; во-вторых, потому, что нам здесь, в Геттингене, он гораздо ближе, ибо его жизнь и творчество неразрывно связаны с

Геттингеном. Здесь он начал свою учебу, здесь он получил докторскую степень и право преподавать в высшей школе, здесь же он преподавал в нашем университете в качестве доцента вплоть до своей болезни. Имя Римана связано с порой наибольшего расцвета старой геттингенской школы, ставшей основой для всех нас.

I. Бернгард Риман.

Сначала о *собрании сочинений Римана.* Оно появилось в первом посмертном издании Г. Вебера в 1876 г. и во втором издании в 1892 г. В эти издания было включено послесловие, содержащее биографию Римана, написанную его вернейшим другом Дедекиндом [1]).

Важным завершением этих трудов являются „дополнения" („Nachträge") к работам Римана, изданные Нетером и Виртингером в 1902 г. Они возникли из записей лекций Римана и открывают перед нами исключительную широту проникновения Римана в изучаемые вопросы; то, что считалось впервые открытым лишь спустя многие годы после его смерти, оказалось приведенным уже в этих его лекциях. Вы видите, таким образом, в какой мере развитие науки зависит от случайностей! Насколько иначе пошло бы развитие математики, если бы слушатели Римана смогли глубже понять ход его мыслей или если бы записи его лекций были обнаружены раньше! А сколько, вероятно, исчезло ценного и значительного материала, оставшегося непонятым или незамеченным [2])!

Остается еще указать на три тома курсов лекций Римана, опубликованные, к сожалению, в чужой обработке:

a) *Partielle Differentialgleichungen der Physik* („Диференциальные уравнения в частных производных математической физики", Hattendorf 1869);

b) *Schwere, Elektrizität, Magnetismus* („Тяготение, электричество, магнетизм", Hattendorf 1875);

c) *Elliptische Funktionen* („Эллиптические функции", Stahl 1899).

„Диференциальные уравнения" Римана были впоследствии переработаны Вебером; однако хорошо известная книга „Риман-Вебер" так мало похожа на работы самого Римана, что, изучая точку зрения Римана, мы должны оставить эту книгу в стороне.

Бернгард Риман (Bernhard Riemann) родился 17 сентября 1826 г., подобно Абелю, в семье сельского священника в Бреселенце, в провинции Ганновер. Его судьба во многом походит на судьбу Абеля, хотя его развитие шло медленнее, чем у Абеля. Риман был болезненен, страдал впоследствии чахоткой и

---

[1]) См. также некролог Шеринга (Schering, Gött. Nachr., 1867), перепечатанный в собрании сочинений Шеринга, т. 2, где находится еще несколько заметок о жизни Римана.

[2]) См. также отчет Нетера о новых находках, Gött. Nachr., 1909.

пал ее жертвой. При своих первых робких, неумелых выступлениях юный доцент, на которого мы, пришедшие к жизни и науке после него, взираем как на святого, был вынужден терпеть различные уколы и ироническое отношение своих коллег. Очень часто впадал он в мрачные настроения, доходившие до приступов меланхолии. И все же мы не находим у Римана ни следа действительной психической ненормальности, как, например, у Эйзенштейна, с которым Риман встречался в Берлине, будучи студентом, и который впоследствии страдал манией величия и манией преследования. Отгородившись от окружающего мира, живет он тихо своей исключительно богатой собственной жизнью. Риман представляет типичную фигуру гения; тихий и чудаковатый с внешней стороны, полный сил и исключительного размаха в сфере внутренней.

Научные интересы Римана были гораздо шире интересов Абеля, вдохновлявшегося только чистой математикой как таковой. Кругозор Римана охватывал математическую физику и даже всю философию естествознания с уклоном в сторону психологизма. Нужно отметить по этому поводу слова самого Римана[1]) (Werke, стр. 507 и сл.):

„Сейчас меня занимают преимущественно следующие работы:

1. Подобно тому, как это столь успешно сделано уже для алгебраических, показательных, круговых, эллиптических и абелевых функций, ввести мнимые величины также и в теорию других трансцендентных функций; я дал некоторые необходимейшие предпосылки в моей вступительной диссертации (см. эту диссертацию, п. 20).

2. В связи с этим находятся новые методы интегрирования диференциальных уравнений с частными производными, которые я уже с успехом применял ко многим физическим задачам.

3. Главная моя работа — новая трактовка известных законов природы; такое их выражение через другие основные понятия, которое дало бы возможность использовать экспериментальные данные о взаимодействии между теплотой, светом, электричеством и магнетизмом для исследования взаимной связи этих явлений. Я пришел к этому, изучая, главным образом, работы, с одной стороны, Ньютона и Эйлера и, с другой стороны, Гербарта (Herbart). О последнем замечу, что я почти вполне присоединяюсь к ранним исследованиям Гербарта, результаты которых изложены в его докторских диссертациях (22 и 23 октября 1802 г.). Однако от дальнейшего развития его концепций я должен отклониться в одном важном пункте, чем обусловлено расхождение и с его натурфилософией и с теми его законами психологии, которые связывают психологию с натурфилософией“.

Я обращаю особенное внимание на начало третьего абзаца. „Главная моя работа“, говорит Риман. Сам он, следовательно, считал свои натурфилософские концепции более

[1]) Все указания относятся ко второму изданию собрания сочинений.

важными, нежели работы по теории комплексных функций $f(x+iy)$, ставшие для нас классическими.

Во внешней жизни Римана нет крупных происшествий. В 1840—1842 гг. он посещал лицей (гимназию) в Ганновере, в 1842—1846 гг. гимназию св. Иоганна (Johanneum) в Люнебурге. Там в $19^1/_2$ лет он читал уже математических классиков, особенно Эйлера и Лежандра. В 1846 г. он прибыл в Геттинген сначала для изучения богословия; вскоре однако он переменил специальность и обратился целиком к математике. Он слушал часто лекции Штерна (Stern) который мне впоследствии сказал, что „Риман уже тогда пел, как канарейка". Удивительна и почти загадочна для нас близость Римана к научным идеям Гаусса. Риман не мог тогда много прослушать у 70-летнего Гаусса, который вообще немного читал. Юный, робкий студент безусловно не мог завязать также и личных отношений с Гауссом; Гаусс преподавал неохотно, не удовлетворял интереса большинства своих слушателей и был тогда вообще недосягаем. Несмотря на это, мы должны считать Римана учеником Гаусса, притом единственным его настоящим учеником, проникшим в сокровенные идеи Гаусса, как мы можем это теперь постепенно выяснить из его наследия: он, подобно Гауссу, искал связь функции $f(x+iy)$ с конформным отображением, с одной стороны, и с уравнением $\Delta u=0$ и различными смежными областями физики, — с другой. В качестве одного из примеров внутреннего контакта, существовавшего между обоими учеными, который не может быть непосредственно филологически доказан, приведу работы Римана о гипергеометрической функции, в которых он использовал ряд неопубликованных Гауссом идей.

К концу своего пребывания в Геттингене Риман занялся вопросами геометрии. Как раз тогда, в 1847 г., Листинг опубликовал свои „Vorstudien zur Topologie" („Предварительные исследования по топологии"). Тут было несколько впервые доказанных положений, составивших начало той науки, которую вместе с Риманом мы называем „Analysis situs" („Анализ положения" — топология) и которой много занимался также и Гаусс, как это видно из его бумаг. Штерн читал тогда о совсем других вещах; лекции Гаусса были посвящены в то время способу наименьших квадратов, и все же молодой Риман весьма интенсивно занялся геометрическими вопросами. Мы можем это объяснить только тем, что геттингенская атмосфера была тогда так насыщена геометрическими интересами, что оказала незаметное, но очень сильное воздействие на талантливого и восприимчивого Римана. Духовное окружение, в которое попадает человек, гораздо важнее и оказывает на него большее влияние, чем факты и конкретные знания, которые ему сообщаются.

К пасхе 1847 г. Риман уезжает в Берлин, где и остается два года (до 1849 г.). Там он слушает механику у Якоби и получает от последнего, правда косвенным образом, толчок к то-

му, чтобы от теории эллиптических функций перейти к изучению „абелевых функций", впрочем неизвестных самому Абелю. Вопрос об абелевых функциях стал тогда действительно актуальным. В 1846 г. ученик Якоби, Розенгайн (Rosenhain), получил большую премию Парижской академии за обращение эллиптического интеграла при $p = 2$. Правда, эта работа была опубликована лишь в 1851 г. (в серии „Savants étrangers"). В 1847 г. в журнале Крелля появляется важное сочинение Гепеля (Göpel) по этому вопросу. В 1849 г. в гимназических программах Браунсберга Вейерштрасс сообщает о полученном им обращении гиперэллиптического интеграла в общем виде и дает билинейные соотношения для периодов интегралов первого и второго рода. Мы видим, как здесь подготовлялась почва для Римана, как возникали его интересы, которым спустя годы (1857) суждено было вылиться в его блестящую работу по теории абелевых функций.

Кроме Якоби, Риман слушал также Дирихле. Якоби, конечно, возбудил живейший интерес у Римана, но Риман не перенял его методов. Для Римана Якоби был в слишком большой степени алгорифмиком. К Дирихле же Риман чувствовал глубокую внутреннюю симпатию, обусловленную сходством манеры их мышления. Дирихле любил уяснять себе теорему на какой-либо наглядной схеме и по возможности избегал длинных выкладок. Его приемы нравились Риману, и Риман ими широко пользовался. Во время своих занятий в Берлине Риман встретился с Эйзенштейном (род. в 1823 г.), тогда только еще получившим право преподавания в высшей школе, и беседовал с ним о введении комплексных величин в теорию функций. Эйзенштейн был безусловно талантлив в своем роде, но они не сошлись друг с другом. Эйзенштейн был в слишком большой степени человеком формулы, исходя всегда из выкладок и при помощи выкладок получая свои открытия. Он не мог охватить общих идей Римана о функциях комплексного переменного, основательно разработанных Риманом согласно Дедекинду еще осенью 1847 г., т. е. в возрасте 21 года.

На пасху 1849 г. $22^1/_2$-летний Риман вернулся в Геттинген, куда был тогда вновь приглашен В. Вебер. В лице Вебера Риман приобретает покровителя и отечески заботливого друга. Вебер распознал в робеющем студенте гения и приблизил Римана к себе. В 1850 г. Риман становится членом только что основанного Геттингенского физико-математического семинара, выдвигается на должность сениора (senior) и в качестве последнего привлекается Вебером к работе ассистентом физического практикума.

Сближение с Вебером становится все более тесным, притом не только с внешней стороны. Вебер пробудил в Римане глубокий интерес к математическому изучению природы, и веберова постановка вопросов оказала очень сильное влияние на работы Римана. К сожалению, упомянутые выше натурфило-

софские рассуждения Римана дошли до нас лишь в отрывках (см. Riemanns Werke, стр. 305 и сл.). По этим скудным документам мы можем судить, с какой огромной духовной самостоятельностью работал Риман; он создал себе свое собственное представление о мире, отклоняясь от идей Вебера.

Риман представляет себе пространство наполненным непрерывной материей, испытывающей воздействие тяготения, света и электричества. Он вводит повсюду понятие о распространении этих процессов, требующем определенного промежутка времени. Замечание об этих вещах, сопровождаемое настоятельной просьбой держать их в секрете, можно найти в одном частном письме Гаусса Веберу. Я снова спрашиваю: каким образом возникли эти идеи у Римана? Очевидно, мы здесь снова встречаемся с тем совершенно неопровержимым фактом какого-то скрытого и неуяснимого воздействия общей атмосферы на восприимчивый дух, о котором была речь выше. В некоторой степени Риман предвосхищает концепции Максвелла. Сюда относятся, например, вариационная проблема в оптике Мак-Кёллоха, которой я закончил предыдущую главу (Werke, стр. 538). Невероятно, чтобы Риман был тогда знаком с оригинальной работой Мак-Кёллоха.

Действие тяготения Риман представляет себе следующим своеобразным образом: материя, непрерывно заполняющая пространство, проникает с потенциалом скорости V в материальные точки, создающие тяготение, и превращается там в „мнимую массу“ (Geistesmasse).

Риман уже тогда искал связи между тяготением и светом, как видно из формулы, помещенной на той же стр. 538 в его собрании сочинений. Происхождение этой формулы для меня неясно, и я затрудняюсь сказать, что в этой формуле остается справедливым с точки зрения современных теорий.

И вот, в конце 1851 г., когда Риману было 25 лет, появляется его диссертация *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Grösse* („Основы общей теории функций комплексного переменного“, Werke, стр. 3 и сл.), к обстоятельному изложению которой мы еще вернемся и которая, как это ни странно, вначале не оказала никакого влияния.

Проходит еще почти три года, пока Риман, летом 1854 г., получает свое право преподавания, выступив с двумя блестящими работами воистину небывалой яркости. Это — его диссертация *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* („О представлении функций с помощью тригонометрических рядов“, Werke, стр. 227 и сл.) и лекция *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* („О гипотезах, лежащих в основании геометрии“, Werke, стр. 272 и сл.). Обе эти работы были опубликованы Дедекиндом лишь после смерти Римана в 1868 г. в Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaten, Göttingen, т. 13, и позже были перепечатаны без изменений в собрании сочинений Римана.

Трогательна повесть о том, с какими трудностями приходилось бороться юному доценту и какими малыми успехами он удовлетворялся. В октябре 1854 г. он сообщает своему отцу о том, что он осчастливлен большим количеством слушателей — их было восемь, а в ноябре пишет, что между ним и его слушателями начинает устанавливаться контакт и что его смущение исчезает. Потом Риман читал общий курс лекций о диференциальных уравнениях в частных производных, очень близко придерживаясь при этом Дирихле.

В 1855 г. умер Гаусс, и на его кафедру был приглашен Дирихле, как мы уже видели, познакомившийся с Риманом еще в Берлине. Теперь Риман, при поддержке Дирихле, решается избрать темой лекций область своих собственных исследований. Зимой 1855/56 г. и летом 1856 г. он читает лекции по теории функций комплексного переменного и в частности останавливается на теории абелевых и эллиптических функций. Для этих лекций нашлись три слушателя: Дедекинд, Шеринг, Бьеркнес. Летом 1856/57 г. Риман читает лекции на ту же тему, но в качестве специальных функций рассматривает теперь гипергеометрические ряды и родственные им функции.

Из этих лекций возникли большие публикации: *Theorie der Abelschen Funktionen* („Теория абелевых функций", Crelle, т. 54, 1857) и *Beiträge zur Theorie der durch die Gausssche Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ *darstellbaren Funktionen* [„Замечания к теории функций, представляемых рядом Гаусса $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$", Gött. Abh., т. 7, 1857]. Они подействовали как откровения и вызвали безоговорочное удивление всех математиков.

Эти лекции были частично повторены в следующих семестрах, но дальнейшие достижения, изложенные в этих новых лекциях, не были тогда опубликованы Риманом и дошли до нас в неполном виде; к этому мы еще вернемся (см. „Дополнения" Нетера и Виртингера к собранию сочинений Римана).

Осенью 1857 г. 31-летний Риман сделался экстраординарным профессором в Геттингене, вероятно по ходатайству Дедекинда, всегда с большой живостью его поддерживавшего. В 1859 г. он занял освободившуюся после смерти Дирихле должность ординарного профессора.

На годы 1857—1862 приходится расцвет творчества Римана; достаточно бросить беглый взгляд на перечень его работ, чтобы убедиться в этом. В 1859 г. появляется прославленная работа *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* („О количестве простых чисел, не превосходящих заданной величины"), являющаяся основным источником для многочисленных работ новейшего времени. Она была издана в ноябре 1859 г. в ежемесячнике Берлинской академии, корреспондентом которой Риман стал в том же году. Основой этой работы является так называемая ζ-функция; о ее нулевых значениях Риман высказал ряд предположений из которых не все еще доказаны, несмотря на упорнейшие попытки со стороны многих математиков.

Со смертью Дирихле усилилось влияние Вебера на Римана. Исполнение обязанностей ординарного профессора так, как их понимал Риман, определило возврат Римана в его лекциях и исследованиях к вопросам математической физики. Об этом свидетельствуют издания Гаттендорфа, страдающие, к сожалению, многими недочетами вследствие недостаточного понимания издателем гениальных идей Римана. О дальнейшей внутренней работе Римана говорит его статья, появившаяся в 1860 г. под названием *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* („О распространении плоских воздушных волн с конечными амплитудами“, Werke, стр. 157), а также его работа, представленная в 1861 г. в Парижскую академию, под названием *Über eine Frage der Wärmeleitung* („Об одном вопросе теории теплопроводности“, Werke, стр. 391), в которой Риман построил полный аппарат квадратичных диференциальных форм, употребляемый ныне в теории относительности.

Только три года мог Риман наслаждаться своей силой и величием. В 1862 г., вскоре после женитьбы, он в результате тяжелой простуды заболел. Трижды получал он, благодаря поддержке Вебера, государственные субсидии, давшие ему возможность побывать в Италии. Но болезнь не оставляла его. Он начал еще ряд различных научных работ, но был лишен возможности их кончить.

20 июля 1866 г. Риман умер в Селаске на Лаго Маджоре. Он похоронен не в Селаске, а в близлежащем селении Биганцола.

Обрисовав в общих чертах жизнь и деятельность Римана, перейду к более обстоятельному изложению его общей теории комплексных функций $f(x+iy)$ в том виде, в каком она была построена в его диссертации и развита в его последующих работах. К сожалению, здесь, как и вообще в этих лекциях, я могу дать только выдержки и вынужден, не вдаваясь в подробности, ограничиться указанием важнейших и наиболее характерных достижений.

Прежде чем характеризовать специально принадлежащую Риману теорию функций, я сделаю одно предварительное замечание, которое, весьма вероятно, покажется неожиданным: в теории функций Риман работал над многими и даже очень важными вопросами, не входящими в рамки его собственной теории. Назову:

1. Уже упомянутую выше статью о количестве простых чисел, не превосходящих заданной величины, вышедшую в 1859 г. „*Риманова дзета-функция*“ $\zeta(\sigma+it)$ определяется аналитическим выражением, именно бесконечным произведением. Это бесконечное произведение может быть преобразовано в определенный интеграл, значение которого можно вычислить путем изменения пути интегрирования. Этот способ рассмотрения совпадает с методами, развитыми в теории функций Коши.

Этими беглыми замечаниями по весьма важному и интересному вопросу о ζ-функции я и ограничусь. Я оставляю этот вопрос в стороне, ибо в нем не находят своего полного выражения особенности творчества Римана, которые мы хотим выявить; да и вообще я не стремлюсь к полноте в своем изложении.

2. Во второй части своих „Абелевых функций" 1857 г. Риман неожиданно включает в круг своих соображений *тэта-ряды* с p переменными; впоследствии в своих выкладках он не раз к ним возвращается. Это — родная стихия Якоби, в которой, однако, Риман действует вполне самостоятельно. Вообще Риман далек от всякой окостенелой однобокости, — он использует все, что находит, и привлекает к делу разнообразнейшие методы, способствующие разрешению и уяснению поставленных им проблем.

3. Риман использовал в своей теории функций *степенные ряды* $\mathfrak{P}(z-a)$, т. е. работал, так сказать, в том же направлении, что и Вейерштрасс. Тесная связь между функциями и степенными рядами была уже давно известна, и зачатки соответствующей теории относятся к значительно более раннему времени. Я хочу дать краткий очерк того, что открыл Риман. Лагранж в своей *Théorie des fonctions analytiques* берет ряд в качестве отправного пункта. Он называет аналитическими функции, допускающие разложение в степенной ряд, но при этом он только формально оперирует с рядом и вообще не занимается вопросом о сходимости. Ряд для него представляет только бесконечную последовательность коэфициентов; так же формально определяет он и производные. Впрочем эти положения Лагранжа являются еще и поныне предметом дальнейшей обработки. Термин „аналитическая функция", введенный Лагранжем, — я полагаю, что у Лагранжа он обозначал только „функции, употребляемые в анализе", — сохранился до наших дней, хотя содержание этого понятия сделалось совсем иным.

В 1812 г. Гаусс рассматривал вопрос о сходимости на примере гипергеометрического ряда.

Коши в своем *Cours d'analyse* 1821 г. поставил общий вопрос о разложимости функций в ряды и показал, что всякий степенной ряд имеет круг сходимости в комплексной области. Об этом я уже говорил подробнее в первой части этих лекций.

Великой заслугой Вейерштрасса — я несколько забегаю вперед — являются развитие и одухотворение идей Лагранжа, остававшихся до тех пор лишь формальным построением. В основу своих рассуждений Вейерштрасс кладет — ниже я это разберу подробно — ряд $\mathfrak{P}(z-a)$, сходящийся в некоторой области; он называет его „элементом функции" и, согласно своему принципу „аналитического продолжения", он последовательно присоединяет друг к другу такие элементы, круги сходимости которых имеют общие части, причем в этих общих частях значения этих элементов совпадают. „Функция" представляется тогда как совокупность всех аналитических продолжений, исходящих

из какого-либо элемента. Таким образом становится ясной разница между точкой зрения Римана и точкой зрения Вейерштрасса. То, что у Римана является побочным вспомогательным средством, играет у Вейерштрасса роль основного принципа, используемого для дальнейшего развертывания понятий теории функций путем выкладок.

После этого отступления вернемся снова к Риману и попытаемся вкратце проследить за ходом его мысли в том виде, в каком он представляется нам в обеих его больших работах 1857 г., имевших исключительный успех („Абелевы функции" и „Теория гипергеометрических рядов").

Во-первых, *определение* функции $f(z)$ комплексного аргумента: $w = u + iv$ называется функцией комплексного аргумента $x + iy$, если кроме простейших требований непрерывности и диференцируемости удовлетворяются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

из которых следует $\Delta u = 0$ и соответственно $\Delta v = 0$.

Ныне эти диференциальные уравнения называют с замечательной исторической добросовестностью *уравнениями Коши-Римана,* ибо они имеются еще у Коши. Однако эти уравнения гораздо старше; их можно встретить уже в середине XVIII века у Даламбера, а возможно даже и ранее. Риман, следовательно, их не открыл. Важно то, что Риман, положив эти уравнения в основу, нашел их связь с математической физикой и с геометрией. Объясним это подробнее.

Мы можем вместе с Гельмгольцем назвать *u потенциалом скорости* движения жидкости (случай несжимаемой жидкости) в плоскости x, y. При этом $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ — компоненты скорости, а v — соответствующая *функция потока.*

В разнообразнейших областях математической физики того времени встречаются эти величины u и v с различнейшими значениями. Если говорят о стационарном электрическом токе, то u называют электростатическим потенциалом (со времени Кирхгофа; ранее, у Ома, она называлась напряжением); если говорят о стационарном движении тепла, то u — температура (такое употребление можно найти уже у Фурье).

С другой стороны, возможно и геометрическое истолкование: в силу вышеприведенных диференциальных уравнений значение $\frac{d\,(u + iv)}{d\,(x + iy)}$ зависит только от точки $x + iy$, но не зависит от направления $dx + idy$, т. е. отображение плоскости x, y на плоскость u, v есть отображение „*конформное*". Все приведенное Риман использует, как это сделал до него Гаусс. Но вместе с тем оно явилось для Римана источником дальнейших размышлений, в которых он стремился разрешить вопросы, выдвигаемые той или иной точкой зрения.

Я мог бы подвести только что сказанное под общее положение Уже много раз так случалось, что приложения оплодотворяли теорию. Великолепный тому пример: возникновение диференциального исчисления. Понятия движения точки и скорости движения были налицо a priori. Отсюда Ньютон абстрагировал свою „флюксию". Точно так же было совершенно очевидно существование кривой и касательной к ней в какой-либо точке. Надо было найти способы их вычисления. Отсюда лейбницевы dx и dy. Мы видим, что первоначальные положения, из которых вырос анализ бесконечно малых, имеют свои корни в области интуиции.

Точно так же интуиция и опыт сделали для Римана с самого начала непосредственно ясным существование простых потоков на поверхностях, существование конформных отображений поверхностей друг на друга. И именно это активно способствовало его творчеству. Здесь мы не можем касаться сомнений в том, достаточно ли логически обоснована эта манера, а также выяснять, в каком отношении она не обоснована. Сам Риман впрочем впоследствии искал разрешения этих сомнений. Но об этом потом. Сейчас я намерен описать ход развития общих идей Римана в теории функций.

Аналитическая функция у Римана — это функция, получающаяся из элемента функции, заданного в некоторой начальной области, путем непрерывного продолжения с помощью вышеприведенных диференциальных уравнений Коши-Римана.

Это определение по существу в точности совпадает с определением Вейерштрасса. Но определение Римана оставляет бо̀льшую свободу в смысле выбора нужных аналитических средств. Во время написания своей диссертации Риман, конечно, не имел четкого представления о важности своей исходной точки зрения. Все же в своей диссертации он говорит, „что... положенное здесь в основу понятие функции комплексного переменного вполне совпадает с понятием зависимости, выражаемой с помощью каких-нибудь действий над величинами" (Dissertation, Nr 20, Werke, стр. 39), в то время как мы знаем, что пригодность его определения простирается лишь столь же далеко, как и определения при помощи степенных рядов, тогда как выражение, определенное посредством других вычислительных операций, может иметь совсем другие свойства. Вообще мы не должны подходить к работам Римана с требованиями строгой логичности, как это можно делать относительно построений Вейерштрасса. Риман ценен в гораздо большей степени своим идейным богатством и глубиной своих взглядов, всегда выделяющих самое важное.

Теперь я покажу, как из риманова определения аналитической функции и из априорного пространственного предста-

вления создалось важнейшее вспомогательное средство — геометрическая интерпретация.

Продолжая функцию различными путями, мы будем получать для одного и того же $x+iy$ различные значения $u+iv$. Отсюда создалась у Римана, имевшего всегда перед глазами конформные отображения, идея *римановой поверхности*, многократно покрывающей плоскость или часть плоскости.

Трудности, представлявшиеся другим исследователям при столкновении с многозначными функциями, были преодолены. Действительно, на римановой поверхности можно точно так же оперировать, как и на обычной плоскости, например можно изменять путь интегрирования и мн. др. Возьмем в качестве примера свойство периодичности эллиптического интеграла первого рода

$$u=\int\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}},$$

уяснение которого представляло прежде столько трудностей для математиков. Риман, на основе своих новых представлений, находит поразительно простой и убедительный результат: „параллелограм периодов плоскости переменного u есть конформное отображение соответствующим образом разрезанной римановой поверхности многозначной функции

$$\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}“.$$

Начинающий заниматься римановыми поверхностями встречается с большими трудностями: существенную роль играют „точки ветвления“ (Windungspunkte), в которых сходятся различные „листы“, а не линии пересечения листов, исходящие из этих точек. Эти линии могут быть произвольно смещены, лишь бы концы их оставались неподвижными; вообще они возникают лишь вследствие того, что мы непроизвольно оперируем в трехмерном пространстве. Впрочем в своих „Абелевых функциях“ Риман изменил терминологию: вместо „листа“ он употребляет термин „ветвь“, вместо „Windungspunkt“ — „Verzweigungspunkt“, вместо „Durchsetzungskurve“ (линия пересечения) — „Verzweigungsschnitt“ (линия разветвления).

Если $\zeta=f(z)$, то, вообще говоря, не только ζ многозначно относительно z, но и z многозначно относительно ζ. Тогда любой части поверхности над плоскостью z, ограниченной как угодно, соответствует взаимно однозначно и, вообще говоря, конформно некоторая часть поверхности над плоскостью ζ.

Здесь мы соприкасаемся с новой геометрической дисциплиной — *топологией*.

Взаимно однозначное конформное отображение есть частный случай взаимно однозначно непрерывного отображения. Теперь возникает вопрос о том, в каких случаях две поверхности могут быть непрерывно и взаимно однозначно отображены друг на друга. Отмечу лишь следующее: для поверхности характерны

число p — наибольшее число возможных одновременных непересекающихся замкнутых сечений („Rückkehrschnitte"), не разделяющих поверхности на части, и μ — число отдельных кривых, на которые распадается граница поверхности.

На поднятый выше вопрос я могу теперь коротко ответить так: две поверхности могут быть взаимно однозначно и непрерывно отображены одна на другую в том и только в том случае, если оба числа μ и p для обеих поверхностей совпадают [1]). Эта основная теорема нигде явно не сформулирована Риманом, однако он ею пользуется.

В частности, замкнутая поверхность, т. е. такая, для которой $\mu = 0$, вполне характеризуется в топологическом смысле числом p. Для того чтобы замкнутую поверхность с данным p превратить в поверхность, распадающуюся при проведении на ней любого замкнутого сечения и имеющую одну единственную нераспадающуюся граничную кривую, необходимо $2p$ сечений.

Если, в частности, $\zeta = f(z)$ — *алгебраическая функция*, т. е. если ζ и z связаны алгебраическим уравнением $F(\overset{n}{\zeta}, \overset{m}{z}) = 0$ (обозначения по Риману), то риманова поверхность, покрывающая всю z-плоскость переменного n листами, является замкнутой поверхностью, если правильно учитывать бесконечно удаленные точки. В частности, эта поверхность состоит из одного куска, если $F = 0$ не разлагается на множители в области рациональности $R(z)$ [2]); эта теорема может быть обращена. Полученный результат важен сам по себе. Для таких замкнутых поверхностей наряду с равенством $\mu = 0$, с которым мы встречались выше, имеет место следующее равенство:

$$p = \frac{w}{2} - n + 1,$$

где w — число точек ветвления с учетом их кратности. Это число p Клебш впоследствии назвал „*жанром*" (Geschlecht) поверхности или уравнения $F(\zeta, z) = 0$.

В качестве первого важного результата мы имеем решение вопроса о взаимно однозначном соответствии между алгебраическими уравнениями $F(\zeta, z) = 0$ и, в частности, имеем теорему: уравнения $F(\zeta, z) = 0$ могут быть непрерывно и взаимно однозначно преобразованы друг в друга тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое p.

Риман не дал доказательства этой теоремы, ее справедливость вытекала для него из наглядного представления.

Таким образом Риман установил первую характерную особенность всех алгебраических уравнений, получающихся одно из другого путем взаимно однозначного или, говоря языком фор-

---

[1]) Здесь молчаливо предположено совпадение „ориентации". *Прим. ред. нем. изд.*

[2]) То-есть в области рациональных функций от z. *Прим. ред.*

мул, бирационального преобразования: все эти уравнения обязательно имеют некоторый числовой инвариант, именно число p. Далее, эти образы с одним и тем же p отличаются друг от друга существенными, входящими в них постоянными, так называемыми „модулями". Число этих модулей по Риману равняется нулю для $p=0$, единице для $p=1$ и $3p-3$ для $p>1$. Мы не можем здесь останавливаться подробнее на этом важном вопросе, но вернемся к нему в главе седьмой.

Мы хотим обрисовать теперь влияние математической физики на риманову теорию, в частности в вопросе об алгебраических функциях и их интегралах.

В качестве наилучшего вступительного примера я изберу, следуя классической традиции, вопрос о теплопроводности по Фурье.

Пусть температура $u=u(s)$ задана в виде непрерывной функции от s вдоль границы некоторой однолистной области; при этом не исключены образование и поглощение тепла внутри этой области, — предполагается только, что алгебраическая сумма создаваемого $(+)$ и поглощаемого $(-)$ внутри области тепла равна нулю. Так учит физический опыт. Здесь возникает первая краевая задача, которую французы назвали, притом исторически неправильно, „проблемой Дирихле". Ее можно формулировать так: „найти функцию u, если даны ее граничные значения и определенные, физически возможные точки разрыва непрерывности". Задача допускает одно и только одно решение.

Риман использует этот ход мыслей для теории функций, считая u действительной частью функции $f(x+iy)=f(z)=$ $=u+iv$ и представляя мнимую часть v заданной диференциальными уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

т. е. выражая v через u с помощью формулы

$$v=\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right).$$

При этом имеет место первая теорема существования: если заданы непрерывные граничные значения u, то существует функция $f=u+iv$, действительная часть которой непрерывно приближается к заданным граничным значениям.

Это положение, которое Риман позаимствовал, он значительно расширил: вместо имеющей границу однолистной области он рассматривает в одних случаях имеющие границу области многолистной римановой поверхности, а в других случаях — всю замкнутую риманову поверхность в целом; граничные значения u он задает (в несколько неопределенной формулировке)

любыми наперед указанными соотношениями между значениями функций u и v.

Проследить подробнее ход его мыслей здесь нет возможности. Отмечу лишь некоторые результаты, которые получаются у Римана, так сказать, при первом же штурме передовых позиций учения об алгебраических функциях и их интегралах.

Действительно, по его собственному свидетельству, Риман нашел их в самом начале, когда он приступил к своей диссертации зимой 1851/52 г. Это — те самые результаты, которые я развил в моем сочинении 1881 82 г. о римановой теории алгебраических функций и их интегралов (Ges. Abh., т. 3, стр. 498 и сл.) и подробней в моих литографированных лекциях о римановых поверхностях (1891/92 г.), причем я повсюду держу связь с индуктивно-физическим мышлением, которое считаю основным источником римановых построений. Я особенно подчеркиваю данное там изложение, правда несколько отклоняющееся от построений самого Римана. В моем изложении легко видеть, как Риман использовал физическую интерпретацию для получения теорем существования для функций на замкнутых сколь угодно многолистных римановых поверхностях.

Пусть, следовательно, дана замкнутая n-листная поверхность над плоскостью z. В основу дальнейших построений положено представление о римановой поверхности как об однородном проводнике электричества. Это легко осуществить, обложив рассматриваемую поверхность станиолем и вставив в линии пересечения листов для изоляции их друг от друга гребенки, с таким расчетом, чтобы сопротивление в цинке равнялось сопротивлению в однородной станиолевой обкладке. Пусть в точках A_1 и A_2 будут помещены полюсы гальванической батареи определенного напряжения. Возникает ток, потенциал которого u однозначен, непрерывен и удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ на всей поверхности, кроме точек A_1 и A_2, являющихся точками разрыва функции u. Последняя ведет себя как $\ln r_1$ в окрестности точки A_1 и как $\ln r_2$ в окрестности точки A_2.

Таким образом мы получим новую теорему существования, которую можно сформулировать так: на всякой замкнутой римановой поверхности существует потенциальная функция u, всюду непрерывная, кроме двух заранее выбранных точек, в которых u, согласно заранее поставленному условию, становится логарифмически-бесконечной.

Из этого u мы, пользуясь равенствами

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

хотим получить $u + iv$. Это очень легко сделать, если сначала рассмотреть соответствующую риманову поверхность. Разрежем ее $2p$ поперечными сечениями так, чтобы уничтожить возможность не разбивающего замкнутого сечения (Periodenweg), не рассекающего поверхность на части; после этого соединим точки

A_1 и A_2 еще одним сечением. В раскроенной таким образом поверхности функция v однозначна и непрерывна; значения функции

$$v = \int_{z_0}^{z} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

на противоположных краях отдельных сечений отличаются друг от друга на постоянное слагаемое, и при приближении z к точке A_1 функция v ведет себя как угол между вектором $\overline{zA_1}$ и положительным направлением оси x, а при приближении к точке A_2 — как взятый со знаком минус угол между вектором $\overline{zA_2}$ и положительным направлением оси x, т. е. значение функции v на одном крае $\overline{A_1 A_2}$ на 2π больше, чем на противоположном крае этого сечения.

Я резюмирую: если дана замкнутая риманова поверхность и на ней отмечены две каких-либо точки A_1 и A_2, связанные какой-нибудь кривой, то на этой поверхности, разрезанной $2p$ сечениями, существует одна и только одна однозначная ветвь функции $u + iv$, обладающая следующими свойствами: она непрерывна везде, кроме точек A_1 и A_2, в которых она логарифмически-бесконечна, и в то время как ее действительная часть однозначна на всей поверхности и на ее границах, ее мнимая часть дает в соответствующих точках противоположных краев соединительной кривой $\overline{A_1 A_2}$ модуль периодичности 2π, точно так же на обоих краях каждого из $2p$ поперечных сечений она имеет модули периодичности P_i, которые нужно вычислить.

Функцию Π_{A_1, A_2}, получающуюся из построенной таким путем функции $u + iv$ непрерывным продолжением с помощью переходов через различные сечения, называют, по принятой в теории эллиптических интегралов терминологии, „интегралом третьего рода“.

После того как это первое доказательство существования получено, наше дело в основном уже сделано. Можно образовать „интегралы второго рода“, т. е. такие, которые бесконечны только в одной точке и имеют в ней полюс, где они ведут себя как $\frac{1}{z-a}$; далее можно образовать „интегралы перого рода“, нигде не обращающиеся в бесконечность. Можно, наконец, перейти к „алгебраическим функциям на поверхности“ различными путями: или соединяя интегралы первого и второго рода так, чтобы модули периодичности обратились в нуль, или просто диференцируя $\frac{d\Pi}{dz}$ и т. д.

В самом деле, можно показать, что такие функции ζ, которые однозначны на рассматриваемой n-листной поверхности и обладают только полюсами, связаны с z алгебраическим уравнением $F(\overset{n}{\zeta}, \overset{m}{z}) = 0$. Таким образом мы приходим к тому, что

всякой n-листной римановой поверхности соответствуют алгебраические функции и интегральные функции, и синтетически строя эти функции, мы получаем ясное представление об их взаимной связи.

А так как мы уже знаем, что всякому алгебраическому уравнению $F(\zeta, z) = 0$ соответствует n-листная риманова поверхность, то этим положено начало общему учению об алгебраических функциях и их интегралах („абелевы интегралы").

Я лишен возможности изложить этот вопрос подробнее и хочу здесь лишь дать почувствовать тот факт, что Риман, в силу своеобразия своего мышления, подошел к рассмотренным видам функций со стороны, совершенно отличной от той, с какой подходили до него. И именно этому он в первую очередь обязан теми исключительными успехами, которых он достиг в этой области.

Самым важным, конечно, является то, что, согласно римановой теории, всякой римановой поверхности приводится в соответствие определенный „класс" („поле") алгебраических функций, и притом только один. „Классом" алгебраических функций Риман называет совокупность функций $R(\zeta, z)$, выражаемых рационально через одни и те же ζ и z; термин „поле" введен впоследствии Дедекиндом. Эту теорему другим способом вообще нельзя было получить. В этом отношении теория Римана и в дальнейшем сохраняет преимущества перед всеми другими теориями, исходящими из уравнений $F(\zeta, z) = 0$. К этому мы еще не раз будем возвращаться.

После этого беглого обзора перейдем к обоснованию основных положений. Я описал, как возникли в фантазии Римана его фундаментальные идеи из наглядных физических представлений. Сейчас я покажу, как Риман, примыкая к Дирихле, подкрепил свои интерпретации одним положением, относящимся к области вариационного исчисления.

Дирихле не был первым, привлекавшим соображения вариационного исчисления к доказательствам теорем о существовании; аналогичные методы доказательств встречаются уже у Гаусса в 1840 г. и В. Томсона в 1847 г. Но Риман перенял этот метод у Дирихле и назвал его поэтому, не заботясь об исторической истине, *„принципом Дирихле"* [1]).

Однако Риман не только перенял и применил готовые результаты, — он внес в них много нового. Заслугой Римана является распространение этого принципа на потенциалы, заданные не на однолистной плоскости, а на римановой поверхности, причем заранее задаются разрывы, а вдоль поперечных сечений — модули периодичности искомой функции. Для лучшего освещения сути дела мы не будем здесь касаться всех этих

---

[1]) Ср. выше стр. 133 и 277.

обобщений и ограничимся простейшим случаем: краевой задачей для однолистного круга.

Итак, пусть заданы краевые значения $U(\psi)$ как функция угла ψ. Чтобы избежать сложных выкладок, примем, что $U(\psi)$ непрерывная функция от ψ. Тогда дело сводится к доказательству следующей теоремы существования: внутри круга существует одна и только одна непрерывная функция u, непрерывно приближающаяся к заданным краевым значениям и удовлетворяющая уравнению $\Delta u = 0$.

Поставим теперь задачу вариационного исчисления, решение которой может быть формулировано точно так, как этого требует предыдущая теорема. Именно, рассмотрим интеграл

$$\int\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy,$$

распространенный на площадь круга, причем u непрерывно приближается к заданным краевым значениям и кроме того функция u должна быть такой, чтобы интеграл имел смысл. Так как значения интеграла не могут быть отрицательными, то существует неотрицательная нижняя грань значений интеграла для всех „возможных“ u. При этом следует добавить требование, чтобы интеграл не обращался в бесконечность для всех u, что может случиться, как это впоследствии заметил Адамар, при особо злокачественных краевых значениях $U(\psi)$. Отсюда заключали дальше, что эта граница достигается при некотором „допустимом“ u, т. е. что существует такое непрерывное u, принимающее на границе заданные краевые значения, что интеграл

$$\int\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy$$

становится минимальным, т. е.

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy = 0.$$

Тогда уравнение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

неизбежно имеет место как необходимое условие обращения в нуль первой вариации.

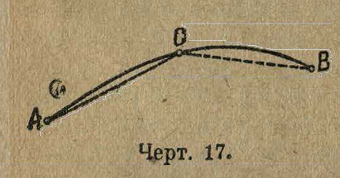
Таков ход рассуждений, считавшийся прежними математиками убедительным, некритически воспринятый Риманом под именем „принципа Дирихле“ и развитый им соответственно его целям.

Вейерштрасс первый подверг критике принцип Дирихле (опубликовано только в 1869 г. в Berliner Monatsberichten, Weierstrass, Werke, т. 2, стр. 49)[1]). Он показал, что этот ход рассуждений неверен или по крайней мере недостаточен. Несомненно,

[1]) Enzykl., II, A 7 b, сноска 157, стр. 494.

что совокупность всех непрерывных и диференцируемых функций u, принимающих на границе заданные краевые значения, имеет в качестве нижней грани некоторую функцию u_0, но ни в коем случае нельзя считать само собой очевидным и принимать без доказательства, что эта функция u_0 сама также является непрерывной и диференцируемой функцией.

Для обоснования этого возражения возьмем простейший пример, приводимый ныне в элементарных курсах вариационного исчисления: требуется найти среди всех кривых с непрерывной кривизной, идущих от точки A к точке B через точку C, такую кривую, длина которой была бы наименьшей (черт. 17). „Нижней гранью" всех „возможных", сравниваемых здесь между собой линий является ломаная, состоящая из двух прямолинейных отрезков $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$; однако непрерывность кривизны этой линии нарушена в точке C. Следовательно, нижняя грань не принадлежит к классу допустимых линий, и таким образом совсем не очевидно, что всякая вариационная проблема должна иметь решение, как это раньше молчаливо предполагалось.



Черт. 17.

Благодаря такой критике принципа Дирихле со стороны Вейерштрасса отпала очевидность, на которую ссылался Дирихле, а вместе с ним и Риман.

Римановы теоремы существования повисли в воздухе.

Любопытно проследить, как отнеслись в дальнейшем математики к критике Вейерштрасса и к римановым теоремам существования.

Большинство математиков отвернулось от Римана. Они не доверяли теоремам существования, которых критика Вейерштрасса лишила их математической обоснованности. Они пытались спасти положение тем, что исходили в своих исследованиях об алгебраических функциях и их интегралах попрежнему из заданного уравнения $F(\zeta, z) = 0$. Мы вернемся вскоре к этому направлению и остановимся на нем несколько подробнее. Как характерный для этого течения взгляд процитирую здесь одно положение из большого реферата Брилля и Нетера „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit" („Развитие теории алгебраических функций от древности до наших дней"), напечатанного в годовом отчете Немецкого математического общества: „В такой обобщенности становящееся неуловимым и улетучивающимся понятие функции не допускает более никаких доступных проверке заключений" (Jahresbericht der D. M. V., т. 3, стр. 265, 1894).

Этим однако отвергается центральная риманова теорема существования для алгебраических функций и на ее место водворяется пустота.

Сам Риман придерживался совсем иного мнения. Конечно, он полностью признавал законность и справедливость критики

Вейерштрасса, но он, как это мне рассказывал Вейерштрасс, говорил, что „он использовал принцип Дирихле лишь как удобное, оказавшееся под руками, вспомогательное средство, — его теорема все-таки верна“. Вейерштрасс сам тоже был в этом твердо убежден. Он побудил своего ученика Шварца (H. A. Schwarz) основательно изучить римановы теоремы существования и поискать других доказательств их, что тому вполне удалось. К этому мы еще вернемся.

Совершенно иную позицию заняли физики. Они отнеслись отрицательно к критике Вейерштрасса. Гельмгольц ответил мне на вопрос, с которым я как-то раз к нему обратился, так: „Для нас, физиков, принцип Дирихле остается доказательством“. Таким образом, он делал определенное различие между доказательством для физиков и доказательством для математиков; вообще физики не заботятся о математических тонкостях, для них достаточна и „очевидность“. И хотя впоследствии Вейерштрасс показал возможнось существования непрерывной функции, не имеющей производной, однако до сих пор один из выдающихся представителей математической физики учит: „Закон мышления гласит, что всякая функция линейна на бесконечно малом интервале“.

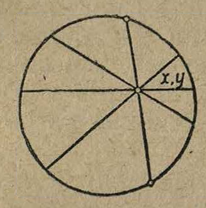
Я сам работал над тем, чтобы вскрыть основу взгляда физиков на значение математической строгости. Как я показал подробно в своих лекциях о приложениях диференциального и интегрального исчислений к геометрии, изданных Мюллером (Müller) в 1901 г., суть дела заключается в том, что физики вследствие односторонней привычки представляют себе все с точки зрения приближенной математики, т. е. с точностью до определенного, всякий раз установленного количества десятичных знаков. Физическая точка — это очень малое пятно; физическая кривая — очень узкая полоса. Тем охотнее я привел различные мнения о критике Вейерштрасса для того, чтобы показать, как медленно прокладывают себе дорогу математические идеи.

Теперь я перейду к Шварцу, который, вооружившись критикой Вейерштрасса, сумел обосновать фундаментальные предложения, о которых идет речь. Прежде чем изложить суть дела, я приведу несколько биографических данных.

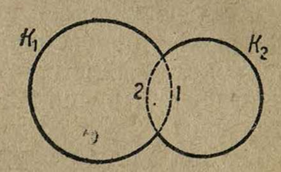
Г. А. Шварц (H. A. Schwarz) родился в Гермсдорфе, в Силезии, в 1843 г.; он учился с 1860 г. в Берлине в промышленной академии, в которой — это исторически важный факт — Вейерштрасс читал тогда диференциальное и интегральное исчисления. Там он сдал экзамен на звание „Gewerbelehrer“ (учитель профессиональной школы); в настоящее время такого рода экзамены отменены. Шварц получил докторскую степень в Берлине в 1864 г., получил право преподавания в высшей школе там же в 1866 г.; в 1867 г. он занял должность экстраординарного профессора в Галле; в 1869 г. — ординарного профессора в швейцарском государственном политехни-

куме в Цюрихе; в 1875 г. он приезжает в Геттинген и в 1892 г. преподает в Берлине в качестве преемника Вейерштрасса. Время его пребывания в Цюрихе отмечено наибольшей продуктивностью в его собственных работах и особенно в тех его исследованиях, которые нас в настоящий момент интересуют. Последние были опубликованы в 1869/70 г. в Züricher Vierteljahrsschrift и в 1870 г. в Berliner Monatsberichten.

Основной ход мыслей Шварца таков: краевую задачу для площади круга можно разрешить непосредственно при помощи формулы, данной Пуассоном и впоследствии названной, согласно терминологии Шварца, интегралом Пуассона. Шварц дал прекрасную геометрическую интерпретацию этому интегралу (см. черт. 18). Пусть заданы непрерывные краевые значения U, и мы разыскиваем значение искомой непрерывной, непрерывно



Черт. 18.



Черт. 19.

приближающейся к заданным краевым значениям и удовлетворяющей уравнению $\Delta u = 0$ функции в произвольной точке x, y, лежащей внутри круга (точки разрыва внутри области явно исключены). Для этого меняем местами заданные краевые значения в точках, диаметрально противоположных по отношению к точке x, y, т. е. в точках, лежащих на концах хорд, проходящих через x, y, и берем среднее этого нового распределения значений.

Полученный таким путем результат может быть распространен и на область, состоящую из двух пересекающихся кругов (см. черт. 19) при помощи комбинаторного приема, употреблявшегося еще Мерфи (Murphy). Рассматривают заданные непрерывные значения на K_1 совместно с произвольными значениями на дуге 1; тогда по предыдущему можно вычислить значение на дуге 2. Затем рассматривают заданные значения на K_2 и вычисленные на дуге 2 и по ним вычисляют новые значения на дуге 1. Эти новые вычисленные значения на дуге 1 рассматривают совместно с заданными на K_1 и вновь вычисляют значения на дуге 2. Если продолжать этот процесс, то можно заметить, что он быстро сходится и приводит к единственной функции, удовлетворяющей в области данных двух кругов уравнению $\Delta u = 0$ („*Процесс альтернации*").

Затем добавляют третий круг и т. д. и т. д.; таким образом, все более расширяют часть плоскости (или многолистной римановой поверхности), на которой можно разрешить краевую задачу.

Аналогичные исследования К. Неймана [1]), начатые в 1870 г., изложены в окончательной форме во втором издании его „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale" („Лекций по римановой теории абелевых интегралов", 1884). Таким образом, римановы теоремы существования спасены трудами Шварца и Неймана.

Моя точка зрения на эти проблемы была с самого начала иной. Я не знал лично Римана и, будучи учеником Плюкера и Клебша с 1872 г., когда я уже был в Эрлангене, стал постепенно вникать в идеи Римана. Я являюсь, таким образом, как бы „экстерном" в отношении римановой школы, а экстерны, как известно, если берутся за какое-нибудь дело, то работают с особенным рвением, ибо к работе их побуждает только глубокий внутренний интерес.

Вскоре я пришел к убеждению, что вместо того, чтобы все свое внимание уделять повторным попыткам уложить теоремы существования в систему других умозаключений, нужно немедленно заняться их использованием. Таким образом, я сделался сначала в своих работах об эллиптических модулярных функциях главным поборником римановой точки зрения; этого я коснусь при случае впоследствии. Одной из таких работ является мое сочинение 1881/82 г.

Но самыми красивыми и самыми неожиданными результатами в направлении обоснования римановых теорем существования мы обязаны Гильберту. В юбилейной статье 1901 г., посвященной 150-летию Геттингенского научного общества, он показал, что можно спасти принцип Дирихле, опираясь не на вариационное исчисление вообще, а на особые свойства (существенно положительной) функции, стоящей под знаком интеграла. Метод Гильберта, представляющий мощный аппарат математических доказательств, не обладал еще в этой первой публикации достаточной степенью общности; впоследствии он был значительно упрощен и глубоко разработан учениками Гильберта Курантом, (Courant), Вейлем (Weyl) и др., настолько, что этот метод составил эру в развитии вариационного исчисления. В процессе этого развития римановы теоремы существования были доказаны со всей общностью [2]).

В итоге можно сказать, что Риман был прав, отстаивая свои теоремы существования, несмотря на критику Вейерштрасса, несмотря на непризнание большинства математиков и несмотря на то, что доказательства этих теорем были тогда действительно далеко не безупречными. Эти теоремы должны быть отнесены к глубочайшим и величайшим достижениям математической науки во все времена.

---

[1]) См. стр. 260.

[2]) В связи с этим необходимо указать на примыкающие к Гильберту итальянские работы Г. Фубини (G. Fubini), Э. Леви (E. E. Levi), Б. Леви (B. Levi) и др. *Прим. ред. нем. изд.*

Замечательна однако судьба принципа Дирихле. Старые математики, в частности Дирихле, считали его полноценным средством доказательства; Риман плодотворно использовал его затем он был ниспровергнут Вейерштрассом и оставался скомпрометированным в течение десятилетия, с тем чтобы вновь быть спасенным Гильбертом. На этом примере мы видим, как само математическое познание, каким бы объективным оно ни казалось, подвергается различным переменам. Я особенно подчеркиваю это без желания оскорбить математику или поставить под сомнение справедливость ее основных положений и законов.

Покончив с критикой римановых теорем существования и с историей их спасения, я хочу сказать еще кое-что о римановой теории комплексных функций.

Мы видели, что Риман обстоятельно изучал абелевы интегралы. Абелевы интегралы можно рассматривать как решения простейшего диференциального уравнения $\frac{dy}{dz} = \zeta$, где ζ — алгебраическая функция от z, принадлежащая заданной римановой поверхности. Всю теорию абелевых интегралов можно, в соответствии с этим, считать специальной частью *теории общих линейных диференциальных уравнений n-го порядка*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y + P = 0,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n, P$ должны быть функциями на одной и той же римановой поверхности (алгебраическими функциями одного и того же „поля"). Методом вариации постоянных и с помощью соответствующих квадратур этот общий случай приводится, как известно, к так называемомоу однородному уравнению

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0.$$

На исследовании теоретико-функциональных особенностей решений этого уравнения и концентрировал Риман свое внимание. Это составляет следующую высшую область трансцендентных функций. К сожалению, я вынужден в настоящих лекциях за недостатком времени оставить совершенно в стороне „Определенные интегралы".

Я снова попытаюсь дать лишь общий очерк работы Римана, тем более, что в последнее десятилетие появилась обширная литература по этим вопросам.

Оставим и здесь все усложнения в стороне и разберем простейший типичный случай: положим, что $p_1, p_2, \ldots, p_n$ рациональные функции от z и будем, таким образом, оперировать в однолистной плоскости.

Известно, что общее решение y может быть составлено из n подходящих частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

причем, как бы мы ни выбрали $y_1, y_2, \ldots, y_n$, они, вообще говоря

ведут себя аналитически, т. е. разлагаются по положительным степеням $z-a$ в окрестности произвольной точки a, за исключением особых точек, т. е. тех точек, в которых одна или несколько из функций $p_1, p_2, \ldots, p_n$ обращаются в бесконечность. В этих точках поведение $y_1, y_2, \ldots, y_n$ требует особого изучения, и основная задача заключается в исследовании вида разложения соответствующих $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в окрестности особой точки.

Обведем какое-либо частное решение вокруг особой точки по замкнутому пути; его значение при этом изменится, хотя оно останется решением. Но все решения могут быть представлены как линейные комбинации n частных решений. Выразив в явной форме новые решения, полученные обходом вокруг особых точек, получим следующую систему формул:

$$y'_1 = c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n,$$
$$y'_2 = c_{21}y_1 + \ldots + c_{2n}y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y'_n = c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n.$$

Итак, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ подвергаются определенным *линейным преобразованиям*, и центральным является вопрос о *„группе монодромии“*, т. е. о всех линейных преобразованиях, которым подвергаются $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при всевозможных обходах вокруг особых точек. Важность понятия „группы монодромии“ выявлена Эрмитом (Comptes rendus, 1851; Oeuvres, т. 1, стр. 276). Этот термин обозначает „группу преобразований, которым подвергается система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вдоль такого замкнутого пути, вдоль которого $y_1, y_2, \ldots, y_n$ остаются монодромными [1]“.

В этой области Риман опубликовал одну только, уже упоминавшуюся мною работу *Beiträge zur Theorie der durch die Gausssche Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ *darstellbaren Funktionen* (1857).

Гуссовым рядом мы называем — и притом исторически неправильно — ряд, известный еще Эйлеру, который и нашел замечательные свойства этого ряда, хотя только Гаусс полностью разрешил вопрос о его сходимости. Ряд этот имеет следующий вид:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

Следуя старым математикам, мы будем называть этот ряд *гипергеометрическим рядом* просто потому, что закон его составления есть следующий по сложности после закона составления геометрического ряда. Особый интерес к этому ряду объясняется тем, что он охватывает многочисленные функции, часто встречающиеся в анализе и взятые из приложений. Назову

---

[1]) То-есть при обходе которого совокупность всех функций, выражающихся линейно через $y_1, y_2, \ldots, y_n$, остается инвариантной или — что то же — коэфициенты диференциального уравнения принимают свое первоначальное значение. *Прим. ред.*

только шаровые функции, бесселевые функции и эллиптические интегралы. Эти функции я буду называть „гипергеометрическими“, что понятно из предыдущего; при этом, конечно, нет речи о гипергеометрии, т. е., например, о неевклидовой геометрии или многомерных пространствах. Дальнейшие подробности см. в моих литографированных лекциях 1893/94 г.: „Über die hypergeometrische Funktionen“ („О гипергеометрических функциях“).

Гаусс, занимавшийся этим рядом еще в 1812 г., исследовал его тогда лишь для действительных значений переменных, но определенно пометил свою статью как „pars prior“ („первая часть“). Изучение наследия Гаусса показало, что он намеревался изучить поведение своего ряда и в области комплексных чисел. Ему было хорошо известно, что этот ряд удовлетворяет некоторому линейному диференциальному уравнению второго порядка с тремя особыми точками и что поведение частных решений этого диференциального уравнения в критических точках является относительно простым, так что в кругозор Гаусса входило исследование особенностей этого диференциального уравнения.

Эти идеи были развиты независимо от Гаусса Куммером в его, в свое время многократно упоминавшейся работе в журнале Крелля (Crelle, т. 15, 1836). В частности Куммер первый определил также и преобразования соответствующей группы монодромии.

Риман же показал, что при расширении на комплексную область можно получить все эти результаты, не пользуясь совершенно формальным видом диференциального уравнения, из которого до тех пор исходили, что вполне достаточно знать поведение соответствующих y_1, y_2 в трех особых точках и что вообще при обходе вокруг особых точек имеют место линейные преобразования

$$y_1' = c_{11}y_1 + c_{12}y_2,$$
$$y_2' = c_{21}y_1 + c_{22}y_2.$$

Здесь еще раз проявила свое значение основная тенденция рассуждений Римана: уяснять себе функцию не по формуле, а по ее основным свойствам.

Для понимания дальнейшего я расскажу, наконец, о последующей судьбе этой теории.

И здесь дальнейшему развитию этой теории оказал услугу Вейерштрасс, побудивший своего ученика Фукса (Fuchs) работать в этом направлении (Фукс родился в 1833 г. в Мошине, познанской провинции, прибыл как преемник Вейерштрасса в Берлин в 1884 г. и умер там в 1902 г.).

С 1865 г., т. е. по времени примыкая к Риману, Фукс занялся теорией линейных диференциальных уравнений n-го порядка и привлек к работе в том же направлении многих своих учеников, составивших специальную группу в математической литературе последующих десятилетий. Тут мы имеем

типичный пример узко ограниченной „школы", развившейся в результате одностороннего лекционного воздействия.

Фукс не идет по проложенной Риманом дороге. Он вновь элементарнейшим образом ухватился прямо за формулу, т. е. за явно заданное диференциальное уравнение

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0.$$

Он занимается в первую очередь особыми точками и разрешает вопрос: какими свойствами должны обладать $p_1, p_2, \ldots, p_n$, чтобы частные решения вели себя в особых точках так же просто, как и в гипергеометрическом случае. Он находит, что p_1 должно иметь исключительно простые полюса, p_2 — полюса максимум в двойной кратности, p_3 — полюса максимум тройной кратности, . . ., p_n — полюса максимум n-й кратности. По терминологии школы Фукса — это *фуксов класс* линейных диференциальных уравнений. Он определяет кроме того группы монодромии и многое другое; короче говоря: он продолжает идеи Куммера.

Можно себе представить, какое удивление вызвало посмертное издание сочинений Римана в 1876 г., принесшее фрагмент, датированный 20 февраля 1857 г.: *Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten* („Две общие теоремы о линейных диференциальных уравнениях с алгебраическими коэфициентами", Werke, 1-е изд., стр. 357—369, 2-е изд., стр. 379—390). Этот фрагмент показал, что Риман, который, как казалось, остановился на случае уравнения второго порядка с тремя особыми точками, пытался исследовать и более сложные случаи. И здесь Риман остается верным себе и не ищет спасения в формулах.

Для гипергеометрического случая группа монодромии вполне определяется заданием поведения частных интегралов в окрестности особых точек. В более сложных случаях Риман заранее приписывает частным интегралам $y_1, y_2, \ldots, y_n$, помимо простого поведения в особых точках, определенную группу монодромии, поскольку она еще остается неопределенной, и отсюда делает свои выводы, к сожалению не вполне законченные.

Поэтому предпочитают говорить о *римановой проблеме*, нежели о „теореме", ибо нет ни малейших указаний на те исходные соображения, какими Риман предполагал разрешить эту проблему: „Доказать, что для получения класса функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих линейному диференциальному уравнению, достаточно присоединить к элементарным условиям, характеризующим поведение этих функций в особых точках, группу монодромии, поскольку эта последняя еще остается неопределенной".

Это — гораздо более абстрактная постановка вопроса, нежели „проблема Дирихле", когда для отдельных функций даны краевые значения или разрывы и модули периодичности. Здесь разыскиваются совместно n функций или, лучше сказать, разыскивается n-членное линейное семейство функций $c_1y_1+\ldots+c_ny_n$.

Принцип Дирихле здесь ни в коей мере недостаточен для проведения доказательства существования, физическая интуиция также отказывается служить. Наоборот, к этому можно свести вопрос о существовании алгебраической функции на заданной n-листной римановой поверхности: речь идет об определении n ветвей функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ таким образом, чтобы при обходе точек ветвления они претерпевали простейшие линейные преобразования, а именно обыкновенные перестановки. И все же Риман высказывается так беззаботно, как будто существование функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ само собой разумеется и речь идет лишь об обосновании их свойств.

В течение почти 30 лет эта риманова проблема противостояла усилиям математиков, пока наконец в 1905 г. она не была полностью решена Гильбертом при помощи возникшей за это время теории интегральных уравнений. И в этот раз снова полностью оправдалось и подтвердилось предвидение Римана. Подробно об этом и обо всей относящейся сюда литературе см. в энциклопедии в статье Гильба [Enzykl., II B 5: Hilb, Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet („Линейные диференциальные уравнения в комплексной области"), особенно стр. 518 и сл., п. 14 — проблема Римана].

Я рассказывал об этом так подробно для того, чтобы дать понять, как несравненный гений Римана обгонял современность и оказывал далеко идущее влияние на последующие работы. Создание доказательства, необходимого для всех утверждений, есть безусловно краеугольный камень всякой математической теории. Отказавшись от необходимых доказательств, математика несомненно обрекла бы себя на гибель. Тайной творчества гения однако навсегда останется отыскание новых проблем, нащупывание новых теорем, несущих важные результаты и соотношения. Без создания новых точек зрения, без постановок новых целей математика во всей ее логической строгости могла бы исчерпаться и застыть, использовав весь материал. Таким образом, развитию математики содействуют в известном смысле скорее те, кто выделяется не столько строгостью своих доказательств, сколько своей интуицией. Риман — это тот математик последних десятилетий, который живейшим образом влияет на работу и по сей день в значительно большей степени, чем кто-либо другой.

Идеи Римана, столь глубоко повлиявшие на развитие нашей современной теории функций, распространялись медленно и лишь постепенно завоевали свое место в науке. Его работы вовсе не были, как это теперь может показаться, откровением, повлекшим за собой внезапный переворот в математических взглядах его времени. Это объясняется хотя бы тем, что собственные римановы сообщения были мало доступны вследствие своей неполноты и наличия в них множества новых и весьма непривычных понятий, которые с трудом осваивались. Первым

получило общее признание учение об алгебраических функциях и их интегралах. Но и тут математики занимались на первых порах лишь простейшим случаем, в котором связь между римановой поверхностью и соответствующим алгебраическим уравнением совершенно очевидна. Это — случай двулистной римановой поверхности, для которой сразу ясно, что соответствующее уравнение имеет вид

$$\zeta^2 = (z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n).$$

Имеется таким образом n точек ветвления в конечной области; $z = \infty$ есть точка ветвления, если n нечетно. Число p для этой поверхности равно в таком случае $\frac{n-2}{2}$ для четного n и $\frac{n-1}{2}$ для нечетного n. Если здесь $p > 1$, т. е. $n > 4$, то говорят о *гиперэллиптическом* случае; если $p = 2$, т. е. n равно 5 или 6, то, по старой терминологии, имеем *ультраэллиптический* случай. „Везде конечные“ *гиперэллиптические* интегралы имеют вид

$$u_1 = \int \frac{dz}{\zeta}, \quad u_2 = \int \frac{z\,dz}{\zeta}, \quad \ldots, \quad u_p = \int \frac{z^{p-1}\,dz}{\zeta}.$$

Когда-то их неудачно называли абелевыми интегралами, что было неправильно, ибо абелевы интегралы гораздо более общи.

Ультраэллиптические интегралы были первыми подробно изучены в духе Римана. Они были обработаны с явно выраженной дидактической тенденцией личным учеником Римана Примом (Prym) в его диссертации (Берлин 1863) *Theoria nova functionum ultraellipticarum* („Новая теория ультраэллиптических функций“) (2-е изд., 1885)[1]. [Прим родился в 1841 г.; с 1869 по 1915 г. он преподавал в Вюрцбурге. Риманову учению, впервые пробудившему его собственное творчество, Прим остался верен и в дальнейшем и в 1911 г. выпустил совместно с Ростом (Rost) относящийся к этому же вопросу большой труд „Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung, im Anschluss an die Schöpfungen Riemanns“ („Теория функций Прима первого порядка, опирающаяся на творения Римана“), в котором разбирается общий случай n-листной римановой поверхности].

Через два года, в 1865 г., появился более обширный и подробный учебник бывшего тогда профессором в Тюбингене К. Неймана *Vorlesugen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*“ („Лекции по римановой теории абелевых интегралов“). И здесь, как уже упомянуто, рассматривается вначале лишь случай двулистной поверхности, гиперэллиптические интегралы. Переход к общему случаю n-листной поверхности и соответствующие доказательства существования имеются лишь во втором издании 1884 г.

[1]) Впервые полностью появилась в 1864 г. в Denkschriften der Wiener Akademie, т. 24.

Одновременно с К. Нейманом над римановой теорией алгебраических функций работал, но совсем иным путем, кенигсбергский исследователь Клебш. Он родился в 1833 г. в Кенигсберге, получил там докторскую степень в 1854 г.; его учителями были Ф. Нейман, Гессе, Ришело; позже он стал приват-доцентом в Берлине, в 1858 г. профессором теоретической механики в Карлсруэ, в 1863 г. профессором математики в Гисене, в 1868 г. профессором в Геттингене, умер в 1872 г. В дальнейшем (в седьмой главе) мы еще покажем подробнее, как Клебш старался использовать общие результаты Римана в теории алгебраических кривых. Однако он не перенял методов Римана с их чуждым ему и тогда еще не вполне надежным основанием. Он пытался притти к общим римановым теоремам, исходя из алгебраического уравнения $F(\zeta, z) = 0$, интерпретируемого как уравнение кривой и принимающего с применением точки зрения проективной геометрии однородную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$. В таком изложении находим мы этот вопрос в книге Clebsch-Gordan, *Theorie der Abelschen Funktionen* (Клебш-Гордан. „Теория абелевых функций“, Leipzig 1866). Между книгами Неймана и Клебша существует резкое различие: в то время как Нейман в своих работах тесно примыкает в Риману, Клебш идет своим собственным путем, проявляя большую интенсивность и самостоятельность. Обе книги преследуют также различные цели: Нейман стремится представить как можно более ясно и общедоступно соотношения в простейшем случае; в противоположность ему Клебш хочет зажечь мысль для самостоятельной работы. О книге Неймана говорят, что она „слишком легка“, она „обидно ясно“ вводит читателя в круг римановых идей. Книга Клебша-Гордана трудна, она требует большой работы от читателя, в то же время она позволяет много глубже проникнуть в проблему и побуждает к плодотворным занятиям римановыми идеями. Обе книги, каждая в своем роде, были основными, подводящими итог работам Римана. Для нас они являются достоянием прошлого.

Конец 60-х годов отмечен множеством имен исследователей, связанных своими работами с Риманом. Я назову здесь лишь некоторые из них, наиболее важные, которые необходимо знать, чтобы разбираться в литературе. Здесь не место для полной библиографии работ, написанных под влиянием Римана.

В первую очередь я приведу очень изящную книгу Казорати (Casorati) *Teoria della funzioni di variabili complesse* („Теория функций комплексного переменного“). Это чрезвычайно интересное сочинение, из которого к сожалению, как это часто случается, вышел в свет только первый том (1868). В это же время Гельмгольц начинает применять римановы методы в математической физике. С 1869 г. над новым обоснованием римановых теорем существования работает Г. А. Шварц, о котором я уже упоминал: ниже я еще подробно охарактеризую его примыкающие к этому вопросу исследования, посвященные гипергеометрическим функциям.

Для истории римановых идей особенно важен 1876 год. Тогда появилось *собрание сочинений Римана*, изданное Вебером в сотрудничестве с Дедекиндом и содержащее большое число заметок, взятых из риманова наследия; но они не восстановили лекций Римана, распространявшихся в рукописях и составлявших, как мы знаем, значительное звено в цепи его достижений. Этот пробел был восполнен лишь в 1902 г. „Добавлениями", изданными Нетером и Виртингером. Об этих фактах я уже упоминал, но я говорю о них в этом контексте вторично из-за их важности.

Я придаю большое значение тому, чтобы сообщаемое в моих лекциях было освещено возможно более живо. Поэтому я введу и здесь, как я это всегда делаю, несколько биографических замечаний, чтобы отношение к науке приобрело несколько более гуманитарный и личный характер.

Дедекинд, известный своими работами по теории чисел, к которым мы еще вернемся, родился в Брауншвейге в 1831 г. и снова жил там с 1862 г. до самой своей смерти в 1916 г. В бытность свою приват-доцентом в Геттингене (1854—1858) он очень близко сошелся с Риманом. Он слушал лекции Римана и является для нас основным носителем традиций Римана. Его сила заключается в глубоком проникновении в принципы науки. Это — воистину созерцательная натура, которой, быть может, недоставало несколько большей силы и решительности.

Семья Римана, после смерти самого Римана, поручила Дедекинду все его научное наследие, и Дедекинд очень многое из этого наследия издал, снабдив эти издания глубокими примечаниями. Однако он сам не предпринял — и это было в его характере — полного издания наследия Римана. Поэтому он связался для этой цели в 1871 г. с Клебшем и после смерти последнего в 1872 г. — с Г. Вебером.

Г. Вебер (H. Weber) родился в 1812 г. в Гейдельберге, там же он учился в университете и слушал Гельмгольца и Кирхгофа. В 1873 — 1883 гг. он работает в Кенигсберге, в 1892 — 1895 гг. он — ординарный профессор в Геттингене; затем он уезжает в Страссбург, где и умер в 1913 г. Это — гибкий и в то же время энергичный ум, обладающий изумительной способностью овладевать новыми для него понятиями, какова, например, теория функций Римана и теория чисел Дедекинда. Это его умение ориентироваться дало ему возможность работать почти во всех областях нашей науки последнего десятилетия и создать такие всеобъемлющие учебные пособия, как Вебер-Вельштейн[1]), Риман—Вебер[2]), и „Алгебра", которую мы все знаем. О его участии в издании сочинений Римана 1876 г. мы уже говорили; второе издание 1892 г. было осуществлено одним Вебером.

---

[1]) Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmatematik; есть русский перевод: Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. I и II, 1-е изд. Одесса, 1909/11, 2-е изд., Москва 1929.

[2]) Riemann-Weber, Differentialgleichungen der mathematishen Physik, 3 тома, посл. изд. 1928 г. *Прим. пер.*

Нётер (Nöether), родился в 1844 г.; в Эрлангене — с 1875 г.; умер в 1922 г.) будет еще нас интересовать, когда мы будем обсуждать новое учение об алгебраических образах. Он — один из самых крупных учеников Клебша.

В лице Виртингера (Wirtinger) мы встречаем впервые австрийского математика. Он родился в 1865 г. и таким образом значительно моложе всех предыдущих. С 1903 г. он является профессором в Вене. В качестве соредактора „Monatshefte für Mathematik und Physik" он тесно связан с математиками Германии.

Желая дальше проследить рост и развитие теорий Римана, следует назвать мои собственные работы середины 70-х годов: сперва об *эллиптических модулярных функциях* — название заимствовано у Дедекинда, затем о наиболее общих *автоморфных функциях*.

Автоморфные функции можно короче всего определить как функции, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$f\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = f(z)$$

для ряда индексов i в частном случае и для бесконечного множества i. Таким образом, автоморфные функции являются в некотором смысле обобщением периодических функций, при котором прибавление периодов заменено линейной подстановкой.

В 1881 г. я пришел в очень тесное соприкосновение с Пуанкаре, как раз именно в области автоморфных функций. Это был тот момент, когда идеи Римана перебросились во Францию и нашли там прочную почву. Подробнее я расскажу об этом в главе восьмой.

Выше уже упоминалась моя маленькая статья 1881/82 г. „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale" („О римановой теории алгебраических функций и их интегралов"), в которой я пытался развернуть основные физические представления Римана.

С тех пор за границей пробуждается, во все более широких кругах, интерес к римановой теории функций. Из моих учеников следует назвать Гурвица (Hurwitz) в Цюрихе и Дика (Dyck) в Мюнхене.

Далее, чтоб не потеряться в необъятном, остановимся на нашем непосредственном окружении. Здесь мы должны назвать ряд геттингенских имен от Гильберта — спасение принципа Дирихле в 1901 г. — до Кебе (Koebe), Вейля — „Die Idee der Riemannschen Fläche" („Идея римановой поверхности", 1913 г.) — и Куранта.

Я перечислил здесь много более или менее известных имен, тесно связанных с именем Римана. Чтобы сказанное не осталось сухим перечнем имен и дат, необходимо ознакомиться со

всей литературой, созданной носителями этих имен. Читателю, который пожелал бы последовать этому совету, я дал бы следующее наставление. Нужно учиться искусству извлекать из необъятного количества имеющегося печатного математического материала основные идеи в их общей связи между собой без расточительной траты времени на проработку многих частностей и не впадая в то же время в диллетантизм и верхоглядство. Только так приобретается всесторонняя математическая образованность, без которой я не выпустил бы из университета никого из желающих работать дальше.

Оставим теперь Римана, с тем, правда, чтобы в будущих главах снова и снова встречаться с его именем, и перейдем к Вейерштрассу.

II. Карл Вейерштрасс.

Так же, как мы это сделали в основном для Римана, мы начнем и здесь с сопоставления и рассмотрения фактического материала.

1. Из собрания сочинений (Gesammelte Abhandlungen) до сего времени вышли в свет: тт. 1, 2, 3 (1894, 1895, 1903), лекции — т. 4: абелевы функции (1902); тт. 5, 6: эллиптические функции (1915) Ожидаются еще: аналитические функции и вариационное исчисление.

2. Биографические источники: Лампе (Lampe) — речь, посвященная памяти Вейерштрасса (Jahresbericht der D. M. V., т. 6, стр 40 и сл., 1897); Киллинг (Killing) — ректорская речь (Natur und Offenbarung, т. 43, стр. 131 и сл.); Миттаг-Леффлер — доклад Парижскому конгрессу, 1900 г. [1]).

Лампе—ученик Вейерштрасса. Изложение Миттаг-Леффлера основано на частных бумагах, которые он сумел добыть; оно отличается некоторой нескромностью, но — возможно, именно поэтому—читается с большим интересом. Полная оценка Вейерштрасса как человека еще отсутствует. И это тем более досадно, что в развитии Вейерштрасса имеется много необычного, и мы, вследствие неполноты собранного до сего времени материала, во многих вопросах блуждаем в тумане. Благодарной задачей было бы восполнить эти пробелы, разыскав и собрав воедино отдельные разбросанные детали.

Большинство немецких математиков, которыми мы до сих пор занимались, происходит из среды протестантов. В лице Якоби выступает впервые математик еврейского происхождения, число которых впоследствии все время растет. Вейерштрасс же происходит из католических кругов. Он родился 31 октября 1815 г. в Остенфельде, провинции Мюнстерланд. Его отец был там рендантом [2]). Я нашел справку, из

[1]) См. также Acta mathematica, т. 39 (1923) и ранее т. 21 (1897), т. 35 (1912).
[2]) Заведующий казначейством. *Прим. перев.*

которой видно, что католицизм принял лишь отец Вейерштрасса; так или иначе окружение, в котором вырос Вейерштрасс, было исключительно католическим, и это обстоятельство значительно повлияло на его развитие. Вследствие этого он многие годы своей жизни и деятельности провел в таких местах, которые до того времени были неизвестны истории математики. Это показывает следующее сопоставление отдельных дат его жизни:

В 1829—1834 гг. он посещает гимназию в Падерборне. В 1839/40 г. он учится в Мюнстерской академии у Гудермана, который также был католиком. В Мюнстере же он проходил годичный стаж на звание учителя средней школы. В 1842—1848 гг. он занимает должность преподавателя в Дейч-Кроне (Западная Пруссия), в местной католической прогимназии. С 1848 по 1854/55 г. он занимает ту же должность в „Collegium Hoseanum“ — заведении, подготовляющем католических пасторов в Браунсберге (Восточная Пруссия).

Из этих данных мы видим, что Вейерштрасс провел годы расцвета творческих сил, т. е. десятилетие между 30—40 годами, вдали от научной жизни, почти совершенно в стороне от каких-либо математических стимулов, в маленьких провинциальных городах, названия которых едва ли можно где-либо встретить.

Но совсем иначе выглядит еще не освещенный нами студенческий период жизни Вейерштрасса в Бонне в 1834—1838 гг. В Боннском университете, весьма разношерстном по вероисповеданиям, Вейерштрасс учился сперва не математике, а юриспруденции. Одновременно с этим он был активен и в „Corps Saxonia“, и о нем рассказывали, что каждый вечер он бывал в трактире одним из самых веселых посетителей и его всегда можно было встретить в фехтовальном зале. Как это увязывается с его остальным развитием, для меня остается непонятным. И если Лампе восхваляет Вейерштрасса позднего времени за „свободный характер, который давал ему возможность обращаться с жизнью до некоторой степени как властелину“, то, вероятно, этому искусству Вейерштрасс научился в свои студенческие годы в Бонне.

В Бонне Вейерштрасс не получил почти никаких математических стимулов. До 1836 г. там преподавал Мюнхов, объединявший, как представитель старой школы, астрономию, математику и физику; его преемник Плюкер, все еще связывавший математику с физикой, не мог посвятить первой достаточно много времени; Вейерштрасс у него почти ничего не слушал.

Гораздо больше получил Вейерштрасс от самостоятельных математических занятий, к которым его толкало непреодолимое влечение. Еще в Падерборне он познакомился со статьями Штейнера в журнале Крелля. Тогда, в 1829 г., появились *Fundamenta nova* Якоби, привлекшие к себе всеобщее внимание.

Вейерштрасс, не обладавший тогда никакими предварительными познаниями, проработал эту книгу с исключительным усердием и решил углубить эту работу. Услышав, что Гудерман в Мюнстере подробно разрабатывает теорию эллиптических функций, он прерывает свои занятия в Бонне, для того чтобы переселиться в Мюнстер. До этого он проводит в 1838/39 г. полгода в отчем доме, где он „страдает телесно и душевно", как он сам выразился в автобиографии, написанной им по случаю экзаменов на звание преподавателя в Мюнстере в 1841 г. Причины этого угнетенного состояния мне не удалось установить более подробно; вообще официальные данные изменяют нам всякий раз, когда возникают психологические проблемы.

Теперь я расскажу сначала, кто такой был Гудерман, столь восхваляемый своими учениками. Он родился в 1798 г. в Виннебурге, около Гильдесгейма, был учителем гимназии в Клеве, потом в Мюнстере, где и умер в 1852 г. Его научные заслуги, по крайней мере в той мере, в какой они нас сейчас интересуют, заключаются в том, что он самостоятельно и добросовестно разработал теорию эллиптических функций и интегралов.

Интеграл

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

содержащий модуль k, он называет модулярным интегралом, а обратную функцию — модулярной функцией. Изложение его работ можно найти в журнале Крелля за годы 1838—1843. (Crelle, тт. 18, 19, 20, 21, 23, 25). Характерно для Гудермана и сильное подчеркивание разложений в степенные ряды; в этом направлении и продолжал итти Вейерштрасс.

Работы Гудермана читаются со скукой и в своих деталях давно забыты. Из них удержалась до наших дней лишь часть введенной Гудерманом терминологии, именно часто употребляемые сокращения sn, cn, dn вместо Якобиевых sin am, cos am, Δ am.

Как пришел Гудерман к этим обозначениям — неизвестно; он по этому поводу не дает никаких указаний. Я полагаю, что прибавляемая буква n введена по царившей тогда моде, как первая буква последнего слога слова amplitudinis; я поддерживаю свою гипотезу тем, что Вейерштрасс свои „абелевы ряды" обозначал по этому же принципу через Al.

Кроме этой терминологии, обращают на себя внимание составленные Гудерманом таблицы гиперболических функций, важные для астрономических, физических и технических расчетов.

Вейерштрасс слушал Гудермана в 1839/40 г. и подал в 1841 г. свою работу на звание преподавателя на им самим избранную тему *Über die Entwicklung der Modularfunktionen* („О разложении модулярных функций").

Эту работу можно найти напечатанной на первом месте, в первом томе его сочинений, она содержит в себе зародыши многих его позднейших работ и, опираясь на идею, принадлежащую Абелю, представляет собой важный шаг вперед в теории эллиптических функций.

Чтобы вкратце разъяснить сказанное, я должен сделать маленькое отступление. У Якоби в результате ряда сложных выкладок получаются в конечном счете следующие формулы:

$$\operatorname{sn} u = c_1 \frac{\vartheta_1}{\vartheta}, \quad \operatorname{cn} u = c_2 \frac{\vartheta_2}{\vartheta}, \quad \operatorname{dn} u = c_3 \frac{\vartheta_3}{\vartheta},$$

где индексы введены мною здесь для большей удобообозримости. ϑ суть целые функции от u, причем, однако, одному из периодов, например ω_2, отдано предпочтение, так что разложения функций ϑ в ряды по степеням $e^{\frac{2\pi i u}{\omega_2}}$ содержат трансцендентные коэфициенты.

Но уже Абель заметил мимоходом, что функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ можно представить в виде отношений двух рядов, расположенных по возрастающим степеням u, таким образом, чтобы коэфициенты этих степенных рядов были целыми рациональными функциями от k^2. И такой способ представления эллиптических функций является даже более естественным, если исходить из интеграла

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Эти целые функции, которые Вейерштрасс позднее обозначил в честь Абеля знаком Al, он и вводит в своей работе, исходя непосредственно из эллиптического интеграла, и строит таким путем систематический переход от этого интеграла к тэта-функциям.

Этим путем Вейерштрасс получает следующие выражения:

$$\operatorname{sn} u = \frac{\mathrm{Al}_1}{\mathrm{Al}}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\mathrm{Al}_2}{\mathrm{Al}}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{\mathrm{Al}_3}{\mathrm{Al}},$$

где функции Al являются трансцендентными функциями от u и k^2, такие, что коэфициенты их отдельных членов целы и рациональны относительно k^2. Вейерштрасс вычислил их до 20-й степени со всеми их прямо-таки жуткими числовыми множителями. Впрочем оказывается, что функции Al отличаются от соответствующих ϑ только показательным множителем вида $ce^{\lambda u^2}$.

Я позволю себе мимоходом заметить, что функции Al в этой связи были для Вейерштрасса лишь переходным этапом к установлению новых, более интересных функций σ. Эти σ отличаются от Al опять-таки лишь показательным множителем, но этот последний введен на сей раз так, что основная функция σ сама, а функции σ_1, σ_2, σ_3 между собою совер-

шенно симметричны относительно ω_1 и ω_2. В частности основная σ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) = \sigma(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2),$$

где α, β, γ, δ — любые целые числа, связанные соотношением

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

Иными словами — σ инвариантна относительно любого „линейного преобразования“ периодов. Только отсюда полностью выявляется коренящаяся в существе этих понятий симметрия. К этому окончательному виду своей теории Вейерштрасс пришел лишь зимой 1862/63 г. и преподнес его в своей берлинской лекции.

Но и без этого полного гармонического завершения работа Вейерштрасса на звание преподавателя являлась большим научным достижением, и Гудерман не скупился на похвалы. В официальном отзыве, опубликованном Киллингом в 1897 г., сказано между прочим следующее: „Этой работой кандидат вступает в качестве полноправного члена в семью увенчанных славой творцов науки“.

Для самого Вейерштрасса теперь возникла цель жизни: строгой методической работой над степенными рядами (в том числе и многих переменных) разрешить проблему обращения гиперэллиптического интеграла сколь угодно высокого порядка или даже, быть может, как было пророчески предсказано Якоби, и наиболее общих абелевых интегралов.

Так называемая вейерштрассова теория аналитических функций возникла, так сказать, как побочный продукт при работе в вышеуказанном направлении.

В долгие годы своей математической изолированности, во время своего пребывания в Дейч-Кроне и в Браунсберге, упорно и систематически стремился Вейерштрасс к решению своей задачи. Мы имеем лишь очень скудные сведения о его результатах этого времени. В 1843 г. в годовом отчете прогимназии в Дейч-Кроне он напечатал статью *Bemerkungen über die analytischen Fakultäten* („Замечания об аналитических факториалах“). Теперь мы можем найти там основы вейерштрассовой теории функций (Werke т. I, стр. 87 и сл.).

В 1849 г. в годовом отчете гимназии в Браунсберге Вейерштрасс переносит на случай любого гиперэллиптического интеграла свойства четырех периодов гиперэллиптических интегралов первого и второго рода

$$\int \frac{dz}{\sqrt{f_6(z)}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{f_6(z)}}, \quad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{f_6(z)}}, \quad \int \frac{z^3\,dz}{\sqrt{f_6(z)}}$$

и существующие между ними основные для всей теории линейные соотношения, отвечающие лежандрову соотношению

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2\pi i$$

для эллиптического случая („Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale“, Werke, т. 1, стр. 111 и сл.).

Наконец в 1854 г. в журнале Крелля (Crelle, т. 47) появляется сообщение о формулах, с помощью которых действительно разрешается проблема обращения гиперэллиптических интегралов для любого p, под заглавием *Zur Theorie der Abelschen Funktionen* („К теории абелевых функций“, Werke, т. 1, стр. 133 и сл.).

Это небольшое число опубликованных работ значительно пополнено работами, вошедшими в первый том собрания сочинений. Мы из них узнаем, что еще в 1841 г. Вейерштрасс доказал для себя общую теорему теории функций о разложении функций в ряд, которую теперь обычно называют теоремой Лорана.

В 1842 г. Вейерштрасс довел исследование в области *алгебраических диференциальных уравнений с одной независимой переменной* не только до определения аналитической природы решения, но и глубже этого — до принципа *аналитического продолжения.* При этом он с удивлением заметил, что оно заканчивается на „естественной границе“.

1854 г., год окончания этой огромной работы, явился поворотным пунктом в жизни Вейерштрасса. Он становится почетным доктором Кенигсбергского университета и берет себе отпуск для окончания своей предварительной, лишь вкратце намеченной работы.

В 1856 г. его приглашают в Берлин. 1856 год имел для истории математики, столь же исключительное значение как и 1826 год, когда был основан журнал Крелля.

В 1855 г. в Берлин приехал частным образом 32-летний Кронекер (Kronecker, родился в Лигнице в 1823 г., умер в 1891 г.). Математическая индивидуальность Кронекера — совсем иного рода и заслуживает здесь особого упоминания в связи с характеристикой индивидуальности Вейерштрасса.

Занимаясь преимущественно арифметикой и алгеброй, Кронекер, выработавший в более поздние годы определенные интеллектуальные нормы, обязательные, по его мнению, для всех видов математического творчества, является специфически-еврейским талантом, характерные черты которого выступают у него с особенной индивидуальной силой. Ибо в различных областях своей работы он предчувствовал истинный смысл целого ряда соотношений фундаментального значения, не будучи еще в состоянии разработать их с полной ясностью [1].

[1] О Кронекере и всей берлинской группе см. торжественную речь А. Кнезера (A. Kneser), посвященную столетию со дня рождения Кронекера (Jahres-

В 1856 г. в Берлин был приглашен 46-летний Куммер в качестве преемника Дирихле. В том же году туда же был приглашен и 41-летний Вейерштрасс, возможно, по инициативе Куммера.

Наконец редактирование журнала Крелля, с 53-го тома, принимает на себя 40-летний Борхардт (Borchardt). По одним этим именам мы видим, как выкристаллизовывалась в то время новая берлинская математическая школа.

Вейерштрасс попал теперь в мир, полный живых математических интересов. Однако это приглашение не было для Вейерштрасса ни в какой мере счастьем, несмотря на все те многочисленные внутренние и внешние преимущества, которые оно ему принесло. Как штатного профессора, его нагрузили двенадцатью лекционными часами в промышленной академии и работой в качестве экстраординарного профессора в университете. Это означало, по сравнению с его предшествовавшим образом жизни, большую научную перегрузку.

Кроме того вышло так, что когда Вейерштрасс представил Берлинской академии в 1857 г. свою первую обработку теории абелевых функций, то в журнале Крелля появилась статья Римана (Crelle, т. 54) на эту же тему, содержащая так много совершенно новых и непредвиденных соображений, что Вейерштрасс взял обратно свою работу и так ее и не опубликовал впоследствии.

И вот зимой 1859/60 г. у Вейерштрасса начали проявляться признаки переутомления, за которыми последовало в 1861 г. общее нервное расстройство. Из-за этого весной 1861/62 г. Вейерштрасс вообще не читал лекций, а впоследствии работал только в университете, где он получил в 1864 г. (в 49-летнем возрасте) должность ординарного профессора.

Мы видим, таким образом, Вейерштрасса достигшим своего высшего положения в Берлине.

Для нас интересна его речь, которую он произнес 9 июля 1857 г. при вступлении в Берлинскую академию [1]). Нынешнее поколение привыкло рассматривать Вейерштрасса как представителя исключительно чистой математики. Однако в его речи, после краткого обзора теоретических целей, которые он себе поставил, и работ, которыми он стремится этих целей достичь, мы видим следующее интересное положение:

„Мне кажется однако, что между математикой и естественными науками должны быть установлены более глубокие взаимоотношения, чем те, которые имели бы место, если бы, например, физика видела в математике лишь вспомогательную дисциплину, пусть даже необходимую, а математика рассматривала

bericht der D. M. V., 1925, стр. 210 и сл. Далее см. статью Г. Вебера: H. Weber, Kronecker, Math. Annalen, т. 43), и речь Г. Фробениуса: G. Frobenius, Gedächtnissrede auf Leopold Kronecker (Abh. d. Berliner Akad., 1893). *Прим. ред. нем. изд.*

[1]) Werke, т. 1, стр. 223—226.

вопросы, выдвигаемые физиками, только как обильное собрание примеров для своих методов. Я не могу, однако, сейчас развивать эти взгляды, которые мне очень близки. На вопрос же, уже поставленный мною, можно ли действительно получить что-либо непосредственно применимое из тех абстрактных теорий, которыми предпочтительно занимаются теперешние математики, я могу ответить, что греческие математики изучили свойства конических сечений чисто умозрительным путем, задолго до того, как кто-либо мог предугадать, что эти кривые представляют собою пути, по которым движутся планеты, и я верю, что будет найдено еще много функций с такими свойствами, как, например, знаменитые тета-функции Якоби, с помощью которых можно, с одной стороны, узнать, на сколько квадратов разлагается любое заданное число, которые позволяют спрямить дугу эллипса и, с другой стороны, как я здесь добавлю, дают возможность найти истинный закон колебаний маятника".

Это показывает нам, что Вейерштрасс не стоял в стороне от приложений математики и ни в какой мере от них не отмежевывался. Правда, в своих работах он не занимался прикладной математикой, но в своих лекциях он регулярно затрагивал проблемы механики и побуждал к работе в этом направлении своих учеников: Брунса, С. Ковалевскую и др. И здесь вейерштрассова постановка вопросов резко отличается от римановой: в то время как Риман направляет свои математические усилия на открытие новых путей в познании природы, с тем чтобы потом это познание повело к созданию новых математических идей, — Вейерштрасс ограничивается полным и строгим разрешением заранее формулированных задач прикладной математики.

Приблизительно еще 30 лет Вейерштрасс читал свои лекции перед все время растущей аудиторией в Берлинском университете; в последние годы этим лекциям часто мешала болезнь, и наконец 17 февраля 1897 г. он скончался после мучительной болезни в возрасте $81^1/_2$ года.

Лекции Вейерштрасса особенно важны для нас потому, что сам Вейерштрасс очень мало печатал. Он питал принципиальное отвращение к типографской краске, — явление безусловно странное в наш „гутенберговский век".

Свои лекции он не давал также и литографировать, а требовал, чтобы они переписывались. В те времена в Берлине имели обыкновение схематически записывать то, что хотели взять из вейерштрассовых лекций. Эти записки были настолько широко распространены и за границей, что они оказали существенное влияние на развитие нашей науки. Познакомимся с ними несколько подробнее.

Полный их список мы находим в третьем томе собрания сочинений. Я перечислю лишь тот общий круг вопросов, на которых останавливался Вейерштрасс: аналитические функции,

эллиптические функции, приложения эллиптических функций, гиперэллиптические или абелевы функции.

Наряду с этим он читал и другие курсы, как, например, синтетическую геометрию и вариационное исчисление, часто повторявшиеся в поздние годы.

Насколько помню, я прибыл в Берлин в 1869 г. и оставался там в течение 1869/1870 г. Вейерштрасс пользовался тогда абсолютным и непререкаемым авторитетом, все его теории принимались его слушателями как абсолютно непреложные нормы мышления, хотя часто они оставались недостаточно понятыми во всей своей глубине. Возможность каких-либо сомнений была совершенно исключена, и контроль затруднен был уже тем обстоятельством, что Вейерштрасс приводил исключительно мало цитат. Целью своих лекций он ставил преподнесение вполне стройной системы заключений в их взаимной связи. Начиная с методического построения самых основ и постепенно поднимаясь все выше и выше, он стремился к полному отсутствию пропусков и скачков, к своему идеалу. Таким образом в ходе изложения он ссылался только на ранее сказанное им же.

Сам я тогда, так же как и Ли, из духа противоречия не слушал лекций Вейерштрасса, — теперь я жалею об этом. На семинаре же я всегда защищал только свои собственные мысли. Однако я переписал себе одну лекцию Вейерштрасса об эллиптических функциях и впоследствии в своих работах я часто ею пользовался.

Постепенно Вейерштрасс завоевал несравненный авторитет во всем научном мире (ср. например отчет Миттаг-Леффлера о Парижском конгрессе 1900 г., стр. 131, где приводятся следующие слова Эрмита: „Weierstrass est notre maître à tous“ (Вейерштрасс — учитель нас всех).

И все же Вейерштрасс в конце концов не избежал разочарования, ибо он увидел свое учение опороченным (см. письмо к С. Ковалевской от 24 марта 1885 г., сообщенное Миттаг-Леффлером в Acta mathematica, т. 39, стр. 194 и сл.). Кронекер положил начало новому течению в математике, признававшему на основании определенных философских соображений лишь целые числа, в лучшем случае рациональные, и оставлявшему целиком и полностью в стороне иррациональные числа. Это новое течение считало вейерштрассово обоснование теории функций неудовлетворительным. Мы здесь встречаемся в области науки с такой же переменой идей, как и последовательные перемены, наблюдаемые часто в литературе и искусстве. Весьма досадно, что Вейерштрасс так страдал — особенно вследствие полемических приемов Кронекера — от этого поворота, ставшего весьма заметным к концу его жизни. О переживаниях Вейерштрасса можно судить по вышеупомянутому письму. Мы сказали бы, что он не должен был так тяжело это переносить, ибо раз навсегда известно, что все земное подчинено вечному закону движения. Отживший должен мириться с своей судьбой, мириться с тем, что с молодым

поколением на первый план выступают новые мысли. Никто из нас не должен желать помешать движению мира вперед, через нас. Напротив мы должны этого хотеть; ведь когда мы были молоды, мы тоже отбрасывали прочь господствовавшие тогда мнения.

Ныне мы знаем, что философия Кронекера, находящая постоянно сторонников даже среди серьезных математиков, не могла основательно поколебать вейерштрассовой теории функций. Ей, этой философии, как определенному направлению в постановке математических проблем, нельзя отказать в известном значении, однако она не приобрела широкого влияния и никогда не была действительно плодотворной сама по себе. Пуанкаре как-то сказал о Кронекере (Acta Math., т. 22), что тот достиг больших результатов в математике лишь потому, что нередко забывал свое собственное философское учение.

Теперь я позволю себе рассказать кое-что о *теории функций Вейерштрасса*. Естественно, что здесь я смогу привести только отдельные и элементарнейшие моменты теории, так же как я это все время делал и до сих пор.

Отправным пунктом у Вейерштрасса служит степенной ряд $\mathfrak{P}(z-a)$ или соответственно $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$. Его значения внутри его круга сходимости, если таковой существует, представляют собой „элемент" функции. С помощью „аналитического продолжения", осуществляемого опять же степенными рядами и проводимого, если нужно, сквозь различные листы римановой поверхности (как мы бы теперь выразились), строится понятие функции как совокупности всех продолжений данного „элемента".

Возникает вопрос, относятся ли сюда также и „особые точки", т. е. полюсы и точки ветвления, лежащие необходимо на границе области сходимости. Вейерштрасс устанавливает, что эти точки должны быть включены, в случае если это полюсы или точки ветвления конечных порядков, тогда возможно в этих точках разложение по степеням $(z-z_0)^{\frac{1}{n}}$, содержащее только конечное число членов с отрицательными показателями. Для бесконечно удаленной точки $z-z_0$ должно иметь значение $\frac{1}{z}$.

Таким путем приходит Вейерштрасс к понятию „аналитического образа".

Эти определения принципиально вполне совпадают с воззрениями Римана. Но в дальнейшем теории Вейерштрасса и Римана развиваются в совершенно отличных друг от друга направлениях. Вейерштрассовы определения позволяют, оперируя со степенными рядами, во-первых, придерживаться полной арифметической строгости и, во-вторых, легко и понятно делать обобщения на случай многих переменных, чему Вейерштрасс придавал большое значение.

„Вейерштрассова строгость“, игравшая в свое время главную роль в математической дедукции (так сказать, в противовес прославившейся прежде гауссовой строгости!), состоит в умении весьма тонко и осмотрительно обходиться с бесконечными рядами. При этом возникло понятие о равномерной сходимости, бывшее для Вейерштрасса основным и ставшее впоследствии важным методом доказательства и важным вспомогательным средством. Кроме того, Вейерштрасс первый вернулся к исследованию основных операций арифметики и начинал свой цикл лекций всегда с точного установления сущности иррациональных чисел, что и стало с тех пор всеобщей традицией, успевшей уж изрядно приесться.

Аналитическая функция, по определению Вейерштрасса, может в известных условиях иметь „естественные границы“, как это было уже замечено выше. Эти естественные границы могут быть в различных специальных случаях или целыми кривыми, или изолированными точками („существенно-особые“ точки). Риман полностью исключал в своих соображениях естественные границы. В противоположность ему, Вейерштрасс пришел своим методом к возможности более точного изучения поведения аналитической функции вблизи ее естественной границы.

Простейший случай, к которому приводит отправной момент вейерштрассовых рассуждений, следующий: пусть функция задана степенным рядом

$$G(z) = \mathfrak{P}(z-a),$$

сходящимся во всей плоскости. Это и есть по Вейерштрассу целая функция, имеющая в $z = \infty$ существенно-особую точку, если только эта функция не целая рациональная, содержащая лишь конечное число членов. Изучая функции, названные им целыми, в окрестности точки $z = \infty$, Вейерштрасс пришел к следующей важной теореме, дополненной впоследствии *теоремой Пикара* (Picard):

„Всякая целая функция, не сводящаяся к постоянной, принимает в окрестности точки $z = \infty$ бесконечно много раз значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному значению“. (Эту теорему можно между прочим найти и у Казорати.)

Исследования Вейерштрасса о целых функциях опубликованы в 1876 г.[1]), но относятся безусловно к более раннему периоду его деятельности.

Там же Вейерштрасс занимается между прочим представлением функции $G(z)$ через ее нулевые точки, т. е. ее разложением в произведение. Он представляет $G(z)$ в виде

$$G(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{r_i(z)},$$

где показательный множитель должен быть введен, чтобы со-

[1]) „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen“ („К теории однозначных аналитических функций“, Berl. Abh., 1876; Werke, т. 2, стр. 77 и сл.).

здать сходимость. Отдельные множители $(z - a_i) e^{r_i(z)}$ Вейерштрасс называет „первоначальными множителями“ (Primfaktoren) функции $G(z)$.

Мы получили, таким образом, два основных момента, характеризующих направление интересов Вейерштрасса: это, во-первых, разложение функций на первоначальные множители и, во-вторых, стремление подойти к естественной границе.

Я хочу добавить два общих замечания. Во-первых, Вейерштрасс, несмотря на свою удивительную разносторонность, не предпринимал исследований по теории чисел, как таковой. Теория чисел замечательна именно тем, что различные математики сообразно с их вкусами отводят ей совершенно различное место. Одних математиков она захватит полностью, так что они, подобно Гауссу, считают теорию чисел царицей математики, другие же, напротив, проходят мимо нее без всякого интереса. Причина этого столь различного отношения к теории чисел не только у различных людей, но и в разные эпохи заключается в том, что теория чисел работает совершенно иными методами, нежели все остальные ветви нашей науки, а человек способен владеть правильно и с достаточным успехом лишь одним оружием. Несмотря на свое явное равнодушие к теории чисел, как к самостоятельной математической дисциплине, Вейерштрасс все же занимался, как уже сказано выше, законом разложения чисел на простые множители, однозначно определенные с точностью до единиц. Перед ним реял теоретико-функциональный идеал — создать в теории функций закон, аналогичный этому. В какой мере ему это удалось в области целых функций (в его смысле), мы видели выше. Добавлю к этому, что он поставил и разрабатывал этот же вопрос и для многозначных алгебраических функций и их интегралов.

Во-вторых, я хотел бы остановиться на тех источниках, которые привели Вейерштрасса к его задачам. Ведь всегда интересно и полезно заглянуть, если это удается, в мастерскую великого художника и увидеть, как зарождаются и развиваются его произведения.

Я вижу два таких источника. Во-первых, историческое наследство: доказательством этого являются занятия Вейерштрасса проблемой абелевых функций, как она была формулирована Якоби. Вторым источником служит систематичность его мышления, заставившая его довести начатое изучение до степени законченного исследования, и его умение использовать имеющиеся в распоряжении средства.

Третий отправной момент, имевший место в случае Римана, когда мы могли искать эти источники в приложениях математики, полностью исключается, когда речь идет о Вейерштрассе.

Четвертый отправной момент, встречающийся у многих плодотворно работавших математиков, — это некоторый философский, логический постулат, вроде, например, требования Кронекера оперировать исключительно с целыми числами или вообще допускать лишь рассуждения, заключающие в себе конечное число

операций. И этот отправной момент, кажется, отсутствует у Вейерштрасса, если не считать основного его положения: „Algebraica — algebraice“ (алгебраическое — алгебраическим путем).

Изложенная мною в элементарных чертах вейерштрассова теория функций и их разложения в произведения находит себе блестящее применение в его *Theorie der elliptischen Funktionen* („Теория эллиптических функций“) при построении основной функции $\sigma(u)$; вероятно, исторически теория целых функций и получила свое начало в теории эллиптических функций.

Мне остается немного подробнее рассмотреть затронутую здесь теорию эллиптических функций, которой я впрочем касался уже в первой главе; я ограничусь приведением некоторых выкладок и в связи с ними некоторых замечаний исторического характера.

Я уже давал (стр. 71) представление σ в виде произведения:

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}\right) e^{\frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2}}.$$

Здесь отсутствует лишь множитель 2, неотъемлемо связанный у Вейерштрасса с периодами. Я же привык в моих работах вместо вейерштрассовых периодов $2\omega''$, $2\omega'$ писать только ω_1, ω_2 [1]). Этим путем, отбрасывая число 2, получившее предпочтение лишь в силу унаследованной исторической традиции, я достигаю большей симметрии, когда мне в моих работах бывает необходимо разбивать период на любое число 3, 4, ..., n частей. Получается наглядный принцип классификации эллиптических функций по их поведению при линейном преобразовании периодов

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,$$
$$\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

где α, β, γ, δ — целые числа, удовлетворяющие условию

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

Это так называемая *теория ступеней* (Stufentheorie, 1879) [2]). Функции, инвариантные относительно вышеуказанного преобразования, называются функциями первой ступени. Функции, не изменяющиеся при некоторой группе преобразований, именно при линейных преобразованиях, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \equiv \omega_1 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \equiv \omega_2 \end{aligned}\right\} \pmod{2}$$

или вообще

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \equiv \omega_1 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \equiv \omega_2 \end{aligned}\right\} \pmod{n},$$

---

[1]) Вейерштрасс пишет также $\omega_1 = \omega'$, $\omega_2 = -(\omega' + \omega'')$, $\omega_3 = \omega''$.

[2]) См. Klein, Ges. Abh., т. 3, стр. 169 и сл.

я называю в первом случае функциями второй ступени, во втором случае — функциями n-й ступени.

Тогда можно сформулировать основной результат следующим образом: вейерштрассовы функции $\sigma(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$, g_2, g_3 суть функции первой ступени, в то время как якобиевы $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, k^2 принадлежат ко второй и соответственно четвертой ступени. Однако в некоторых условиях полезно вводить и функции высших ступеней. Вейерштрасс много занимался также и функциями второй ступени и стремился придать им симметричную форму. Он добился этого введением трех побочных σ: $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$, зависящих от половины периода. Затем он вводит уравнениями

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$$

три постоянных e_1, e_2, e_3, имеющих вид функций второй ступени и кроме того удовлетворяющих тождеству

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

С их помощью σ_i $(i = 1, 2, 3)$ принимают следующий вид:

$$\sigma_i = \sigma\sqrt{\wp - e_i},$$

где знак корня должен быть выбран так, чтобы

$$\lim_{u\to 0}\left(\sigma_i u - \frac{1}{u}\right)$$

оставался конечным. Функции $\frac{\sigma_i}{\sigma}$ также принадлежат второй ступени и могут быть с пользой поставлены на место якобиевых sn, cn, dn.

Я хочу этими короткими указаниями закончить изложение вейерштрассовой теории комплексных функций и привести в заключение несколько замечаний исторического характера, которые теперь можно найти собранными в Энциклопедии (Enzyklop. II В 3) в прекрасном реферате Фрике (Fricke) об эллиптических функциях.

Если мы будем искать, что побудило Вейерштрасса заняться представлением своих функций в виде бесконечных произведений, то найдем, что основным предшественником Вейерштрасса в этом вопросе был Эйзенштейн, богато одаренный, но рано умерший математик, о котором я уже много раз упоминал. Он опубликовал в журнале Крелля (Crelle, т. 35) за 1847 г. статью под заглавием *Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind* („Точное исследование бесконечных двойных произведений, из которых эллиптические функции составляются как частные“).

В этой работе Эйзенштейн, правда, не получает представления основной функции σ в симметричной нормальной стандартной форме, ибо он не вводит показательного множителя в каждый

элементарный множитель своего произведения. Но он замечает, что произведение

$$u \cdot \Pi\left(1 - \frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}\right)$$

сходится лишь условно, т. е. что его значение зависит от порядка следования сомножителей. Он изучает эту многозначность и приходит к функциям $\wp(u)$, $\wp'(u)$, g_2, g_3 и существующим между ними соотношениям. Таким образом Эйзенштейну нехватает только показательного множителя

$$e^{\frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2} + \frac{u^2}{2(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2}},$$

неотделимо связанного у Вейерштрасса с каждым множителем произведения; при помощи этого множителя достигается абсолютная сходимость. Вейерштрасс почерпнул свою идею, как он сам указывает, у Гаусса, поступившего аналогично в 1812 г. при разложении гамма-функции в произведение (гипергеометрический ряд, Gauss' Werke, т. 3, стр. 145).

Эта ссылка на Эйзенштейна не дает, однако, нам оснований к недооценке великой работы Вейерштрасса. Создание единой теории из разрозненных деталей и результатов отдельных исследований всегда является высокой заслугой. И особенно высоко надо ценить заслугу Вейерштрасса, если принять во внимание, как безраздельно владела умами всех математиков теория Якоби, на изменение которой посягнул Вейерштрасс со своей новой точкой зрения.

Теперь я постараюсь осветить вкратце влияние вейерштрассовой теории функций на дальнейшее развитие математики.

Идеи Вейерштрасса получили на первых порах, как мы это видели, некоторое, но все же весьма ограниченное распространение благодаря составлявшимся его слушателями и переписывавшимся записям его лекций. Очень медленно появляются учебники, написанные лишь частично непосредственными учениками Вейерштрасса, особенно немцами. Это объясняется тем, что Вейерштрасс слишком много рассчитывал на самостоятельную работу своих учеников, из-за чего его могли понимать лишь те, кто всерьез работал над соответствующим материалом. Крупнейшие работы написаны иностранцами или во всяком случае появились за границей. С этим, казалось бы посторонним, обстоятельством мы встретимся при изучении дальнейшего развития созданной Вейерштрассом теории.

Я перечислю теперь учебники, тесно примыкающие к Вейерштрассу и способствовавшие распространению добытых им результатов.

а) *Основания.*

Пожалуй, самая первая из всех учебных книг принадлежит перу моего друга Штольца (O. Stolz, Иннсбрук): „Vorlesungen

über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet" („Лекции по общей арифметике. Разработано согласно новейшим воззрениям", 1885/86). Эта книга отличается особой тщательностью изложения и построена в духе Вейерштрасса.

b) *Общая теория функций.*

В 1887 г. вышла книга Бирмана (Biermann, Австрия): Theorie der analytischen Funktionen („Теория аналитических функций"). Ее не следует особенно рекомендовать, так как она не вполне строго написана.

Forsyth, Theory of Functions of a Complex Variable („Теория функций комплексного переменного", Кембридж, 1893).

Harkness-Morley, A Treatise on the Theory of Functions („Курс теории функций", Нью-Иорк, 1893).

Два последних автора происходят один из Англии, другой из Америки. Обе эти страны, ставшие особенно восприимчивыми к идеям чистой математики, с тех пор как поблекли традиции собственной национальной математики в том виде, в каком ее представляли Кели (умер в 1895 г.) и Сильвестр (умер в 1897 г.), быстро и жадно подхватили идеи Вейерштрасса.

c) *Эллиптические функции.*

Прежде всего следует назвать появившуюся в 1885 г. книгу Шварца, — не представляющую собой учебника в собственном смысле слова, — H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen („Формулы и теоремы для пользования эллиптическими функциями"). Кроме этой книги Шварца, приходится снова указать исключительно иностранные, на этот раз французские сочинения:

Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications („Курс эллиптических функций и их приложений", 1886/88). В двух с половиной томах автор, начиная весьма элементарно, быстро переходит к новейшим изысканиям. Эта работа прервана смертью Альфана.

Tannery-Molk, Eléments de la théorie des fonctions elliptiques („Элементы теории эллиптических функций", 1893), очень подробное четырехтомное сочинение, представляющее собой типичный учебник.

И в Париже со смертью Коши (1857 г.) также упала творческая продуктивность в области теории функций. Правда, с конца 40-х годов Эрмит (Hermite, родился в 1822 г., умер в 1901 г.) высоко держал знамя Коши. Однако этот исключительный математик не обладал необходимыми качествами для создания и развития своей собственной школы. Его потребность в поддержке толкает его к тесным сношениям вначале с Якоби, позднее с Риманом и Вейерштрассом. Эрмит был выдающейся личностью в математике, и мы о нем еще будем много говорить впоследствии. Мы обязаны ему многими важнейшими открытиями, про-

ложившими широкие пути для дальнейшего исследования, но в то же время в его систематическом изложении мы находим очень много мест, оставляющих желать большей ясности. В качестве примера я приведу хотя бы употребление им термина „coupure“, встречающегося в литографированных его лекциях по теории функций, широко распространенных тогда, как и вообще все литографированные издания его курсов. Его употребление слова „coupure“ не позволяет установить, является ли это переводом риманова термина „Schnitt“ — сечение, естественная граница, заключающаяся в природе самой задачи, или же оно означает „Verzweigunsschnitt“ — сечение ветвления, т. е. нечто более или менее произвольное.

Эрмит, благодаря притягательной силе своей обаятельной личности, благодаря своему упорному стремлению поднять математику выше того одностороннего национализма, который постепенно стал охватывать молодое французское поколение, наконец благодаря своей оживленной переписке с математиками всего мира был в течение многих десятилетий одним из важнейших центров всего математического мира. Но Эрмит не обладал той могучей целеустремленностью, которая совершенно необходима творцу нового направления математической мысли.

Лишь его ученики взялись с 1880 г. за работу над немецкой теорией функций и положили начало новому расцвету французской математики; сюда относятся такие люди, как Пикар, Пуанкаре и мн. др. Пуанкаре принадлежит также и самый обстоятельный очерк о научном значении Вейерштрасса (Acta mathematica, т. 22).

Возвращаясь, добавим еще к нашему списку учебников:

d) *Абелевы функции.*

Baker, Abel's Theorem and the allied Theory („Теорема Абеля и связанные с ней теории“, Кэмбридж, 1894).

Теперь поговорим о дальнейшем развитии вейерштрассовой теории функций.

Сперва об общей теории функций Вейерштрасса. Здесь следует особо отметить немецкого математика Прингсгейма (родился в 1850 г., работает с 1877 г. в Мюнхене). Придя к Вейерштрассу из гейдельбергской школы, руководимой Кенигсбергером, он перенял у него строгое и почти исчерпывающее умение оперировать со степенными рядами, приведшее его к новым результатам.

Затем сюда относится человек, чьей энергичной международной деятельности обязаны своим распространением идеи и методы Вейерштрасса. Это — Миттаг-Леффлер (родился в 1846 г. в Стокгольме и работал там в местном университете с 1881 г.). Как ученик Вейерштрасса, он занимался разложениями на элементарные дроби и другими аналогичными способами представления функций. Миттаг-Леффлер представляет собой весьма своеобразный тип: у него собственно математическое творчество

отступает на задний план, уступая место активной внешней деятельности и стремлению более или менее сильно воздействовать на других, побуждая их к творческой работе. В этом он столь же предприимчив, как и в своей частной жизни. Но этого мало: он еще придворный и дипломат. Путешествуя взад и вперед между Парижем и Берлином, он становится близким другом Эрмита и Вейерштрасса и пользуется официальными отношениями между обоими государствами в целях распространения идей Эрмита и Вейерштрасса. Он рано понял исключительное значение Пуанкаре, крепко привязал его к себе и привлек к работе в своем новом журнале *Acta mathematica*, основанном в 1882 г.

Он с самого начала обеспечивает своему журналу широкое распространение, плодотворно используя свои связи с шведской дипломатией, и действительно добился того, что его „Acta“ были везде известны и имелись везде, в то время как более раннее немецкое издание „Mathematische Annalen“ (основанное в 1868 г.) оставалось еще во многих местах в тени.

Из непосредственных учеников Вейерштрасса более всего работал в области эллиптических функций Киперт (Kiepert, родился в 1846 г., с 1879 г. работал в Ганновере), а по абелевым функциям — Шоттки (Schottky, родился в 1851г., с 1902 г. в Берлине).

Я называю только эти два имени, но Вейерштрасс оказывал сильное влияние на нас всех, выросших на другой почве и пришедших к эллиптическим и родственным им функциям. Здесь следует указать еще М. Нетера и меня.

В своих работах о гипергеометрических и абелевых функциях [Mathem. Annalen, тт. 27—36 [1]), 1886—1889] я перенес на высшие случаи идею σ-функций и в частности идею Вейерштрасса о разложении алгебраической функции, заданной на римановой поверхности, на первоначальные множители и единицы и довел эту идею, как мне кажется, до окончательного оформления.

Об этом я бы с удовольствием поговорил подробнее, если бы рамки моих лекций позволили мне это [2]). Наконец посвящу пару слов много раз упоминавшейся ученице Вейерштрасса Софии Ковалевской.

Она родилась в 1850 г. в Москве и училась там же. Мы можем проследить лишь за ее математической судьбой. Она училась сначала в Гейдельберге в качестве частной ученицы Кенигсбергера, потом таким же образом — в Берлине у Вейерштрасса, с которым близко сошлась. Она не могла слушать публичных лекций, ибо тогда вольнослушательницам еще не раз-

---

[1]) Ges. Abh., т. 3, № XCV—XCVII.

[2]) Ср. статью Krazer-Wirtinger, Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen (Enzyklop., II B 7) и Bieberbach, Neuere Untersuhungen über Funktonen von komplexen Variablen (там же, II C 4).

решалось присутствовать на лекциях. В 1874 г. она получила докторскую степень заочно по рекомендации Вейерштрасса на основании ее работы о линейных диференциальных уравнениях в частных производных (Crelle, т. 80); в этой работе она показывает, что линейное диференциальное уравнение в частных производных с аналитическими коэфициентами имеет аналитическое решение — это развитие идеи, заложенной Вейерштрассом в одной из юношеских работ, опубликованной теперь в первом томе собрания сочинений [1]). В 1883 г. она при содействии Миттаг-Леффлера получает приват-доцентуру, а в 1884 г. профессуру в частном университете в Стокгольме, руководимом Миттаг-Леффлером. С тех пор она становится мировой знаменитостью, и 1889 г. ей присуждается также при содействии Миттаг-Леффлера большая премия Парижской академии за исследование о вращении тяжелого несимметричного волчка. Она умерла в Стокгольме в 1891 г.

Значение С. Ковалевской ни в какой мере не может быть исчерпано ее математической характеристикой. Она между прочим писала романы и сама переживала их, наконец она стояла в центре движения за эмансипацию женщин [2]). Поэтому трудно составить себе правильное суждение о ее научном облике. С одной стороны, имеются энтузиасты, воспевающие и восхваляющие ее как героиню, а с другой стороны, имеются скептики, более склонные к тому, чтобы осудить как ее жизнь, так и ее работы. Ни те, ни другие, конечно, не дают нам ничего надежного в ее характеристике, ибо мы с вами хорошо знаем, как искажает образ человека реклама и слишком большое восхваление, с одной стороны, и слишком резкое порицание — с другой. Пожалуй, самым ценным надо считать некролог, посвященный ей Миттаг-Леффлером в томе шестнадцатом „Acta mathematica“.

Мы можем здесь заняться, и то лишь вкратце, маленьким участком ее жизненного пути. Для нас важен вопрос о значении ее математических работ. Первое, что бросается в глаза, это то, что ее работы находятся в столь тесной связи с работами Вейерштрасса и в такой мере написаны в стиле Вейерштрасса, что не видно, в какой мере эти работы заключают ее собственные мысли [3]).

---

[1]) Это не первый случай получения докторского звания женщиной в Геттингене. Сто лет тому назад 17-летняя Доротея Шлецер получила звание доктора за свой доклад о русских финансах. В дипломе Д. Шлецер я нашел красивую формулировку: „просвещенная дева“ („virgo erudita“), впоследствии, к сожалению, замененную бессмысленным титулом „domina doctissima“ („ученейшая госпожа“).

[2]) О ее жизни см. биографию A. Ch. Leffler (сестры Миттаг-Леффлера), появившуюся в „Reclams Universalbibliothek“.

[3]) Недавно Вентшером и Шлезингером в Jahresbericht d. D. M. V., т. 18, 1909 напечатаны письма, посланные Вейерштрассом в геттингенский факультет по поводу присвоения ей докторской степени. В этих письмах Вейерштрасс подробнее высказывается о ее математических заслугах.

Были высказаны сомнения и в достоверности ее позднейших результатов: ср., например, критику Вольтерра (Volterra) ее работы о кристаллах с двойным лучепреломлением, где ею допущена принципиальная ошибка [1]). Эта работа была ею представлена для получения права преподавания в высшей школе и опубликована в Acta mathematica, т. 6 в 1883 г. Равным образом не все довольны и ее работой о вращении волчка.

Как бы то ни было, одно несомненно: София Ковалевская соединила с ярким интересом к математике большую восприимчивость и такую же способность ориентироваться. Достойно удивления то, что она многого добилась в математике, несмотря на многосторонность ее интересов в других областях и несмотря на ее жизнь, полную перемен. Мы должны быть ей благодарны еще и за то, что она вывела Вейерштрасса из его замкнутости, и за то, что теперь перед каждым ближе встает образ этого учителя в его письмах к своей близкой ученице.

После этого исключительного случая женское математическое образование пошло более прямой дорогой: с осени 1893 г. вольнослушательницы были допущены прусским правительством к слушанию лекций, на первых порах в Геттингене. Первой женщиной, получившей звание доктора математики на основе нормальных экзаменов 1895 г., была Грэс Чизгольм, ныне Юнг (Grace Chisholm-Young).

Мы закончили, таким образом, изложение теории функций комплексного переменного у Римана и Вейерштрасса и обзор ее дальнейшего развития.

Между прочим факты, приведенные нами только что, показывают, как втягивается математика во все проблемы современного культурного прогресса. Мы здесь, в Геттингене, не противимся новым веяниям, но мы хотим, чтобы наша собственная работа продолжала попрежнему оставаться в центре наших интересов.

---

[1]) Acta math., т. 16 (1892/1893), стр. 153 и сл.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Исследование природы алгебраических многообразий с более глубокой точки зрения.

I. Дальнейшее развитие алгебраической геометрии.

В третьей и четвертой главах мы уже говорили о том, какое могущественное влияние оказала на развитие теории алгебраических кривых, поверхностей и т. д. проективная точка зрения. Мы начнем наш обзор с сравнительно более элементарной области алгебраической геометрии — с теории алгебраических кривых. Я коснусь здесь только двух разделов этой теории: теорем о точках пересечения алгебраических кривых и теории соприкасающихся кривых.

Рассмотрим простейший случай, к которому я всегда охотно обращаюсь и которого я уже коснулся раньше, а именно случай плоских алгебраических кривых третьего порядка (кривые C_3). Мы имели следующие теоремы:

а) все кривые C_3, проходящие через заданные восемь точек, пересекаются еще в одной девятой точке;

б) плоская кривая C_3 имеет девять точек перегиба, и фигура, образованная этими девятью точками, обладает следующей удивительной особенностью: каждым двум точкам перегиба соответствует третья точка перегиба, лежащая с первыми двумя на одной и той же прямой. Эти прямые, проходящие через три точки перегиба, называются линиями перегиба, так что число линий перегиба равно 12. Кроме этих теорем, нам также уже пришлось попутно говорить о 28 двойных касательных к кривым C_4. Но вот в 1857 г. появляется большая работа Римана по *теории абелевых функций*. Риман подходит с совершенно другой стороны к вопросам, решение которых требовало от геометров предшествующей эпохи трудных исследований, и все прежние рассмотрения алгебраических проблем получают благодаря Риману новое содержание.

Риман исследует алгебраические уравнения

$$F(\zeta, z) = 0$$

и занимается, таким образом, в сущности плоскими алгебраическими кривыми, ибо ζ и z можно считать прямоугольными координатами точки. Уже до Римана стало обычным придавать переменным ζ и z комплексные значения. Новым

однако является следующее: 1. Рассмотрение *абелева интеграла* $\int R(\zeta, z)\,dz$, соответствующего данной „кривой“; это приводит к установлению теснейшей связи между „теоремой Абеля“ и теоремами о точках пересечения алгебраических кривых, а также, в силу периодичности абелевых интегралов, и теорией соприкасающихся кривых. 2. Идея „*бирациональных преобразований*“, согласно которой объединяются в один класс те кривые $F(\zeta, z) = 0$ и $F_1(\zeta_1, z_1) = 0$, для которых ζ и z могут быть рационально выражены через ζ_1 и z_1 и, обратно, ζ_1 и z_1 — через ζ и z. Мы это скоро поясним подробнее; я предпошлю сначала несколько историко-биографических замечаний.

Риман с самого начала прекрасно понимал, какое значение имеют его теории для алгебраической геометрии. Однако в своих лекциях он более подробно остановился только на одном простейшем случае — на теории плоских кривых C_4, что стало известно значительно позже на основании записей его лекций. Для того чтобы развернуть во всей широте разработку поставленной Риманом проблемы и сделать эту работу достоянием широких кругов, нужен был математик другого склада, чем Риман. Человеком, выполнившим эту задачу, является Клебш.

Клебш родился в Кенигсберге в 1833 г. и прошел кенигсбергскую математическую школу. Якоби уже не было тогда в живых, но тем теснее Клебш примкнул к Гессе, ученику Якоби. В то же время Клебш работает у Франца Неймана, от которого он получил первый толчок к творческой работе в области математической физики. Результатом явилась его теория упругости твердых тел, появившаяся в 1862 г. Клебш работал тогда в политехнической школе в Карлсруэ, где он занимал кафедру с 1858 до 1863 г. в возрасте 25—30 лет. Однако вскоре у него берет верх интерес к чистой математике. Он посвящает себя алгебраической геометрии и, оставаясь и в этой области верным традициям Якоби и Штейнера, изучает в то же время новые тогда работы английского трехзвездия: Кели, Сильвестра и Сальмона. К этому присоединилось могущественное влияние Римана. Таков научный характер деятельности Клебша во время его пребывания в Гиссене в 1863—1868 г. и в Геттингене в 1868—1872 гг. В 1872 г. он скоропостижно скончался от дифтерита в возрасте 39 лет; он занимал в это время должность ректора университета.

Серия работ Клебша в интересующей нас области начинается с его обратившей на себя всеобщее внимание статьи в журнале Крелля *Über die Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie* („Применение абелевых функций в геометрии“, Crelle, т. 63, 1863—1864). Мы поясним ниже на нескольких простых примерах значение этой работы. Но прежде чем перейти к этому, считаю своим долгом перед памятью Клебша помянуть о том, сколько энергии и сил этот человек вложил в дело ши-

рочайшего распространения своих алгебраических воззрений. Клебш был, подобно Якоби, одним из тех математиков, одаренных природным педагогическим гением, которые обладали особым умением привлекать молодые таланты и делать из них самостоятельных исследователей. Наша оценка Клебша в истории математики будет неполной, если мы, наряду с его собственными работами, не примем в расчет и всех тех трудов, которые вышли из-под пера математиков, принадлежавших „школе Клебша". Я здесь назову имена только наиболее крупных учеников Клебша, а именно его ближайшего сотрудника Гордана, на работах которого я еще потом остановлюсь особо, а также Брилля и Нетера. Наконец я сам в известной степени принадлежу к этому кругу, хотя лишь сравнительно поздно, только здесь, в Геттингене, испытал на себе влияние идей Клебша, с тем чтобы впоследствии примкнуть, однако, более непосредственно к Риману. Самой ценной чертой деятельности Клебша была по-моему та моральная сила, с которой он действовал на своих учеников и благодаря которой ему удалось внушить нам, наряду с глубоким интересом к науке, доверие к собственным силам. В этом отношении он действовал на учеников совершенно иначе, чем Вейерштрасс, чье интеллектуальное превосходство скорее подавляло его слушателей, чем толкало их на путь самостоятельного творчества.

Особенное значение, в первую очередь для молодого поколения, приобрел основанный Клебшем и К. Нейманом в 1868 г. журнал *Mathematische Annalen*, ставший органом новой школы и установивший живую связь с другими математиками, придерживавшимися этого же направления, и, что особенно важно, с математиками других стран (ср. статью о научной деятельности Клебша, опубликованную в седьмом томе Mathematische Annalen некоторыми из его друзей). Когда Клебш столь неожиданно скончался в 1872 г., личные отношения между нами, выбравшими его своим руководителем, и большею частью остальных математиков носили, как это обыкновенно бывает, обостренный характер.

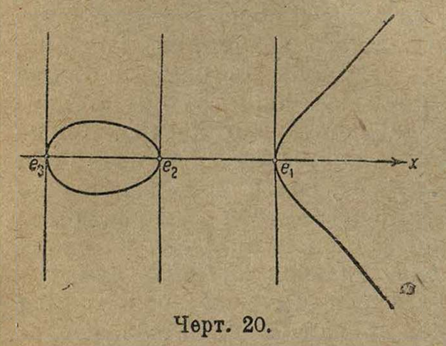
Недоверие к нам со стороны старшего поколения дошло до того, что ими был совершенно отвергнут наш журнал Mathematische Annalen, в котором мы помещали свои работы, и этот журнал нашел в Германии лишь очень узкий круг читателей среди тесно связанных между собой учеников и приверженцев Клебша. Но мы всегда старались, защищая наше научное мировоззрение, оставаться выше всех распрей и постепенно устранили эти возникшие между нами раздоры и добились всеобщего признания положительных сторон идей Клебша.

Мы достигли, благодаря этой тактике, того, что „Annalen" постепенно превратились в богатейший содержанием математический журнал нашей эпохи[1]).

[1]) Ср. перечни содержания 1—50 и 51—80 томов, изданные в 1898 и 1921 гг.

Переходя к содержанию рассматриваемых работ по существу, я начну свое изложение с элементарного примера, показывающего всю новизну и красоту хода идей Клебша и в то же время облеченного в возможно более доступную форму [1]).

Я возвращаюсь сначала к случаю *плоской кривой третьего порядка* C_3. Риманово число („жанр" кривой) p равно в этом случае единице, и соответствующие абелевы интегралы обращаются в эллиптические, так что мы здесь можем опираться на значительно более общеизвестную область.



Черт. 20.

Мы проектируем, простоты ради, кривую C_3 так, чтобы ее уравнение приняло нормальный вейерштрассовский вид (ср. стр. 71)

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

или, если это удобнее,

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Чтобы исследовать поведение кривой C_3 в бесконечности, мы приводим ее уравнение к однородному виду. Мы полагаем

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

откуда

$$x_2^2x_3 = 4x_1^3 - g_2x_1x_3^2 - g_3x_3^3.$$

При $x_3 = 0$ мы получаем $x_1^3 = 0$, так что бесконечно удаленная прямая $x_3 = 0$ является касательной перегиба кривой C_3, касающейся ее в бесконечно удаленной точке оси y, т. е. прямой $x_1 = 0$. Ось x служит так называемой „гармонической полярой", соответствующей этой точке перегиба. Начало координат на этой оси выбрано таким образом, чтобы в выражении для y^2 исчез член, содержащий x^2. Мы выяснили таким путем, в чем заключаются особенности расположения кривой C_3 относительно системы проективных координат, обусловленные той специальной формой, в которой мы написали выше уравнение этой кривой (см. черт. 20) [2]).

Совершенно очевидно, что мы имеем право говорить о соответствующем этой кривой „всюду конечном эллиптическом интеграле"

$$u = \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{y} = \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

[1]) У самого Клебша и в курсе его лекций, издававшихся Линдеманом начиная с 1875 г., еще содержатся многие лишние промежуточные вычисления, устанавливающие связь с аппаратом формул, созданным Якоби.

[2]) См. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, 3-е изд., Berlin 1926, стр. 149 и сл.

взятом вдоль нашей кривой, являющейся для нас многообразием всех действительных и комплексных точек, удовлетворяющих уравнению кривой, и за нижний предел которого мы принимаем, как указано в формуле, бесконечно удаленную точку перегиба нашей кривой. Тогда наш интеграл принимает в этой точке значение $u=0$. Если мы произведем интегрирование вдоль всей действительной ветви кривой, то мы получим действительный период ω_1. Если прибавить к u_0 действительный период ω_1 или мнимый период ω_2, или же вообще $m_1\omega_1+m_2\omega_2$, где m_1 и m_2 — какие-нибудь целые числа, то этим эквивалентным точкам плоскости переменной u соответствует одна и та же точка кривой. *Обратно, каждой точке кривой C_3* соответствует бесконечное множество значений параметра $u_0+m_1\omega_1+m_2\omega_2$, изображаемых точками плоскости u. Вся кривая отображается, таким образом, однозначно на один параллелограм периодов; это обстоятельство наглядно подтверждает конечность нашего интеграла. В самом деле, если бы этот интеграл не был всюду конечным, то отображение кривой на плоскости u должно было бы простираться в бесконечность.

Все это является пока только переводом на язык теории кривых знакомых уже нам обозначений. Мы делаем теперь следующий существенно новый шаг. Спросим себя: когда три точки $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ кривой C_3 лежат на одной прямой

$$ax+by+c=0$$

или когда выполняется соотношение $a\wp(u)+b\wp'(u)+c=0$?

Теорема Абеля утверждает, что это имеет место, если

$$u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}\equiv 0 \ (\mathrm{modd.}\ \omega_1,\ \omega_2).$$

Это получается следующим образом: линейная функция $ax+by+c$, которая должна иметь нулями точки $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, имеет в точке $u=0$ трехкратный полюс; но, согласно теореме Абеля из теории эллиптических функций, сумма нулей любой двояко-периодической функции сравнима по модулям периодов с суммой полюсов этой функции [1]).

Таким же образом мы получаем в качестве условия того, чтобы шесть точек кривой C_3 лежали на одной и той же кривой второго порядка, соотношение

$$u^{(1)}+u^{(2)}+\ldots+u^{(6)}\equiv 0 \ (\mathrm{modd.}\ \omega_1,\ \omega_2)$$

и т. д.

Из этих положений сами собой получаются в качестве почти тривиальных следствий все те теоремы о соприкасающихся кривых плоской кривой C_3, которые были выведены геометрами с таким большим трудом. Рассмотрим, например, *теорию точек перегиба*. Если три точки $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ сливаются в одну точку u,

[1]) Что это условие также и достаточно, следует из возможности выразить всякую эллиптическую функцию с заданными нулями и полюсами через $\sigma(u)$. См., например, Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen т. I, Abschn. I, Kap. 3, § 7.

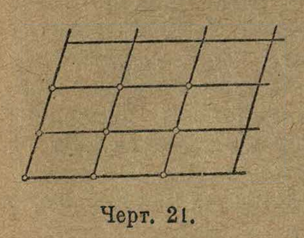
то прямая служит касательной перегиба, и мы получаем в качестве условия, характеризующего точки перегиба, соотношение

$$3u \equiv 0 \ (\mathrm{modd.}\, \omega_1,\ \omega_2),$$

откуда

$$u = \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{3},$$

где m_1, m_2 должны независимо друг от друга пробегать полную систему вычетов по модулю 3. Отсюда непосредственно следует существование девяти точек перегиба, соответствующих значениям



Черт. 21.

$$u = \begin{cases} 0, & \frac{\omega_1}{3}, & \frac{2\omega_1}{3}, \\ \frac{\omega_2}{3}, & \frac{\omega_2 + \omega_1}{3}, & \frac{\omega_2 + 2\omega_1}{3}, \\ \frac{2\omega_2}{3}, & \frac{2\omega_2 + \omega_1}{3}, & \frac{2\omega_2 + 2\omega_1}{3} \end{cases}$$

(см. черт. 21).

Мы можем теперь непосредственно указать, какие три точки перегиба каждый раз лежат на одной прямой. Будем рассматривать схему значений m_1, m_2

0,0	0,1	0,2
1,0	1,1	1,2
2,0	2,1	2,2

ради простоты как детерминат. Мы можем тогда сказать: на одной прямой лежат

три точки любой строки;

три точки любого столбца;

три точки, соответствующие любому положительному члену детерминанта (например 0,1; 1,2; 2,0);

три точки, соответствующие любому отрицательному члену детерминанта;

ибо тогда как сумма значений m_1, так и сумма значений m_2 делится на 3.

Вместе с тем мы находим, таким образом, 12 линий перегиба, и притом сразу так сгруппированных по три в каждой группе, что получаются четыре трехсторонника перегиба, найденные Гессе (см. стр. 204).

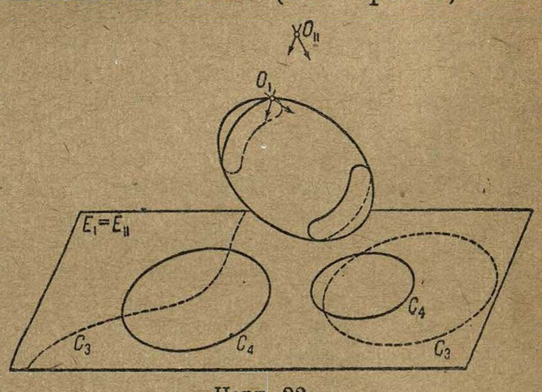
Мы вместе с тем убеждаемся в том, что уравнение девятой степени, найденное Гессе для определения точек перегиба, не представляет собой ничего принципиально нового, но тесно связано с проблемой деления на три равные части аргумента эллиптических функций.

Если вместо прямой взять произвольное коническое сечение и искать его точки пересечения с кривой C_3, то с помощью

рассуждений, аналогичных проведенным выше, непосредственно и без всяких вычислений получаются результаты Штейнера о соприкасающихся конических сечениях и т. д.

Понятие *бирационального преобразования* также очень хорошо разъясняется на примере кривых C_3.

Если две поверхности второго порядка взаимно пересекаются, то линия их пересечения представляет собой пространственную кривую четвертого порядка C_4, так как всякая плоскость пересекает эту кривую в четырех точках. Спроектируем кривую C_4 на плоскость двумя различными способами (см. черт. 22). Сначала примем за центр проекции точку O_I, лежащую на кривой C_4, и мы получим на плоскости I кривую C_3. Затем будем проектировать из произвольной точки O_{II}, не лежащей на кривой C_4, на плоскость II, и мы получим в проекции плоскую кривую C_4, которая, как можно легко доказать, имеет две двойные точки[1]).



Черт. 22.

В самом деле, если O_{II} не лежит на пространственной кривой C_4, то всякая плоскость, проходящая через O_{II}, пересекает кривую C_4 в четырех точках. Поэтому линия пересечения этой плоскости с плоскостью II пересекает проекцию кривой C_4 также в четырех точках. Если же точка O_I лежит на пространственной кривой C_4, то одна из точек пересечения плоскости, проведенной через O_I, с кривой C_4 совпадает с самой точкой O_I, и поэтому эта плоскость пересекает C_4 только в трех отличных от O_I точках. Отсюда следует, что линия пересечения этой плоскости с плоскостью проекции I пересекает проекцию кривой C_4 только в трех точках. Кривая C_3, лежащая в плоскости I, и кривая C_4, лежащая в плоскости II, находятся между собой во взаимно однозначном соответствии, ибо каждой точке плоской C_4 соответствует определенная точка пространственной C_4, а этой последней однозначно соответствует точка кривой C_3, и обратно.

Мы видим, таким образом, что порядки двух кривых, находящихся между собой в бирациональном соответствии, вполне могут быть отличны друг от друга.

Здесь я считаю необходимым в целях устранения естественного и очень распространенного в литературе недоразумения сделать следующее замечание. Можно, конечно, и две плоскости в целом бирационально отображать одну на другую;

[1]) На чертеже обе плоскости E_I и E_{II} совпадают.

тогда и две кривые, лежащие в этих двух плоскостях, приводятся тем самым в бирациональное соответствие между собой. Такие бирациональные преобразования двух плоскостей достигаются с помощью так называемых *преобразований Кремона* (Cremona), названных по имени итальянского исследователя, поддерживавшего личные сношения также и с Клебшем.

Однако абсолютно неправильным было бы обратное положение. Взаимно однозначное соответствие между двумя плоскими кривыми ни в коем случае не влечет за собой установления взаимно однозначного соответствия между их плоскостями. Выберем, например, какую-нибудь постоянную поверхность второго порядка F_2, проходящую через пространственную кривую C_4 и не содержащую центра проекции O_{II}. Мы можем тогда с помощью обеих проекций, которыми мы только что пользовались, отобразить друг на друга и плоскости I и II, на которых наши проекции лежат. Каждой точке плоскости I соотв тствует одна и только одна точка поверхности F_2, а этой последней — определенная точка плоскости II. Но, обратно, каждой точке плоскости II соответствуют две точки поверхности F_2, а поэтому и две точки плоскости I. Мы видим, таким образом, что бирациональное преобразование двух плоских кривых может содержаться в многозначном соответствии обеих плоскостей.

Я останавливаюсь на этом так подробно ввиду того, что недоразумение это, основываясь на котором считают, что идея Римана содержится уже в теории Кремона, все еще встречается в литературе [см., например, предисловие к книге Appell-Goursa, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales („Теория алгебраических функций и их интегралов", Париж 1895)].

Все кривые, получающиеся одна из другой путем бирационального преобразования, объединяются, согласно Риману-Клебшу, в одну категорию кривых. Эти кривые имеют в частности *одно и то же* риманово число p. Таким образом к числам, характеризующим кривую: порядку n, классу k, числу двойных точек d, числу точек возврата r, числу двойных касательных t и числу касательных перегиба w, присоединяется еще одно характеристическое число: p — *жанр* кривой.

Это число p связано с уже знакомыми нам геометрическими величинами, перечисленными выше, формулой

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$$

или двойственной формулой

$$p = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - w.$$

При этом мы предполагаем, как это всегда делают при выводе обычных формул Плюкера, что кривая C_n имеет в качестве особых точек только простые двойные точки, простые точки

заострения и т. д. Для рассмотренного нами только что случая плоской C_4 мы имеем $d=2$, $r=0$, так что $p=1$, и это же значение число p имеет для кривой C_3, если число двойных точек этой последней равно нулю.

Рассуждения, проведенные нами выше для кривых третьего порядка, могут быть соответственным образом распространены на любые алгебраические кривые n-го порядка, заданные уравнением $f(x, y)=0$, причем вместо одного всюду конечного эллиптического интеграла получаются p всюду конечных абелевых интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Я могу только в кратких чертах описать существующее здесь положение вещей.

Эти p всюду конечных интегралов записываются в виде

$$\int \frac{\varphi(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}} dx,$$

где $\varphi(x, y)$ означает полином $(n-3)$-й степени, имеющий все двойные точки и точки возврата кривой простыми нулями. Можно было бы на первый взгляд предположить, что этот интеграл обращается в бесконечность в тех точках, в которых $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в нуль. Однако в этих точках обращается в нуль также и dx (точки с вертикальной касательной). Чтобы убедиться в конечности интеграла в этих точках, поступим так: вдоль кривой имеет место соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f_x dx + f_y dy = 0$$

или

$$\frac{dx}{f_y} = -\frac{dy}{f_x};$$

если рассматриваемая точка не является особой точкой и если $f_y=0$, то $f_x \neq 0$ и подинтегральное выражение остается конечным. Точно так же наш интеграл остается конечным в бесконечно удаленных точках кривой C_n, ибо так как степень многочлена $\varphi(x, y)$ равна $n-3$, а степень f_y, вообще говоря, равна $n-1$, то наш интеграл ведет себя в бесконечности, как интеграл $\int \frac{dx}{x^2}$, и именно поэтому степень $\varphi(x, y)$ не должна превышать $n-3$. Многочлен n-й степени от двух переменных x, y содержит $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ постоянных, входящих в него линейно.

Заменяя n через $n-3$ и вычитая число двойных точек и точек возврата, мы получаем $\frac{(n-2)(n-1)}{2} - d - r = p$ произвольных постоянных, что и дает нам p всюду конечных интегралов. Мы выбираем поэтому степень φ в точности равной $n-3$.

Каждый из p конечных интегралов имеет $2p$ модулей периодичности. Чтобы не слишком отдалиться от конкретного и оставаться

по возможности более наглядным, я поясню связь теоремы Абеля с теоремами о точках пересечения на случае плоских C_4, не имеющих двойных точек. В этом случае $p=3$ и $\varphi(x, y) = ax+by+c$. Мы имеем здесь, таким образом, три всюду конечных интеграла

$$u_1 = \int \frac{x\,dx}{f_y}, \quad u_2 = \int \frac{y\,dx}{f_y}, \quad u_3 = \int \frac{dx}{f_y}.$$

Кривая C_n пересекает C_4 в $4n$ точках. Спросим себя, при каком условии $4n$ точек кривой C_4 лежат на одной и той же C_n?

Согласно теореме Абеля, должны иметь место (при удачном выборе нижних пределов) сравнения

$$u_1^{(1)} + \ldots + u_1^{(4n)} \equiv 0 \ (\text{modd.}\ \omega_{11}, \ldots, \omega_{16}),$$

$$u_2^{(1)} + \ldots + u_2^{(4n)} \equiv 0 \ (\text{modd.}\ \omega_{21}, \ldots, \omega_{26}),$$

$$u_3^{(1)} + \ldots + u_3^{(4n)} \equiv 0 \ (\text{modd.}\ \omega_{31}, \ldots, \omega_{36}).$$

Дальше следовало бы выяснить, при каких условиях эти три уравнения независимы друг от друга. В остальном же при отыскании соприкасающихся кривых нам пришлось бы исследовать эти сравнения, как и выше в случае C_3.

Мы получаем, таким образом, хотя бы некоторое представление о всех этих вопросах, заполнивших впоследствии значительную часть математической литературы и приведших к изящнейшим теоремам об алгебраических кривых.

Я продолжаю изложение содержания работы Клебша от 1863 г. Сначала я должен разъяснить некоторые, чисто формальные вещи, а именно употребляемую Клебшем однородную форму записи интегралов первого рода, соответствующих кривой C_4. Если ввести однородные координаты, то интегралы

$$\int \frac{x\,dx}{f_y}, \quad \int \frac{y\,dx}{f_y}, \quad \int \frac{dx}{f_y}$$

принимают симметричный вид, при котором из самих выражений этих интегралов почти непосредственно следует, что эти интегралы всюду конечны. Мы полагаем

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad f(x, y) = \frac{F(x_1, x_2, x_3)}{x_3^4}.$$

Тогда

$$dx = \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{x_3^2}, \quad f_y = \frac{1}{x_3^4}\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \frac{x_2}{x_3}} = \frac{1}{x_3^3}\frac{\partial F}{\partial x_2}.$$

Введя сокращенное обозначение

$$\frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = d\tilde{\omega},$$

получаем

$$u_i = \int x_i d\bar{\omega} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

В этом состоит первое формальное достижение. Однако в выражении $d\bar{\omega}$ переменной x_2 отдается кажущееся преимущество. Мы сейчас убедимся, что эта ассиметрия может быть легко устранена.

Вдоль C_4 имеет место соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3 = 0.$$

С другой стороны, в силу теоремы Эйлера

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 4F = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2} : \frac{\partial F}{\partial x_3} = (x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2) : (x_3\, dx_1 - x_1 dx_3) : (x_1 dx_2 - x_2\, dx_1).$$

Мы можем поэтому записать $d\bar{\omega}$ в трех различных видах:

$$d\bar{\omega} = \frac{x_k\, dx_l - x_l\, dx_k}{F_{x_m}} \qquad (k,\ l,\ m = 1, 2, 3).$$

Эти три выражения Клебш (следуя Аронгольду) соединяет вместе следующим образом:

$$d\bar{\omega} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & x_1 & dx_1 \\ c_2 & x_2 & dx_2 \\ c_3 & x_3 & dx_3 \end{vmatrix}}{\sum\limits_{i=1}^{3} c_i F_{x_i}},$$

причем c_i являются совершено формальными величинами, которыми можно располагать по произволу. Полагая в этом выражении

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 1, \\ c_2 &= 0, \\ c_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ или } \left\{\begin{aligned} &0, \\ &1, \\ &0, \end{aligned}\right. \text{ или } \left\{\begin{aligned} &0, \\ &0, \\ &1, \end{aligned}\right.$$

мы получим наши три первоначальных выражения для $d\bar{\omega}$. Теперь мы можем записать наши интегралы в форме

$$u_i = \int x_i \frac{|\, c\ x\ dx \,|}{\sum\limits_{\lambda=1}^{3} c_\lambda F_{x_\lambda}} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Мы этим достигли всего, что требовалось в формальном отношении. Симметрия и конечность рассматриваемых интегралов

обнаруживаются теперь непосредственно. В бесконечно удаленных точках кривой C_4, т. е. при $x_3=0$, все остается конечным, так же как, например при $x_1=0$ или $x_2=0$. Далее уравнение

$$\sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda F_{x_\lambda}=0$$

есть уравнение поляры точки (c_1, c_2, c_3) относительно кривой $F=0$ и имеет место поэтому в точках касания касательных, проведенных из точки (c_1, c_2, c_3) к кривой. Соответственным выбором точки (c_1, c_2, c_3) мы можем всегда устранить всякие сомнения в конечности какого-нибудь из интегралов u_1 или u_2, или u_3 в любой заданной точке.

Я еще укажу, как выражаются для кривой n-го порядка $F=0$, имеющей d двойных точек и r точек заострения (Клебш ограничивается этим случаем), соответствующие p всюду конечных интегралов, где $p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-r$. Эти интегралы записываются в виде

$$u_1=\int \varphi_1\, d\tilde{\omega}, \quad \ldots, \quad u_p=\int \varphi_p\, d\tilde{\omega},$$

где, как и выше,

$$d\tilde{\omega}=\frac{|\, c\ x\ dx\,|}{\sum\limits_{\lambda=1}^{3} c_\lambda F_{x_\lambda}}.$$

При этом $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ означают многочлены $(n-3)$-й степени, однородные относительно x_1, x_2, x_3, обращающиеся в нуль в двойных точках и точках заострения. Такой однородный многочлен φ содержит в точности p линейно независимых произвольных постоянных. Среди однородных многочленов (или форм), удовлетворяющих этим условиям, следует выбрать только p линейно независимых между собой и обозначить их через $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Каждая такая кривая φ имеет с кривой C_n ровно $n(n-3)$ точек пересечения и, помимо двойных точек и точек возврата кривой C_n, обращается в нуль еще в $n(n-3)-2d-2r=2p-2$ точках.

Наши формулы сохраняют свою справедливость, разумеется, и при $p=1$, но в этом случае множители φ совершенно отпадают, и мы получаем просто

$$u=\int d\tilde{\omega},$$

что я рекомендую проверить на примере вейерштрассовской нормальной формы эллиптического интеграла.

Заметим еще, что из

$$u_1=\int \varphi_1 d\tilde{\omega}, \quad \ldots, \quad u_p=\int \varphi_p\, d\tilde{\omega}$$

следует, что

$$du_1 : du_2 : \ldots : du_p = \varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p.$$

Употребляемая здесь буква φ стала общепринятой и была выбрана еще Риманом. Это имеют в виду, когда просто говорят, о „φ-формах, принадлежащих данному алгебраическому образу“.

Я был вынужден сделать это небольшое отступление формального характера, так как знакомство со смыслом приведенных формальных обозначений необходимо, чтобы иметь возможность разобраться в примыкающей к Клебшу литературе и в первую очередь в изданных Линдеманом в 1875/76 г. „Vorlesungen über Geometrie“ („Курс лекций по геометрии“).

При этом следует освободиться от представления, что однородная форма записи является чем-то неопределенным или во всяком случае трудно понятным.

Все сводится только к тому, чтобы применять те же обозначения, которые обычно приняты в проективной геометрии, или, выражаясь алгебраически, в теории инвариантов тернарных форм. В особенности следует хорошо усвоить тот факт, что интегралы *u* для всякой конкретной начерченной кривой имеют совершенно конкретное значение и все теоремы о соприкасающихся кривых и т. д., которые вытекают из теории этих интегралов, могут быть подтверждены на чертеже. Такого рода работу я, например, проделал в „Annalen“ (т. 7, 1874) для кривых C_3, или, точнее, что является более удобным, для кривых третьего класса, совершив предварительно двойственное преобразование. При этом я интерпретировал мнимые элементы кривой с помощью тех „нового типа“ римановых поверхностей, о которых я говорил в четвертой главе [1]). Точно так же и для C_4, или кривых четвертого класса, я провел всю теорию на чертеже. Эти работы помещены в „Annalen“ (т. 10, 11, 1876—1877) [2]). Я, однако, не могу разъяснить здесь содержание их, так как и случая $p = 3$ я коснулся лишь крайне поверхностно.

Все законы расположения двойных касательных принимают при этом такой же простой элементарно-арифметический характер, какой имеют, как мы показали выше, законы расположения точек перегиба для кривых C_3.

Вернемся к Клебшу. Он не удовольствовался геометрической интерпретацией результатов Римана и задался целью дать на этой геометрически-алгебраической основе новое обоснование теории абелевых функций. Результатом явилось сочинение Клебша и Гордана *Theorie der Abelschen Funktionen* („Теория абелевых функций“), изданное в 1866 г.

Чтобы в полной мере оценить ту огромную работу, какая была проделана в этом произведении, следует помнить, что тогда еще не существовало вейерштрассовой теории абелевых

---

[1]) См. выше стр. 176 и сл.; Klein, Ges. Abh., т. 2, стр. 89 и сл.
[2]) Ges. Abh., т. 2, № XXXVIII—XLI.

функций, которая в деталях отличается большей простотой и систематичностью и значительно большей строгостью, между тем как основа теории Римана — вывод теорем существования из принципа Дирихле — считалась не только чуждой природе предмета, но и совершенно непрочной. Особо следует отметить восторженное отношение к проективной геометрии инвариантов линейных преобразований, как преддверию к бирациональным преобразованиям, которым проникнута эта книга. Характерна заключительная фраза предисловия: „Наконец и эта область (учение об абелевых функциях) включается в те ветви новейшей алгебры, которым, очевидно, предназначено стать центром всего развития современной математики“.

Я здесь не могу подробно останавливаться на содержании этого произведения и отсылаю читателя к подробному обзору Брилля и Нетера в третьем томе Jahresberichte der D. M. V. (1894), в котором изложено с общей, объединяющей точки зрения содержание упомянутых относящихся сюда работ. Однако я должен здесь рассказать о Гордане, который по побуждению Клебша переехал в Гиссен, чтобы стать помощником Клебша в его работе по проникновению в мир идей Римана. Трудно разграничить долю участия каждого из них в их общем труде. Гордан родился в 1837 г. в Бреславле. Особенно сильный толчок ему дало изучение трудов Якоби. Он провел один год в Геттингене (1862/63). Римана, однако, он видел очень короткое время, так как через несколько недель Риман заболел и прервал свои занятия. Частным образом Гордан пытался, совместно с Томе (Thomae) и Шерингом, проникнуть в теорию Римана. Однако этот мир идей не соответствовал складу ума Гордана. Он, по характеру своего дарования, чувствовал больше влечения к формальной стороне теории инвариантов, с которой он ознакомился благодаря Клебшу. В этой области он достиг вскоре крупных успехов и до своей смерти (1912 г.) оставался признанным руководителем в этой сфере. С именем Гордана связана важная теорема о том, что каждой бинарной форме $f(x_1, x_2)$ соответствует конечная система рациональных инвариантов и ковариантов, через которые могут быть выражены в рациональной и целой форме все остальные рациональные инварианты и ковариантны (1868/69, Crelle, т. 69, стр. 323 и сл., Math. Annalen, т. 2, стр. 227 и сл.). Однако связи этих вопросов с теорией абелевых функций Гордан больше не касался. Научная биография Гордана составлена Нетером (Math. Annalen, т. 75, 1914).

Влияние сочинения Клебша-Гордана сказалось сначала не столько в области абелевых функций, сколько в направлении работ чисто алгебраического характера. Этому способствовали склонность к систематизации и недостаточная разносторонность знаний в широких математических кругах. Была поставлена задача исчерпывающим образом разрешить весь круг вопросов, который возник в теории алгебраических кривых в связи с вы-

делением на первый план бирациональных преобразований. Важнейшей из работ этого направления является статья Брилля и Нетера *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung auf Geometrie* („Об алгебраических функциях и их применениях в геометрии“), Math. Annalen, т. 7, 1847. [Мы теперь выразились бы так: изучение „поля“ $R(\zeta, z)$ независимо от обеих „произвольных“ функций ζ и z этого поля.] Интересно сопоставить название работы Клебша от 1863 г. „О применении абелевых функций к геометрии“ с созвучным и характерно отличающимся названием работы Брилля и Нетера: „Об алгебраических функциях и их применении в геометрии“. Можно сказать, что в этой работе все то, что соответствует „теореме Абеля“, обосновывается путем строгого проведения алгебраического процесса элиминирования, тогда как дальнейшие следствия, связанные с периодичностью абелевых интегралов, остаются в стороне.

Мы формулируем теперь важную теорему, полученную алгебраическим путем Бриллем и Нетером (которую я, к сожалению, не могу здесь пояснить), так называемую *теорему Римана-Роша*. Эта теорема выясняет число произвольных постоянных, содержащихся в алгебраических функциях $F(\zeta, z) = 0$, которые нигде, кроме m заданных точек кривой C_n, не обращаются в бесконечность. Согласно этой теореме, самая общая алгебраическая функция, удовлетворяющая этому условию, имеет вид

$$F = c_1 F_1 + c_2 F_2 + \ldots + c_\mu F_\mu + c_{\mu+1},$$

причем

$$\mu = m - p + \tau,$$

где τ означает число „линейно-независимых“ φ, обращающихся в нуль в данных m точках, а p есть жанр кривой. Поясню эту теорему на одном примере.

Пусть дана кривая C_4, не имеющая двойных точек. В этом случае $p = 3$ и кривые φ являются прямыми линиями.

При $m = 1$ имеем $\tau = 2$ и $\mu = 1 - 3 + 2 = 0$,
„ $m = 2$ „ $\tau = 1$ и $\mu = 0$,
„ $m = 3$ „ $\tau = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ и $\mu = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$.

Таким образом во всех трех случаях, в которых $\mu = 0$, не существует алгебраической функции, которая обращалась бы в бесконечность только в заданных точках кривой. Если $m = 3$, то такая функция существует тогда и только тогда, когда заданные три точки лежат на одной прямой. Мы можем в этом случае легко построить такую функцию. Пусть заданные три точки лежат на прямой $v = 0$. Прямая v пересекает данную кривую еще в одной, четвертой точке. Проведем через эту последнюю точку другую прямую $u = 0$; тогда функция

$$F_1 = \frac{u}{v}$$

обладает требуемыми свойствами.

Мы видим, какую роль функция φ играет при отыскании инвариантов бирациональных преобразований.

Но вот пробивает себе дорогу новая идея поразительной красоты и глубины, ведущая свое происхождение от Римана и полностью разработанная Г. Вебером и Нетером. Это новое создание математического гения задним числом подтвердило всю справедливость заключительной фразы предисловия к книге Клебша-Гордана и притом в степени, в которой авторы в свое время безусловно этого не ожидали.

Представим себе пространство $p-1$ измерений и обозначим его однородные координаты через $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Перенесем в это пространство нашу кривую $C_n = f(\zeta, z) = 0$, или иначе

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

с помощью бирационального преобразования, а именно понимая под $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ соответствующие φ-формы, так что каждой точке кривой C_n однозначно соответствует точка $(p-1)$-мерного пространства R_{p-1}. Мы получаем, таким образом, кривую C_{2p-2}, ибо каждая функция φ имеет на кривой $2p-2$ собственных нулей (см. стр. 350). Мы заменяем теперь изучение первоначальной кривой C_n исследованием полученной таким путем кривой C_{2p-2}, которую будем называть *нормальной кривой*.

Мы сейчас убедимся, какую громадную пользу приносит переход к „нормальной кривой“. Сначала же я хочу привести несколько примеров:

$p=3$. Нормальной кривой является та плоская кривая C_4, из которой мы исходили раньше; в самом деле, мы имеем для этого случая

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

$p=4$. Нормальная кривая представляет собой кривую C_6 пространства R_3. Можно доказать, что она является линией пересечения поверхности второго порядка с поверхностью третьего порядка и любая такая линия является нормальной кривой четвертого жанра.

$p=5$. Нормальная кривая представляет собой кривую C_8 пространства R_4, являющуюся линией пересечения трех трехмерных многообразий второго порядка.

$p=2$. В качестве нормальной кривой мы получаем в этом случае дважды покрытую прямую с шестью точками ветвления, так что здесь мы имеем не одно-однозначное, но одно-двузначное соответствие между исходной кривой и принадлежащей ей нормальной кривой. Чтобы сделать это соответствие одно-однозначным, мы должны представить себе получающуюся прямую как „дважды покрытое“ точечное многообразие.

Полученную нормальную кривую, например кривую C_6 пространства R_3 или кривую C_8 пространства R_4, мы могли бы теперь проектировать на плоскость, как это делали еще Клебш

и Гордан. Однако мы предпочитаем изучать непосредственно нашу нормальную кривую в том многомерном пространстве, в котором она помещена; нас побуждает к этому то обстоятельство, что кривые C_{2p-2} пространства R_{p-1} вполне определены с точностью до линейных преобразований однородных координат $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Чтобы в этом убедиться, лучше всего воспользоваться интегралами первого рода, инвариантность которых при любом бирациональном преобразовании исходной кривой является более очевидной.

Если мы выберем какие-нибудь p линейно-независимых интегралов первого рода $u_1, \ldots, u_p$, то (как можно доказать методом Римана, охватывающим сразу все частные случаи) всякий другой интеграл первого рода может быть представлен в виде

$$U = c_1 u_1 + \ldots + c_p u_p + C.$$

Диференцируя по $\tilde{\omega}$ (см. стр. 350), мы получаем

$$\Phi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_p\varphi_p.$$

Поэтому если при каком-нибудь бирациональном преобразовании данной кривой система p форм $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ преобразуется в систему $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$, то мы имеем

$$\Phi_1 = c_{11}\varphi_1 + \ldots + c_{1p}\varphi_p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Phi_p = c_{p1}\varphi_1 + \ldots + c_{pp}\varphi_p.$$

Таким образом при всяком бирациональном преобразовании исходной кривой однородные координаты пространства R_{p-1} подвергаются просто *линейному преобразованию*.

Этот путь возвращает нас, таким образом, к обычной теории линейных инвариантов или проективной геометрии пространства $p-1$ измерений. И мы делаем отсюда следующий вывод: для того чтобы полностью выяснить, что остается инвариантным при любом бирациональном преобразовании, достаточно исследовать нормальную кривую, например C_4 в пространстве R_2, C_6 — в пространстве R_3, C_8 — в R_4 и т. д., с точки зрения теории инвариантов линейных преобразований. Случай $p=2$, который также можно соответственным образом включить в эту общую теорию, я теперь ради краткости оставляю в стороне.

Только теперь я могу коснуться теории, которая, когда мы приступили к разработке этих вопросов, долго оставалась недоступной нашему пониманию. Риман утверждает, что при всяком бирациональном преобразовании кривой остаются неизменными не только число p, но (при $p>1$) еще $3p-3$ постоянных, которые он называет *модулями* кривой.

Теперь мы можем сказать, что эти модули являются не чем иным, как теми абсолютными инвариантами, которыми обладает

нормальная кривая C_{2p-2} в отношении линейного преобразования ее однородных координат.

Что действительно C_{2p-2} имеет ровно $3p-3$ инвариантов по отношению к линейным преобразованиям, я могу здесь показать только на отдельных примерах путем простого перечисления.

$p=3$. Кривая C_4 содержит 14 постоянных (уравнение $f=0$ имеет 15 членов). Общее проективное преобразование пространства R_2 содержит восемь параметров. Поэтому число проективных инвариантов кривой, равное разности между числом параметров кривой и числом параметров общего проективного преобразования, равно

$$6=3p-3.$$

$p=4$. Нормальная кривая C_6 является в этом случае линией пересечения поверхности второго порядка $F_2=0$ с поверхностью третьего порядка $F_3=0$. Поверхность $F_2=0$ содержит 9 постоянных, поверхность $F_3=0$ содержит 19 постоянных. Но мы можем заменить поверхность $F_3=0$ поверхностью

$$F_3-(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)F_2=0$$

и устранить этим путем четыре члена уравнения этой поверхности. Таким образом остаются только 15 постоянных. В качестве параметров общего проективного преобразования следует в этом случае вычесть 15 постоянных. В результате остается

$$9+15-15=3p-3$$

постоянных.

$p=5$. Кривую C_8 в R_4 можно получить в качестве линии пересечения трех поверхностей второго порядка $F_2'=0$, $F_2''=0$, $F_2'''=0$. Многочлен F_2 в пространстве R_4 имеет $\frac{5\cdot 6}{2}=15$ членов, так что поверхность $F_2'=0$ содержит 14 постоянных. Но мы можем заменить, например, многочлен F_2' многочленом $F'-c''F''-c'''F'''$. Поэтому остается только по 12 постоянных для каждой поверхности. Общее проективное преобразование содержит 24 постоянных. Отсюда получается, что число остающихся инвариантными постоянных равно

$$12\cdot 3-24=3p-3.$$

Введение этой нормальной кривой, определяемой с помощью φ-форм, завершило теорию алгебраических образов и придало этой теории гармоническую цельность и совершенство. Снова подтвердилось, что над всеми проблемами этой области математики господствует теория линейных инвариантов, если только подойти к ним надлежащим образом.

Рассказав об этих крупных успехах, которых достигли, опираясь на Римана, Клебш и его ученики в деле разработки учения об алгебраических кривых в связи с теорией абелевых интегралов, я продолжу теперь свое описание общего хода исторического развития этой области.

Очевидно, дальнейшее развитие теории могло итти в двух направлениях:

1. В направлении исследования нормальной кривой C_{2p-2}, образуемой φ-формами в пространстве R_{p-1}. Здесь речь идет о том, чтобы развить на чисто алгебраической основе теорию линейных инвариантов и проективную геометрию пространства R_{p-1} и отсюда притти к синтетическому построению тэта-рядов. Некоторые из первых шагов в этом направлении были между прочим сделаны мною для случаев $p=2$, 3 в Math. Annalen, тт. 27, 32, 36 (Ges. Abh., т. 3, Nr. XCV, XCVI, XCVII).

2. Обратно, можно было бы также исходить и от тэта-рядов, поднимаясь от них путем формальных вычислений к алгебраическим образам. Из большого числа исследователей, работавших в этом направлении, я могу здесь назвать только некоторых, как, например, Вебера, Нетера, Шоттки, Прима и Крацера, Пуанкаре, Виртингера.

Оба эти направления должны в конце концов сойтись между собой. Однако, как бы ясными ни были конечные цели этих исследований, теория еще далека от завершения, в чем повинен недостаток подходящих рабочих сил. Здесь произошел за последние годы удивительный поворот. В мои студенческие годы абелевы функции (под влиянием унаследованных от Якоби традиций) считались неоспоримой вершиной математики. Каждый из нас естественно испытывал честолюбивое стремление самостоятельно продвинуться дальше в этой области. А теперь? Молодое поколение вряд ли вообще знакомо с абелевыми функциями.

Как это произошло? В истории математики, как и в истории других наук, можно часто наблюдать подобное явление. Как только какие-нибудь внутренние или внешние причины приводят к постановке новых проблем, новое привлекает к себе с исключительной силой молодых исследователей и повергает в забвение старые вопросы. Здесь сказывается также и то, что эти старые проблемы именно оттого, что они уже послужили предметом многочисленных исследований, требуют для овладения ими все большего и большего количества работы. Это неудобно, и уже поэтому предпочитают браться за области, значительно менее разработанные и требующие поэтому значительно меньшей подготовки, будь это формальная аксиоматика, теория множеств или что-нибудь другое.

Ничего другого не остается делать, как посвятить этим временно устаревшим областям подытоживающие и исчерпывающие обзоры в энциклопедии, ежегодниках и т. д. или же в отдельных монографиях и составить их так, чтобы они могли послужить исходным пунктом дальнейшего развития этих областей, когда судьба окажется к ним более благосклонной.

Я однако остановлюсь еще на двух направлениях, в которых развивалась теория алгебраических образов на основе работ

Римана и Клебша. Разумеется, я могу здесь коснуться только отдельных, наиболее крупных результатов.

1. *Теория пространственных алгебраических кривых.* Задача здесь заключалась в том, чтобы перечислить все пространственные кривые данного порядка. За решение этой задачи была в 1882 г. назначена Берлинской академией премия имени Штейнера. И это оказалось одним из тех редких случаев, когда назначение премии действительно увенчалось большим успехом. Были представлены две работы, которые до сих пор могут считаться высшим достижением в области исследования алгебраических пространственных кривых. Это — работа М. Нетера (Abh. d. Berliner Akad., 1882; Crelle, т. 93) и работа Альфана (Journal de l'École Polytechnique, 52, 1882; Oeuvres, т. III, стр. 261 и сл.).

Что в соревновании на получение премии Берлинской академии принимал участие француз, является крайне знаменательным. Это показало, что молодое французское поколение полностью овладело достижениями немецкой математики.

Плеяда французских математиков, выдвинувшихся в этой области, открывается Альфаном в 1870 г., и вскоре затем, в 1880 г., она насчитывает в своих рядах уже такие имена, как Пикар и Пуанкаре. В этих исследователях соединяются тенденции двух французских школ — школы Шаля и школы Эрмита. О Шале, как о геометре, мы уже говорили раньше. В качестве руководителя кафедры высшей геометрии в Сорбонне он изложил в 1850 г. теорию алгебраических кривых в таком духе, что, заимствовав у анализа некоторые основные понятия (само определение кривых, теоремы Безу), он в дальнейшем оперировал непосредственно с кривой самой по себе, не прибегая к помощи формул. Его рассуждения, таким образом, опираясь на аналитическое основание, облекались в процессе дальнейшей разработки в чисто геометрическую форму. В этом заключался так называемый *смешанный метод* („méthode mixte"), нашедший вскоре много последователей и за границей. В первую очередь здесь следует назвать Цейтена (Zeuthen) (Копенгаген) и Кремона (Рим). Эрмит же, о работах которого по алгебре, теории чисел и теории функций нам уже также приходилось неоднократно упоминать, уделял особенное внимание аналитической теории тэта-функций. Занимая так же, как и Шаль, кафедру в Сорбонне, он постоянно возвращался к этой теории в своей педагогической деятельности. Геометрическое значение абелевых функций никогда не интересовало Эрмита. Из числа его учеников я здесь упомяну только о Камилле Жордане, на работах которого мне скоро предстоит подробно остановиться.

2. Распространение результатов на *алгебраические поверхности* $F(x, y, z) = 0$ (т. е. двумерные или, точнее, четырехмерные многообразия, ибо переменные могут принимать также и комплексные значения).

Началом и здесь также является результат из области трансцендентного анализа, а именно замечание, сделанное Клебшем в 1868 г. в коротенькой заметке в Comptes rendus (т. 67) о том, что для алгебраической поверхности с простыми особыми точками можно составить линейное семейство принадлежащих поверхности всюду конечных двойных интегралов вида

$$\int\int \frac{\varphi_{n-4}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\, dx\, dy$$

и число p членов фигурирующих здесь функций φ инвариантно при всяком бирациональном преобразовании поверхности. (Это число p называется „жанром поверхности".)

Клебш сам ограничился впоследствии изучением простейших случаев таких бирациональных преобразований, чтобы показать, какую пользу можно отсюда извлечь для „геометрии на поверхности". Он в частности рассматривал случай, когда поверхность может быть бирационально отображена на плоскость и когда все вопросы, касающиеся кривых на поверхности, можно изучать на плоскости. Мы впоследствии познакомимся с одним простейшим примером этого рода.

Общий вопрос о бирациональных преобразованиях поверхности в качестве алгебраической проблемы был передан Клебшем уже в 1869 г. Нетеру. Педагогическая натура Клебша как нельзя лучше проявилась в этом факте; он сам, по его собственному признанию, не смог бы как следует сосредоточиться на этой проблеме. И Нетер на самом деле вскоре опубликовал, главным образом в Mathematische Annalen, многочисленные работы по этой дисциплине, достигшей в настоящее время крупных размеров; мы должны считать Нетера фактическим творцом этой области. Дальнейшей разработкой общей проблемы бирационального преобразования поверхностей занималась, главным образом, молодая итальянская школа, в составе Сегре (Segre), Веронезе (Veronese), Энриквеса (Enriques), Кастельнуово (Castelnuovo) и Севери (Severi). Вначале они применяли при исследовании алгебраически-геометрические методы, а впоследствии, когда в Париже выдвинулся Пикар, стали пользоваться также и трансцендентными средствами.

Появление итальянцев в рядах крупнейших математиков имеет своей общей причиной тот исторический закон, что наука постоянно переходит от одной нации к другой, как я в свое время уже говорил об этом. Если одна нация проявила в каком-нибудь направлении чрезвычайную научную активность, за которой последовал период утомления, то ее место необходимо должна занять другая. Конкретно же оживленное участие итальянцев в развитии нашей проблемы было вызвано деятельностью Кремона. Кремона, бывший, как раньше было уже мной упомянуто, учеником Шаля, пользовался в Италии большим влиянием в качестве педагога и исследователя. Кремона, родившийся

в 1830 г., принадлежит трехзвездию Бетти (Betti), Бриоши (Brioschi) и Кремона, которые начиная с 1860 г. посвятили свою деятельность приобщению молодого, только что еще объединенного итальянского государства к современной математической науке и тотчас же вступили в тесную связь с немецкими, английскими и французскими математиками, работавшими в том же направлении. К этому времени относится, таким образом, вступление Италии в международное сотрудничество на математическом поприще. Я называю именно этих трех математиков, ибо они во многих случаях проявили свою активность и в качестве организаторов дела народного образования. В чисто научном отношении я должен был бы наряду с ними поставить во всяком случае также и Бельтрами, работавшего, однако, исключительно в качестве научного исследователя. Бриоши на посту директора Миланской политехнической школы, Кремона, занимавший такой же пост в Риме, где политехническая школа была объединена с естественно-научным факультетом университета, и Бетти в качестве директора пизанской Scuola Normale Superiore (учебное заведение, готовившее педагогов) развили также и большую практическую деятельность. Бетти работал также некоторое время в министерстве народного образования в качестве помощника статс-секретаря; Кремона занимал сам короткое время пост министра народного образования.

Мне особенно хочется остановиться на этом факте, тем более, что у нас в Германии назначение математика на такой влиятельный пост все еще является немыслимым. Министрами у нас назначают только юристов. „В Германии — сказал как-то Прингсгейм — богиня правосудия имеет скверную привычку класть министерские портфели только в колыбели своих отпрысков“.

Кремона в частности придал университетским математическим курсам в Италии такую форму, что в лекциях для начинающих отводилось почетное место проективной геометрии в соединении с упражнениями по начертательной геометрии. На этой почве в Италии особенно расцвели геометрические исследования, так что на протяжении последних десятилетий Италия играет в этой области руководящую роль.

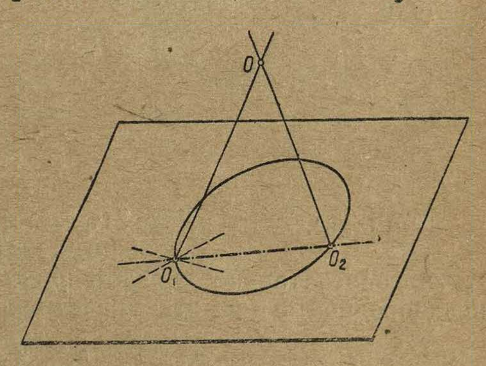
Итальянцы применяют при интересующих нас здесь алгебраических исследованиях „méthode mixte“. Алгебраические многообразия многомерных пространств ими исследуются методами „проектирования и сечений“. Все их исследования в известной степени наглядны и очень убедительны, но по своей форме большей частью не строги. Цейтен в предисловии к своему учебнику о методах исчислительной геометрии говорит: „Впрочем правильному применению методов можно научиться только применяя их на разнообразных примерах“.

Мне здесь совершенно невозможно останавливаться на содержании этого, столь разросшегося, учения о бирациональных преобразованиях алгебраических поверхностей; я должен ограничиться ссылкой на относящийся сюда обзор в третьем томе

энциклопедии, составленный Кастельнуово и Энриквесом (Enzyklop. III, C 6 b).

Остановлюсь только в заключение на простейшем случае бирационального соответствия между двумя поверхностями, а именно на *стереографической проекции поверхности* F_2 *на плоскость*. Я выбираю этот пример с целью дать наглядное представление о сущности дела. Для того чтобы существенные с алгебраической точки зрения величины оказались вещественными, мы проектируем не шар, как это делали уже в древности, но однополостный гиперболоид.

Через любую точку O поверхности проходят две прямолинейные образующие, пересекающие плоскость проекции в точках O_1 и O_2, как схематически указано на черт. 23. Соединяющая эти две точки прямая $\overline{O_1O_2}$ представляет собой линию пересечения плоскости проекции с касательной плоскостью к гиперболоиду в точке O.



Черт. 23.

Спроектируем теперь из точки O гиперболоид на плоскость. С помощью этой стереографической проекции между обоими образами устанавливается, вообще говоря, взаимно однозначное соответствие. Это соответствие, как мы сейчас покажем, является, если выразить его формулами, бирациональным. Однако существуют две точки на плоскости и одна точка на поверхности, так называемые „фундаментальные точки", которым на другом образе соответствуют целые кривые, а именно прямые линии. На гиперболоиде такой точкой является сама точка O, которой соответствует на плоскости вся прямая $\overline{O_1O_2}$. На плоскости фундаментальными точками являются точки O_1 и O_2. Им соответствуют проходящие через точку O прямолинейные образующие гиперболоида: одна образующая первого рода и другая — второго рода.

Мы видим, таким образом, что для двумерных многообразий бирациональные преобразования представляют собой нечто совершенно другое, чем для многообразий одного измерения. В случае двух измерений рациональные функции принимают для известных систем значений вид $\frac{0}{0}$, и это выражение оказывается в зависимости от закона предельного перехода бесконечно многозначным. Мы это ясно видим на чертеже. Точке O_1 соответствует на поверхности вся образующая OO_1. Проведем на плоскости через точку O_1 произвольную прямую g. Если точка плоскости неограниченно приближается к O_1 вдоль прямой g, то соответ-

ствующая точка поверхности имеет своим пределом определенную точку образующей OO_1, зависящую от выбора прямой g. Если вращать прямую g вокруг точки O_1, то соответствующие точки поверхности покроют всю образующую OO_1. То же, разумеется, относится и к точке O_2.

Алгебраически эта бесконечная многозначность выражается следующим образом. Уравнение гиперболоида можно с помощью однородных координат всегда представить в виде

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 0.$$

В качестве точки O выберем точку $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, а в качестве плоскости проекции — плоскость $x_3 = 0$. Формулы стереографической проекции имеют тогда, как легко проверить, следующий вид:

Черт. 24.

$$\rho x_1 = \xi\zeta,$$
$$\rho x_2 = \eta\zeta,$$
$$\rho x_3 = \xi\eta,$$
$$\rho x_4 = \zeta^2,$$

где $\xi:\eta:\zeta = x_1:x_2:x_4$ (см. черт. 24). Определенные таким образом значения x_1, x_2, x_3, x_4 действительно удовлетворяют уравнению гиперболоида. В неоднородной форме эти уравнения принимают вид

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{\xi}{\zeta}; \quad \frac{x_2}{x_4} = \frac{\eta}{\zeta}; \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{\xi\eta}{\zeta^2}.$$

При $\xi = 0$, $\zeta = 0$ и $\eta = 0$, $\zeta = 0$ эти выражения принимают вид $\frac{0}{0}$. Точно так же $\frac{\xi}{\zeta}$ и $\frac{\eta}{\zeta}$ принимают вид $\frac{0}{0}$, если x_1, x_2, x_4 одновременно обращаются в нуль.

Рассмотрим теперь какую-нибудь кривую C_n на поверхности, не проходящую через O. При стереографической проекции порядок кривой не меняется, и она проектируется на некоторую плоскую кривую C_n. Эта последняя пересекает прямую O_1O_2 только в фундаментальных точках. В самом деле, если предположить, что плоская C_n пересекает O_1O_2 еще в какой-нибудь другой точке, то этой точке может соответствовать на поверхности только точка O. Пространственная кривая должна была бы поэтому проходить через точку O, вопреки предположению. Если O_1 является точкой кратности α_1, а O_2 — точкой кратности α_2 плоской кривой C_n, то $\alpha_1 + \alpha_2 = n$, так как C_n должна пересекать прямую O_1O_2 в n точках.

Мы можем на этом основании, задав число n, определить все пространственные кривые порядка n, лежащие на гиперболоиде.

$n = 1$. $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, откуда либо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, либо $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Плоская C_1 может быть лишь прямой, проходящей либо

через O_1, либо через O_2. Пучкам прямых, проходящих через O_1 и O_2, соответствуют два семейства прямых на гиперболоиде. Пучку прямых, проходящих через O_1, соответствуют прямолинейные образующие гиперболоида второго рода, а пучку прямых, проходящих через O_2, соответствуют образующие первого рода.

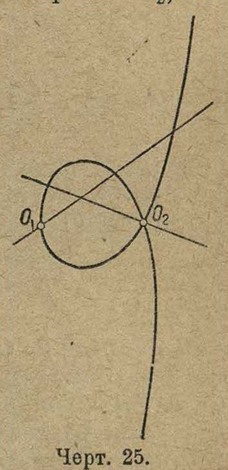
$n = 2$.

$$\alpha_1 = 2,\quad \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_1 = 0,\quad \alpha_2 = 2,$$

$$\alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = 1.$$

Оба первых случая представляют распадающуюся кривую второго порядка (две прямые, пересекающиеся в O_1 или O_2). Они не дают, таким образом, ничего нового. В третьем случае мы получаем в качестве плоских C_2 кривые второго порядка, проходящие через O_1 и O_2. Таким образом единственными кривыми C_2, лежащими на поверхности, являются плоские сечения гиперболоида. (Предлагаю проверить это с помощью формул преобразования.)



Черт. 25.

$n = 3$. Интерес представляют только два случая: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. На гиперболоиде имеются, таким образом, два различных семейства пространственных кривых третьего порядка. Соответствующие плоские кривые имеют двойную точку в O_1 или O_2. Если плоская C_3 имеет, например, двойной точкой O_2, т. е. если эта кривая принадлежит первому семейству плоских C_3, то прямые первого рода пересекают эту кривую еще в одной, а прямые второго рода еще в двух точках (черт. 25 и 28). Таким образом пространственные C_3 первого семейства пересекают образующие первого рода один раз, а образующие второго рода — два раза:

$$3 \cdot 1 - 2 = 1;$$

$$3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

Две кривые C_3 одного и того же семейства пересекаются в $9 - 4 - 1 = 4$ точках, а две кривые разных семейств в $9 - 2 - 2 = 5$ точках.

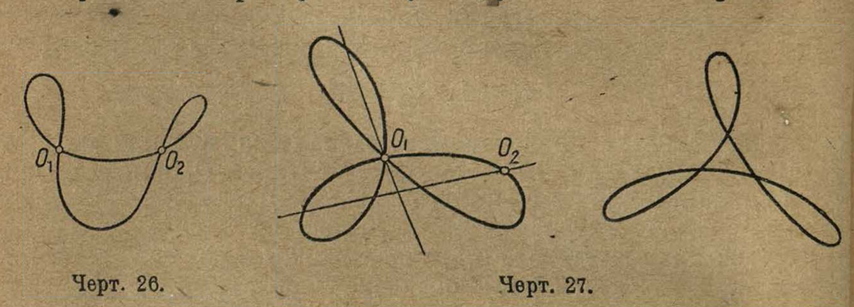
Для всех этих кривых C_3 имеем $p = 0$.

$n = 4$. В этом случае мы имеем не только раздельные семейства кривых, но и раздельные „виды“ кривых.

a) Первый вид характеризуется тем, что $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$ (см. черт. 26), т. е. обе точки плоских C_4 двойные. Таким образом $p = 1$. Соответствующая C_4 на гиперболоиде является, таким образом, той пространственной кривой, которую мы рассмотрели выше (стр. 345). Предлагаю снова проверить это на формулах

преобразования. Наша пространственная кривая является линией пересечения гиперболоида с другой поверхностью второго порядка.

б) Второй вид кривых состоит из двух семейств: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$ (черт. 27). Плоские C_4 имеют тройную точку в O_1 или O_2. Так как тройную точку следует считать за три двойные



Черт. 26. Черт. 27.

точки [мы можем кривую с тройной точкой рассматривать как предельный случай кривой с тремя двойными точками (черт. 27)], то жанр кривых второго вида равен

$$p = \frac{(4-1)(4-2)}{2} - 3 = 0.$$

Если, например, O_1 является тройной точкой плоских C_4, то соответствующие пространственные кривые пересекают образующие гиперболоида второго рода один раз, а образующие первого рода — три раза.

Кривые одного и того же семейства пересекаются в $16 - 9 - 1 = 6$ точках, а кривые различных семейств пересекаются в $16 - 3 - 3 = 10$ точках.

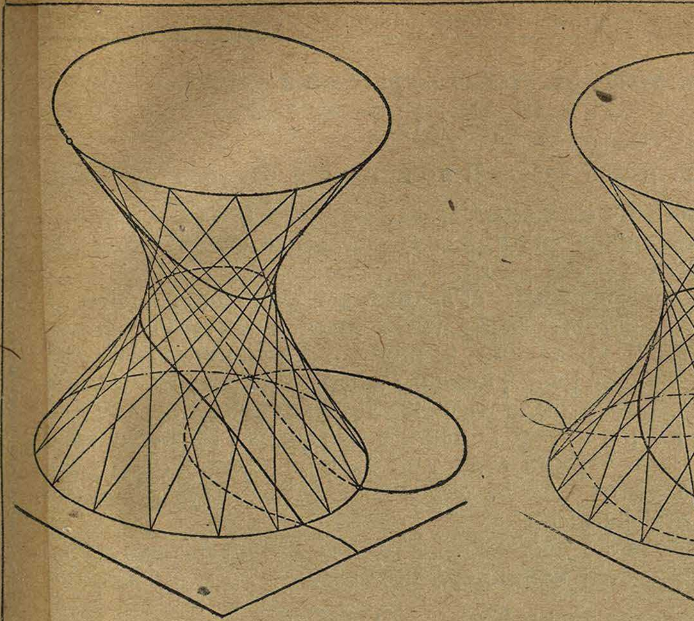
По этим данным мы можем составить себе ясное пространственное представление об этих кривых и представить их на чертеже (см. черт. 28—30).

Исследование пространственных кривых на гиперболоиде, понятно, вещь довольно старая; оно встречается уже в середине прошлого века у Плюкера и Шаля. Однако, к сожалению, здесь не место излагать новое, и нам приходится ограничиваться старым.

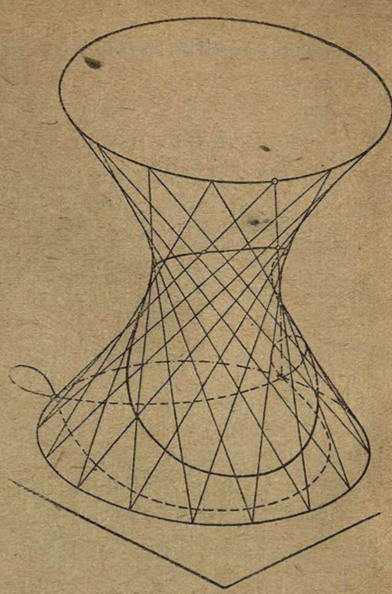
II. Теория целых алгебраических чисел и связь ее с теорией алгебраических функций.

Целым алгебраическим числом мы называем корень x уравнения с целочисленными коэфициентами, старший коэфициент которого равен единице:

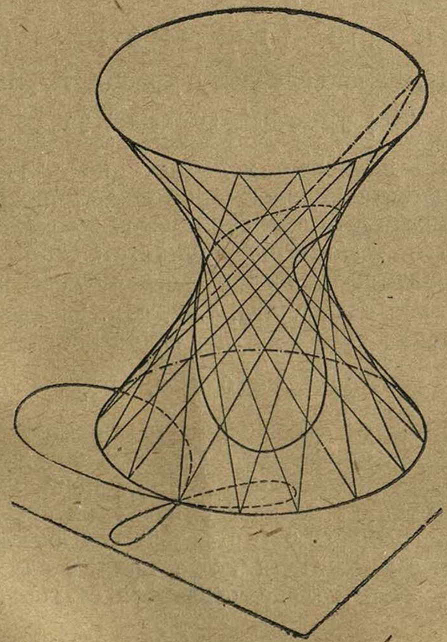
$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$



Черт. 28. Кривая третьего порядка.



Черт. 29. Кривая четвертого порядка первого вида.



Черт. 30. Кривая четвертого порядка второго вида.

Если последний коэфициент этого уравнения

$$a_n = \pm 1,$$

то $\frac{1}{x}$ есть также целое число. В этом случае число x называют *единицей*. „Корни из единицы" ζ, для которых $\zeta^n = 1$, представляют собой совершенно частный случай этого общего понятия единицы в смысле теории чисел.

Является целесообразным объединить в одно целое те алгебраические числа, которые выражаются друг через друга рационально с помощью уравнений с целыми коэфициентами. Они образуют расчлененное целое, можно *сказать — организм*, и такие числовые многообразия были названы Дедекиндом „телом"[1] (по-немецки слово Körper — тело — напоминает слово Körperschaft — организация). Этот термин стал теперь общепринятым. Содержащиеся в теле целые числа образуют тогда „целочисленную область" (Integritätsbereich).

Эти целые числа не должны обязательно изображаться в виде целых выражений; так, например, числа

$$\xi_1 = \frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}, \quad \xi_2 = \frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

являются целыми алгебраическими числами, так как они удовлетворяют уравнению

$$(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) = \xi^2 - \sqrt{2}\cdot\xi + 3 = 0$$

и, следовательно, целочисленному уравнению четвертой степени

$$(\xi^2+3)^2 - 2\xi^2 = \xi^4 + 4\xi^2 + 9 = 0.$$

Я буду теперь следовать ходу исторического развития.

Основание теории целых алгебраических чисел было положено Гауссом в его знаменитом, появившемся только в 1832 г. исследовании — *Theoria residuorum biquadraticorum*, Commentatio II („Теория биквадратичных вычетов"), в котором он рассматривал числа $a + bi$ $(i = \sqrt{-1})$ (Werke, т. 2, стр. 93 и сл.).

В этом числовом теле имеются в частности четыре единицы

$$i^\lambda \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3),$$

выражающиеся в виде степеней одной из них.

Гаусс тотчас же переходит к вопросу, остававшемуся во всем дальнейшем развитии этой области основной проблемой. Гаусс спрашивает: сохраняет ли свою справедливость и в этой расширенной области теорема об однозначном разложении всякого числа на простые множители. Это в данном случае действительно имеет место, если только отвлечься от того, что отдельные

[1] В русской литературе употребляются термины „поле", „тело", „корпус". *Прим. ред.*

простые множители можно умножать на любые единицы, лишь бы только все произведение оставалось при этом неизменным. Так, например, если $A = A'A''$, то существуют еще три других разложения числа A:

$$A = (iA')\cdot(-iA'') = (-A')\cdot(-A'') = (-iA')(iA'').$$

Гаусс не пренебрегает при этом геометрическим истолкованием приведенных соотношений с помощью решетки квадратов, образуемых числами $a + bi$, и перебрасывает этим истолкованием мост к теории двояко-периодических функций.

На этой числовой решетке я уже останавливался выше, в главе первой. Я показал там, следуя Гауссу, как числа тела $\sqrt{-D}$ всегда могут быть истолкованы как узлы решетки параллелограмов и в какой связи эта геометрическая интерпретация находится с так называемым комплексным умножением аргумента эллиптических функций. К сожалению, я не могу здесь возвращаться к этому вопросу, так как мне понадобилось бы для этого разъяснить предварительно целый ряд новых вспомогательных понятий. Я предпочитаю отослать читателя к моему литографированному курсу лекций по теории чисел (1895/96), в котором я изложил это подробнее. Точно так же можно очень наглядно истолковать и алгебраические тела высших степеней. [См. мое указание в докладе на съезде естествоиспытателей в Любеке в 1895 г. (Jahresberichte d. D. M. V., т. 4[1])) и для случая кубических иррациональностей, диссертацию Фуртвенглера (Furtwängler), где рассматриваются сети параллелепипедов в трехмерном пространстве и на них проводятся все доказательства[2]).]

На такого рода геометрическом истолковании основана связь числовых тел высших степеней с теорией многократно-периодических функций.

Я возвращаюсь к изложению хода исторического развития. Куммер, занимаясь *теоремой Ферма* о неразрешимости в целых числах уравнения

$$z^n = x^n + y^n \quad \text{для } n > 2,$$

которую можно записать также в виде

$$z^n \neq (x + y)(x + \varepsilon y)\ldots(x + \varepsilon^{n-1}y), \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

был естественным образом приведен этим вопросом к исследованию разложения на множители тех чисел, которые рационально выражаются через корни n-й степени из единицы.

Он получил столь прославивший его результат (Crelle т. 35, 1847): теорема об однозначном разложении на простые множители не имеет места для чисел тела $K(\varepsilon)$, но справедливость

[1]) См. также Klein, Ges. Abh., т. 3, Nr. XCIV.

[2]) См. также Klein, Ges. Abh. т. 3, стр. 8 и Furtwängler, Punktgitter und Idealtheorie, Math. Ann., т. 82, 1920.

этой теоремы восстанавливается, если присоединить подходящие алгебраические числа, не принадлежащие телу $K(\varepsilon)$, которые Куммер поэтому называет *идеальными числами.*

Куммер сам уже заметил, что этот же факт имеет место и для определенного класса квадратичных тел $K(\sqrt{-D})$.

Простейший пример дает тело $K(\sqrt{-5})$. Здесь речь идет о числах $a+b\sqrt{-5}$. В области этих чисел числа 2 и 3 неразложимы. В самом деле, если бы, например, число 2 можно было разложить на множители, так что

$$2=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5}),$$

то тогда мы имели бы

$$4=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2),$$

откуда $2=a^2+5b^2$, т. е. число 2 было бы квадратичным вычетом по модулю 5, что на самом деле неверно. Таким образом 2 и 3 являются „простыми числами"; тем не менее произведение этих чисел 6 может быть разложено на множители еще и другим способом:

$$6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}),$$

так что разложение числа 6 на простые множители не является однозначным.

Этот парадокс можно устранить, присоединяя к телу подходящие идеальные числа. Это можно сделать разными способами, ибо ведь разложение на множители может быть всегда видоизменено с помощью единиц.

В развитой мной теории, так называемой теории решеток, в данном случае можно присоединить $\sqrt{2}$. Как мы уже видели, $\frac{1\pm\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$ есть целое алгебраическое число. Мы имеем разложения

$$2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2},\quad 3=\frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}},$$

так что теперь уже неудивительно, что

$$2\cdot 3=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\right).$$

С точки зрения теории так называемых *тел классов* (Klassenkörper), принадлежащей Гильберту, следовало бы вместо $\sqrt{2}$ присоединить число i. Именно

$$2=(1+i)(1-i),\quad 3=\frac{1+\sqrt{-5}}{1+i}\cdot\frac{1-\sqrt{-5}}{1-i};$$

здесь множители снова являются целыми числами расширенного тела, откуда мы делаем тот же вывод, что и раньше.

Способы присоединения новых чисел оказываются столь различными в силу того, что, например, из числа $\sqrt{2}$ можно получить число, принадлежащее телу $K(i)$, путем умножения на подходящую единицу, а именно на

$$\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Заметим кстати, что число ω является единицей не только в смысле теории чисел, но и в алгебраическом, так как оно равно корню восьмой степени из единицы: $\omega^8 = 1$.

Я так подробно на этом остановился потому, что с понятием „идеального числа" связывается часто мистическая неясность. В этом отчасти повинен сам Куммер, ибо выражается он в различных местах так, как будто речь идет о множителях, которые конкретно вовсе не существуют и которые нужно понимать только в символическом смысле. Он прибегает при этом к неудачному сравнению из области химии, ссылаясь на фтор, который химики называют газом, несмотря на то, что нельзя выделить фтор в изолированном состоянии. Но фтор на самом деле давно уже удалось изолировать Муассону в сосудах из плавикового шпата с платиновыми электродами.

Теория разложения алгебраических чисел на единицы и реальные или идеальные простые множители была распространена Кронекером и Дедекиндом на какие угодно алгебраические числа.

Трудно решить, кому принадлежит первенство в этом открытии. Хотя Кронекер уже с 1858 г. в отдельных беседах распространял свои идеи или во всяком случае утверждал о наличии у него результатов, его статья об этом *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* („Основания арифметической теории алгебраических величин") была им опубликована только в 1881/82 г. в 92-м томе журнала Крелля (юбилейный выпуск, посвященный 50-летию научной деятельности Куммера), уже после того, как в 1871 г. Дедекинд использовал изданную им вторым изданием теорию чисел Дирихле, чтобы в одном из приложений к этой книге изложить свою теорию.

Дедекинд совершает при этом поворот в сторону абстрактного и достигает этим чрезвычайного упрощения теории в принципиальном отношении. Теория Дедекинда послужила благодаря этому образцом для форм мышления и методов изложения молодого поколения, тогда как исследователи старшего возраста, например, Кронекер (Crelle, т. 99, стр. 336) не могли освоиться с этой новой теорией.

Именно, вместо того чтобы говорить об одном (реальном или идеальном) множителе, Дедекинд рассматривает *совокупность* целых чисел данного тела, делящихся на этот множитель.

Вместо множителя 2 в натуральном ряде чисел Дедекинд рассматривал бы совокупность чисел вида $2m$, а вместо

множителей $\sqrt{2}$ или $1+i$ в теле $K(\sqrt{-5})$ он рассматривал бы совокупность чисел вида $2\mu+(1+\sqrt{-5})\nu$, где μ и ν означают какие угодно целые числа тела $K(\sqrt{-5})$.

Преимущество этого способа заключается в том, что он дает возможность освободиться от произвольных единиц (в смысле теории чисел), нарушающих однозначность разложения на простых множителей; недостаток его в том, что необходимо привыкнуть выражать произведение двух чисел с помощью соотношения между совокупностями чисел, соответствующими множителям и произведению. Например, равенство $2\cdot 3=6$ теперь означает: совокупность чисел, делящихся на 2, и совокупность чисел, делящихся на 3, имеют общими своими элементами совокупность чисел, делящихся на 6.

Мне всегда казалась неприятной только терминология Дедекинда, лишенная всякой наглядности. Он называет эти совокупности *идеалами*, а идеалы, элементы которых имеют „реальный" общий множитель, он называет *главными идеалами*. (Так, например, идеал $2\mu+2\nu\sqrt{-5}$ является главным идеалом, ибо у этих чисел имеется „реальный" общий множитель 2.) Дедекинд поступил бы лучше, если бы свои совокупности он назвал бы „реалами". Ведь речь идет о числовых агрегатах, которые действительно существуют в пределах целочисленной области.

Я не могу здесь подробнее остановится на этих исследованиях из области чистой теории чисел. Сжатое и в то же время не только исчерпывающее предмет, но и чрезвычайно продвинувшее его вперед и сильно упростившее его изложение можно найти в „Zahlenbericht" Гильберта в четвертом томе Jahresberichte der D. M. V., 1897, в статье *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* („Теория алгебраического числового тела"). Мы еще коснемся позже той точки зрения, которой придерживается здесь Гильберт. Эта теория изложена также во втором томе „Алгебры", Вебера (2-е издание 1899 г.).

Тут возникает новое направление идей, подготовленное Кронекером и вполне разработанное Дедекиндом и Вебером [„Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen" („Теория алгебраических функций одной переменной"), Crelle т. 92, 1882]. Оказывается, что можно провести довольно близкую аналогию между рассмотрениями теории чисел, касающимися целых чисел числового тела, и рассмотрениями теории функций, касающимися алгебраических функций на римановой поверхности, распростертой по плоскости переменной z.

Чтобы яснее сопоставить аналогичные моменты этих двух теорий, я приведу следующую таблицу (см. стр. 371).

Методическое изложение предмета, основанное на этих принципах, можно найти в труде Дедекинда-Вебера.

Особенно ясно проявляется эта аналогия между обеими теориями, если рассмотреть свойства дискриминантов. *Дискриминант*

тела алгебраических функций распадается на два множителя: на „существенный множитель“, соответствующий точкам ветвления римановой поверхности, и „вне-существенный множитель“, соответствующий тем точкам, в которых кривая $f(\zeta, z) = 0$ имеет двойную точку и где две точки ветвления взаимно уничтожаются. Мы называем такие точки вне-существенными, потому что они, так сказать, зависят от внешних причин и изменяются, если заменить начальную функцию ζ другой функцией тела.

Теория чисел	*Теория функций*
Исходный пункт: неприводимое уравнение $f(x) = 0$ с целочисленными коэфициентами.	Исходный пункт: неприводимое уравнение $f(\zeta, z) = 0$, содержащее z в рациональном виде. (Умножив на общий знаменатель, можно сделать коэфициенты этого уравнения целыми рациональными функциями от z с какими угодно численными коэфициентами; эти численные коэфициенты нас здесь не интересуют).
Тело всех $R(x)$.	Тело, составленное всеми $R(\zeta, z)$, т. е. множество всех алгебраических функций, однозначных на данной римановой поверхности.
Выделение всех целых алгебраических чисел тела.	Выделение всех целых алгебраических функций тела, т. е. тех функций $G(\zeta, z)$, которые обращаются в бесконечность только при $z = \infty$.
Разложение на реальные и идеальные простые множители и единицы.	Идеальное разложение функций $G(\zeta, z)$ на множители, обращающиеся в нуль только в одной точке римановской поверхности, и множители, нигде не обращающиеся в нуль.

Такое же разложение дискриминанта имеет место и в теории чисел. При этом простые делители *существенного* множителя дискриминанта уравнения $f(x) = 0$ могут быть сопоставлены с точками ветвления поверхности.

Чтобы пояснить смысл „идеального“ разложения целой функции $G(\zeta, x)$, я приведу пример, который соответствует прежнему арифметическому примеру и непосредственно связан со сказанным выше.

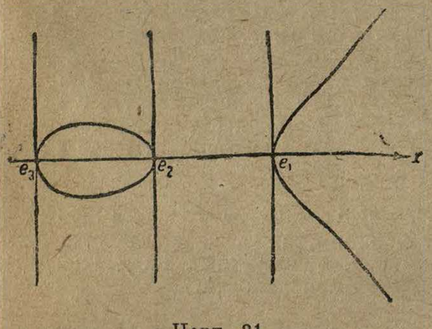
Возьмем в качестве исходного уравнения

$$\zeta^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

Рассмотрим в качестве простейшего примера самую функцию ζ. Существенным множителем дискриминанта является

$$(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

(Вне-существенного множителя в этом случае не имеется.) В самом деле, точки $z = e_1, e_2, e_3$ являются точками ветвления римановой поверхности, ибо касательные в этих точках параллельны оси ординат (см. черт. 31). Каждая из точек e_1, e_2, e_3 является простым нулем функции ζ. Но мы не можем составить такую функцию тела, которая имела бы единственным простым нулем только какую-нибудь одну из точек e_1, e_2, e_3. Целые функции $z - e_1, z - e_2, z - e_3$ имеют эти точки нулями кратности 2, ибо, приравнивая их нулю, мы получим уравнения касательных к кривой. Но, выходя за пределы тела $R(\zeta, z)$, мы можем реализовать идеальных делителей функции. Достаточно взять функции $\sqrt{z-e_1}, \sqrt{z-e_2}, \sqrt{z-e_3}$, однозначные на данной римановой поверхности и принимающие на ней каждое значение (кроме нуля) два раза. Тогда мы получаем разложение ζ на „идеальные" делители:



Черт. 31.

$$\zeta = 2\sqrt{z-e_1}\cdot\sqrt{z-e_2}\times\\ \times\sqrt{z-e_3}.$$

Мы можем произвести еще другое расширение тела, идущее значительно дальше и не имеющее аналога в теории чисел; а именно мы можем присоединить интеграл первого рода u и образовать с его помощью функцию $\sigma(u - u_0)$, которая, правда, вообще принимает каждое значение бесконечно много раз на римановой поверхности, но обращается в нуль только в одной точке, соответствующей значениям параметра $u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. В этом смысле мы можем рассматривать функции $\sigma\left(u - \frac{\omega_i}{2}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$ как простые делители, соответствующие точкам e_1, e_2, e_3. Но так как эти функции нигде не обращаются в бесконечность, то мы должны для получения функций, имеющих кроме того простой полюс при $z = \infty$, разделить каждую из этих функций на $\sigma(u)$, имеющую точку $z = \infty$ простым нулем. Отсюда и получается, что

$$\wp'(u) = E\,\frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u - \frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma^3(u)},$$

где E есть нигде не исчезающая функция, которую мы должны здесь рассматривать как „единицу"; оказывается что эта единица равна выражению вида Ce^{cu}. Если мы этот множитель распределим подходящим образом между остальными делителями числителя, то получим обычную формулу разложения в произведение функции

$$\wp'(u) = 2\,\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}.$$

В этом трансцендентном смысле Вейерштрасс и понимал возможность перенесения в теорию функций основных понятий теории чисел.

К сожалению, я не имею возможности коснуться здесь более общих случаев применения этих принципов. Сошлюсь на мою работу (Mathematische Annalen, т. 36, 1889[1]), где я привожу к простейшему виду разложения целых функций на поверхностях высшего жанра. Роль функции $\sigma(u)$ там играет моя „неразложимая форма“ (Primform).

Заканчивая *обзор* теории алгебраических числовых тел, я хотел бы еще раз особенно оттенить аналогию, существующую между числовыми и функциональными телами, чтобы яснее вскрыть взаимную связь этих крупных отделов современной математической литературы и сделать понятной внутреннюю сущность принципов, лежащих в основе *Lehrbuch der Algebra* Г. Вебера (2-е издание, в трех томах — 1898, 1899 и 1908 гг.).

Сначала я должен вернуться назад и остановиться на основной работе Дедекинда и Вебера в журнале Крелля (Crelle, т. 92).

Нетрудно себе представить, каким образом можно и здесь заменить „идеальный множитель“, имеющий только одну точку римановой поверхности простым нулем, соответствующим „идеалом“, т. е. совокупностью целых функций тела, обращающихся в нуль в соответствующей точке римановой поверхности.

Введение этого понятия само по себе имеет лишь формальное значение. Значительно важнее дальнейшее развитие этой идеи в рецензируемой работе, а именно применение арифметических методов доказательства и к исследованию тел алгебраических функций. В отличие от Клебша и его учеников здесь речь идет уже не о кривой и связанных с ней различных вспомогательных геометрических понятиях, не о римановой поверхности и даже не о плоскости z, но исключительно о чисто арифметических операциях над полиномом $f(\zeta, z)$, расположенным по степеням ζ и z. С помощью чисто арифметических рассуждений авторам, например, удается довольно быстро дойти до теоремы Римана-Роша.

Главное достоинство этого метода, не оставляющего никакого неопределенного простора для фантазии, заключается в том, что этим путем можно исчерпывающим образом предусмотреть все особые случаи, которые могут иметь место для уравнения $f(\zeta, z) = 0$. В принципе это исчерпывание всех особых случаев имеется также и у Римана и его школы, и в частности Нетер дал для „кривых“ $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ все необходимые средства, чтобы добиться того же самого геометрически-алгебраическим путем, однако у этих авторов остается нечто, что приходится читать между строк.

---

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 3, стр. 388 и сл.

В теории алгебраических функций создаются две различных школы. Одна школа, представителей которой мы перечислили выше и к которой примыкают главным образом итальянцы, продолжает придерживаться образа алгебраической кривой или алгебраической поверхности и упражняет геометрическую мысль на многомерных пространственных многообразиях, пользуясь „méthode mixte“. Другая школа, к которой принадлежит, например, Гензель (Hensel) и Ландсберг (Landsberg) и для двумерных областей Юнг (Jung), предпочитает арифметический процесс. Как и при постройке Вавилонской башни, говорящие на разных языках скоро перестали понимать друг друга! А так как неудобно заставлять себя привыкать к необычным формам мысли, то в большинстве случаев отсутствует и желание понять других. Во всяком случае нам пришлось поместить в „Энциклопедии“ два отдельных обзора по этой области. „Геометрический“ обзор Кастельнуово-Энриквеса помещен в третьем томе (Enzyklop. III, C 6b) (лишь с большим трудом я добился согласия дать в содержании примечания о работе Юнга). „Арифметический“ обзор составлен Гензелем (II C 5); хорошим введением служит статья Ландсберга в первом томе (Enzyklop. I B 1 c).

Эта тенденция разбивать науку не только на все более многочисленные отдельные главы, но и делить ее на школы по методам исследования, может иметь самые губительные последствия, и одностороннее развитие в этом направлении может привести к гибели всей науки. Наше поколение всегда стремилось к противоположной цели. В наше время мы поддерживали всегда более или менее тесный контакт между: 1) теорией инвариантов, 2) теорией уравнений, 3) теорией функций, 4) геометрией и 5) теорией чисел, и были этим особенно горды.

Генрих Вебер, проживший лучшие свои годы (1875—83) в Кенигсберге, является, пожалуй, наиболее многосторонним представителем этого направления. И к счастью, в 1885 г. работа Вебера нашла себе еще почти на десятилетие продолжателей в лице его трех молодых кенигсбергских учеников, которые претворяют в жизнь основную тенденцию Вебера и создают тот исходный пункт, от которого наши современники должны будут отправляться, если они будут в состоянии продвигаться дальше. Мы имеем в виду Гурвица, Гильберта и Минковского.

Гурвиц родился в 1859 г., учился сначала у меня в Мюнхене и Лейпциге, затем в Берлине и окончил университет в Геттингене. В 1884—92 гг. он был в Кенигсберге экстраординарным профессором, а затем получил назначение ординарным профессором в Цюрихский политехникум[1]).

Гильберт родился в 1862 г. в Кенигсберге и прошел там, с небольшими перерывами, все существенные стадии своего развития в качестве студента, доцента и экстраординарного

[1]) Умер в 1919 г.

профессора. В 1895 г. он переходит в качестве ординарного профессора в Геттинген.

Минковский родился в 1864 г., также учился в Кенигсберге и занимал там в 1883—96 гг. должности приват-доцента и экстраординарного профессора. Затем он жил в Цюрихе, а последние годы своей жизни (1902—1909), столь преждевременно закончившейся, он провел в Геттингене.

В своем обзоре я буду опираться на работы Гильберта, которые я предпочитаю не только потому, что они нас здесь больше касаются, но и ввиду того, что они глубже всего охватывают проблему. Наконец работы всех этих трех математиков тесно связаны между собой. Прежде чем перейти к Гильберту, я скажу несколько слов о Гурвице и Минковском, чтобы охарактеризовать их метод работы.

Гурвица называли афористиком. Полностью владея интересующими нас дисциплинами, он выбирал то одну, то другую важную проблему и продвигал ее значительно вперед. Каждая из его работ стоит особняком и представляет собой законченное целое.

Относящиеся к интересующим нас вопросам работы Минковского основываются большей частью на соединении наглядного геометрического представления с проблемами теории чисел. Связь между этими областями снова устанавливается с помощью числовой решетки. Минковский продолжил развитие теории пространственных решеток во многих направлениях. В его подходе имеется много родственного с образом мыслей Дирихле. Ср. мои доклады (носящие более педагогический характер) о „*Диофантовых приближениях*", 1908 г. С другой стороны я здесь снова сошлюсь на мои собственные лекции по теории чисел и на то, что мной уже было сказано выше, в первой главе, относительно решеток на плоскости. Я сам в свое время ограничивался тем, что геометрически пояснял известные уже основные положения теории чисел, тогда как Минковский применял геометрический метод для получения новых результатов. Его исследования показали, что геометрия и теория чисел ни в коем случае не исключают друг друга, если только решиться рассматривать в геометрии прерывные объекты.

Неутомимый гений Гильберта в течение его многолетнего творчества проявил активность в различнейших областях математики. Интересующие нас здесь его работы, которые можно было бы назвать его первыми стихами, относятся к периоду от 1883 примерно до 1898 г. Гильберт с тех пор, как он работает в Геттингене, всегда привлекал к себе многочисленных учеников. (В Кенигсберге он имел мало удобных случаев для этого, тем более, что в те годы посещаемость математических факультетов наших университетов упала до минимума.) Однако его ученики владеют обычно только той областью, которой их научил Гильберт, и обычно незнакомы с теми общими связями между различными областями математики, которые нас здесь интересуют в первую очередь.

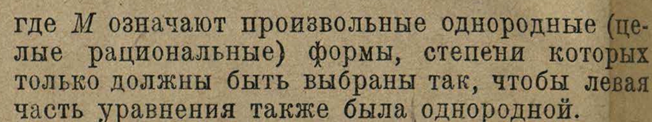
Мы остановимся здесь на двух работах Гильберта. Сначала на его статье по теории алгебраических форм[1]), где, пользуясь точкой зрения Дедекинда, Гильберт доводит до конца намеченные Кронекером идеи и блестящим образом применяет их к проблемам теории инвариантов.

Упомянем прежде всего теорему о том, что всякое алгебраическое многообразие любого числа измерений, лежащее в пространстве однородных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, всегда может быть представлено с помощью такой конечной системы однородных уравнений

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \ldots,\ F_\mu = 0,$$

что уравнение $F = 0$ всякого другого многообразия, проходящего через заданное, может быть представлено в виде

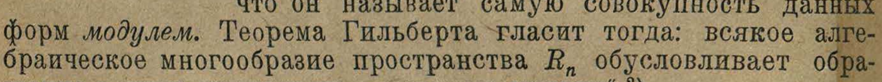
$$M_1 F_1 + \ldots + M_\mu F_\mu = 0,$$



где M означают произвольные однородные (целые рациональные) формы, степени которых только должны быть выбраны так, чтобы левая часть уравнения также была однородной.

Черт. 32.

Согласно принятому в теории чисел и принадлежащему Гауссу способу выражения можно было бы сказать: всякая форма F, содержащая данное многообразие, сравнима с нулем по модулям $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$. Впрочем Гильберт в такой степени примыкает к идеям Дедекинда, что он называет самую совокупность данных



форм *модулем*. Теорема Гильберта гласит тогда: всякое алгебраическое многообразие пространства R_n обусловливает обращение в нуль некоторого „*конечного* модуля“ [2]).

В качестве примера я возьму пространственную кривую третьего порядка. Всякая такая кривая может быть получена как линия пересечения двух поверхностей F_2. Мы убеждаемся в этом следующим образом: пусть заданная кривая C_3 снова лежит на однополостном гиперболоиде (см. выше стр. 363 и черт. 28, стр. 365); мы спроектируем ее на плоскость. Обозначим через O_2 ту из фундаментальных точек соответствующей плоской кривой третьего порядка, которая является двойной точкой этой кривой (см. черт. 32). Если мы проведем теперь через другую фундаментальную точку O_1 какую-нибудь прямую, то мы можем рассматривать эту прямую вместе с кривой C_3 как распадающуюся кривую C_4 первого вида. Этой кривой C_4 соответствует в пространстве полная линия пересечения гиперболоида с некоторой поверх-

[1] Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann., т. 36, 1890.

[2]) В последние годы стали называть, примыкая к Дедекинду, совокупности, подобные совокупности форм о которой говорится в тексте, „идеалами“, тогда как термин „модуль“ применяется к совокупностям более общего вида. *Прим. ред. нем. изд.*

ностью F_2. Таким образом если поверхность второго порядка F_2 пересекает гиперболоид по кривой третьего порядка C_3, то она имеет с гиперболоидом кроме того еще общую прямолинейную образующую. Через эти кривые проходит, конечно, еще целый пучок поверхностей второго порядка $\lambda F_2 + \mu H = 0$, где $H = 0$ означает уравнение гиперболоида. Пучку прямых, проходящих через O_1, соответствует, таким образом, бесконечное семейство пучков $\lambda F_2 + \mu H = 0$, пересекающих гиперболоид по данной линии C_3 и вдоль какой-нибудь прямолинейной образующей, так что мы получаем всего ∞^2 поверхностей второго порядка $\lambda F_2 + \lambda' F_2' + \mu H = 0$, проходящих через C_3. Спрашивается, сколько поверхностей $F_1, \ldots, F_\mu$ нужно провести через C_3 для того, чтобы всякая другая поверхность F, проходящая через C_3, имела уравнение вида

$$F = M_1F_1 + M_2F_2 + \ldots + M_\mu F_\mu = 0.$$

Оказывается, что для этого достаточно взять три поверхности второго порядка F_2, F_2' и H.

Соответствующий трехчленный модуль мы получим проще всего, если приравняем нулю три минора матрицы из $2 \cdot 3$ линейных форм. Если

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}$$

есть какая-нибудь матрица такого рода, то уравнения

$$F_\varkappa = q_\lambda r_\mu - r_\lambda q_\mu = 0 \qquad (\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

дают нам три поверхности второго порядка, пересекающиеся только по некоторой кривой C_3 и определяющие вместе с тем соответствующий модуль.

Доказательство теоремы Гильберта и других теорем носит крайне абстрактный характер, но само по себе очень просто и отличается большой убедительностью. И именно благодаря этой простоте и убедительности своих абстрактных методов доказательства работа Гильберта положила начало новой эпохе в алгебраической геометрии.

Такой же простотой обладают и доказательства теорем теории инвариантов, к которым Гильберт применяет свой метод и на которых я здесь еще менее могу остановиться.

Скажу только, что всю проблему о конечности числа инвариантов, которую в свое время Гордану удалось решить только для бинарных форм с помощью крайне сложных вычислений, Гильберт полностью решает одним ударом для форм с любым числом переменных.

Благодаря этому специфическому характеру методов Гильберта, математические круги оказали его работе весьма различный прием. Меня лично эта работа побудила тотчас же принять решение привлечь Гильберта при первой возможности в Геттинген. Гордан же в начале отнесся к этой работе довольно

неодобрительно: „Это не математика, а теология“, — заявлял он. Однако впоследствии его отношение изменилось, и он уже говорил: „Я убедился, что и теология имеет свои преимущества“. И он сам затем сильно упростил доказательство основной теоремы Гильберта (съезд естествоиспытателей в Мюнхене 1899 г.).

В качестве второго труда Гильберта я остановлюсь на его *Обзоре по теории чисел* от 1897 г., который мы уже упомянули раньше и который с внешней стороны написан в виде обзора имеющейся литературы, но при этом не только сводит имеющиеся уже результаты к значительно более простым основным положениям, но и ставит и разрабатывает совершенно новые проблемы.

Я хочу дать здесь понятие об основном принципе, которым Гильберт руководствовался при этом, а именно о принципе внутренней аналогии между числовыми и функциональными телами.

Я делаю это тем охотнее, что Гильберт сам высказался по этому поводу только позже и мимоходом, а именно в своем докладе „Математические проблемы“ на Парижском международном математическом конгрессе 1900 г. (Göttinger Nachrichten, 1900).

Чтобы быть понятным, я должен здесь сделать маленькое введение (ссылаясь на главу вторую, стр. 122 и сл.) и резюмировать основные положения теории алгебраических уравнений Галуа.

Основой теории Галуа является, как я уже объяснял раньше, понятие области рациональности. В качестве рациональных элементов мы можем рассматривать либо только числа $\frac{m}{n}$, где m и n — обыкновенные целые числа, либо все рациональные функции от каких угодно параметров $r(z_1, z_2, \ldots, z_3)$ с рациональными или произвольными коэфициентами. Область рациональности можно затем расширять, присоединяя к ней какие-нибудь постоянные алгебраические иррациональности, например, корни из единицы и включая в расширенную область все функции, получающиеся путем рациональных операций из этих присоединенных иррациональностей.

Наконец область рациональности может быть определена и по отношению к некоторой римановой поверхности, над плоскостью z.

Вторым основным понятием является понятие *неприводимости* алгебраического уравнения. Пусть задано уравнение

$$f(x) = 0,$$

коэфициенты которого являются либо рациональными числами, либо рациональными функциями от каких-либо параметров или присоединенных иррациональностей. Это уравнение называется „неприводимым“, если в данной области рациональности его

левую часть нельзя разложить на множителей. Например, уравнение

$$x^2+5=0$$

„неприводимо“ в обычной области рациональности чисел $\frac{m}{n}$. Но если мы присоединим число $\sqrt{-5}$, то данное уравнение становится приводимым:

$$x^2+5=(x+\sqrt{-5})(x-\sqrt{-5}).$$

„Неприводимость“ уравнения является, таким образом, относительным понятием; это понятие относится всегда к предварительно определенной области рациональности.

Пусть уравнение $f(x)=0$ неприводимо в заданной области рациональности и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни этого уравнения. Тогда существует группа перестановок корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называемая *группой Галуа* и обладающая следующими свойствами:

а) Если функция $R(x_1, \ldots, x_n)$ не меняет своего численного значения при всех перестановках группы, то она равна некоторому элементу данной области рациональности (имеет рациональное значение).

б) Обратно, если функция $R(x_1, \ldots, x_n)$ имеет рациональное значение (т. е. равна некоторому элементу данной области рациональности), то она не меняет своего численного значения при всех перестановках группы Галуа.

От структуры этой группы (ее подгрупп и т. д.) зависит все, что мы можем знать о разрешимости уравнения, о характере его резольвент и т. д.

Существенным для нас здесь является то, что теория Галуа применима как к численным уравнениям $f(x)=0$, содержащим некоторый параметр, так и к функциональным телам.

Рассмотрим сначала последний случай. Рациональными элементами мы здесь считаем рациональные функции от z, причем численная природа содержащихся в этих рациональных функциях коэфициентов нас теперь совершенно не интересует. В этом случае мы можем наглядным образом интерпретировать понятия „неприводимости“ и „группы“.

Построим сначала над плоскостью z риманову поверхность, соответствующую функции ζ. Если эта поверхность состоит из одного куска, то уравнение неприводимо, и обратно.

Отметим теперь на плоскости z точки ветвления $a, b, \ldots, k$ уравнения $f(\zeta, z)=0$ и соединим их произвольной линией, не имеющей двойных точек. Если мы разрежем вдоль этой линии все листы римановой поверхности, то она распадется на n отдельных листов, которые мы обозначим через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. В окрестности точки ветвления отдельные листы римановой поверхности могут оставаться изолированными, тогда как другие, соединяясь вдоль разреза, образуют многолистную окрест-

ность данной точки ветвления, многократно покрывающую плоскость z. Составим для каждой части разреза, заключенной между двумя последовательными точками ветвления, перечень всех пар листов римановой поверхности, соединяющихся друг с другом вдоль этой части разреза, т. е. составим таблицу связей листов между собой. При каждом переходе через линию разреза происходит некоторая перестановка листов, которую мы можем найти с помощью нашей таблицы.

Заставляя z пробегать все возможные замкнутые пути, мы получим группу перестановок, которую я назвал *группой монодромии* данного уравнения. (Мы употребили уже это выражение раньше в общем случае линейного диференциального уравнения, см. стр. 311). Эта группа монодромии является группой Галуа заданного уравнения, если областью рациональности условиться считать, как мы только что сказали, совокупность рациональных функций от z. В самом деле очевидно, что

1. Всякая функция $R(\zeta, z)$, остающаяся неизменной при всех перестановках этой группы, является именно в силу этого рациональной функцией от z (всякая однозначная алгебраическая функция от z рациональна);

2. Всякая рациональная функция $r(z)$ в силу своей однозначности возвращается к своему первоначальному значению, когда z пробегает какой угодно замкнутый путь, и, следовательно, не изменяется при всех перестановках группы монодромии.

Мы видим, таким образом, какая связь существует между понятием римановой поверхности и идеями Галуа и каким путем можно наглядным образом истолковать идеи Галуа с помощью римановых поверхностей. Вместо того чтобы задавать риманову поверхность, можно задать точки ветвления $a, b, \ldots, k$ и указать, какие группы перестановок получаются при различных обходах этих точек ветвления. Мы этим путем возвращаемся, так сказать, от Римана к Пюизе (Puiseux), который уже в 1851 г. составил такие группы [1]).

Но отсюда вытекает замечательная возможность перенести на числовые тела не только само понятие римановой поверхности, но и основывающиеся на этом понятии теоремы или по крайней мере постановки проблем. Ибо точкам ветвления $a, b, \ldots, k$ здесь соответствуют как мы знаем, простые делители „существенного" множителя дискриминанта, а группе Галуа функционального тела, разумеется, соответствует группа Галуа числового тела.

Это соответствие является чрезвычайно плодотворным для теории чисел ввиду того, что для римановой поверхности мы имеем ряд теорем, которые не могут быть получены с помощью чисто алгебраических средств, и мы можем для числовых тел поставить вопрос, что соответствует здесь этим теоремам.

---

1) Ср. Enzyklop. I B 3 c, d, стр. 487.

Это относится в первую очередь к римановой теореме существования, которую можно формулировать так: всякой заданной алгебраической римановой поверхности над плоскостью z соответствует тело $R(\zeta, z)$.

Дальше можно спросить: что́ соответствует в числовом теле тем простым формулировкам, которые получаются путем рассмотрения абелевых интегралов, что́ соответствует здесь теореме Абеля и т. д.?

В такой постановке вопроса мы получаем настоящий ключ к пониманию тех новых исследований, основные принципы которых имеются в „Обзоре“ Гильберта и которые продолжались в его позднейших работах, а также в работах его друзей и учеников.

Гильберт хотел довести исследования по теории чисел до того пункта, где оказалось бы возможным полностью определить числовые тела с помощью их дискриминанта и соответствующей группы Галуа, а также получить и здесь все теоремы теории функций (см. двенадцатую проблему из доклада Гильберта на Парижском конгрессе 1900 г.). Он впрочем достиг этой цели только в нескольких случаях, в частности для „тела классов“, принадлежащего области рациональности $K(\sqrt{-D})$. Группа Галуа является в этом случае абелевой, т. е. состоит исключительно из коммутативных между собой операций, а дискриминант [относительно тела $K(\sqrt{-D})$] равен 1. Полные доказательства были даны только Фуртвенглером. Я здесь совершенно не имею возможности подробнее остановиться на этом. Но мне думается, что читатель уже кое-чего достиг, получив здесь хотя бы общее знакомство с руководящей идеей этих исследований.

На этом я заканчиваю седьмую главу. В заключение я только еще раз охарактеризую ту самую общую проблему, которая стоит здесь перед нами, повторяя то, что в свое время писал Кронекер в юбилейном выпуске журнала Крелля от 1881 г. (Crelle, т. 92). Здесь идет речь не только о чисто числовых телах или телах, зависящих от одного параметра z, или же о проведении отдельных аналогий с такого рода телами; задача здесь заключается в том, чтобы для образов самого общего типа, принадлежащих одновременно арифметике и теории функций, т. е. зависящих от любых заданных алгебраических чисел и алгебраических функций от каких угодно параметров, достигнуть в общем случае такой же степени законченности и полноты, какой в большей или меньшей мере обладают полученные для простейших случаев результаты.

Перед нами здесь открывается необъятный простор для исследований в чисто теоретической области; царящая здесь общая и всеобъемлющая закономерность сообщает этой ветви современной математики высшую степень стройности и красоты. Мы должны, однако, заметить, что эта область пока еще очень далека от каких-либо практических применений. Отсюда конечно отнюдь не следует, что таковой она будет оставаться и в будущем.

Глава восьмая.

Теория групп и теория функций. Автоморфные функции.

I. Теория групп.

Теория групп проходит как самостоятельная дисциплина через всю современную математику. Как упорядочивающий и уясняющий принцип, она проникает в самые разнообразные области. Поэтому мы часто соприкасались с ней и раньше не только в теории уравнений, но и при изучении эллиптических функций и при установлении *различия между проективной, аффинной и метрической геометриями* и теорией их инвариантов. Я однако предпочел не посвящать ей самостоятельного крупного раздела, а касаться ее от случая к случаю в различных частях книги. Мы поступим так и сейчас, рассмотрев прежде всего ее роль в развитии современной теории функций. Тем не менее представляется целесообразным посвятить предварительно некоторое место теории групп, как таковой.

Наш первый вопрос таков: что такое группа? Ответ на него я хотел бы дать с общей точки зрения. Здесь мы встречаемся с удивительным, но типичным явлением, что даже и в такого рода вопросах в последние десятилетия наблюдается поворот от наглядного, активного похода к вещам в сторону абстрактных формулировок. Только в 1870 г. благодаря появлению книги Камилла Жордана *Traité des substitutions et des équations algébriques* („Курс теории подстановок и алгебраических уравнений") было привлечено всеобщее внимание к теории групп как необходимому орудию теории уравнений (под подстановками здесь разумеются перестановки букв). Когда затем Ли и я начали разрабатывать теорию групп в ее приложениях к различнейшим областям математики, то мы сказали: „группа" есть такая совокупность однозначных *операций* $A, B, C, \ldots$, что комбинация двух каких-нибудь операций A, B из этой совокупности дает операцию C из той же совокупности: $A \cdot B = C$.

В своих дальнейших исследованиях о бесконечных группах Ли оказался вынужденным отчетливо потребовать, чтобы наряду с операцией A в группу входила и обратная операция A^{-1}.

У современных математиков мы находим более отвлеченное определение, которое является однако более точным. Говорят уже не о системе операций, а о системе вещей или элементов A, B, C, ..., причем постулируют, что

1. „Произведение“ или комбинация $A \cdot B = C$ само принадлежит к системе (замкнутость системы).

2. Имеет место ассоциативный закон, т. е.

$$(AB) \cdot C = A \cdot (BC).$$

3. Существует единица E, так что

$$AE = A \quad \text{и} \quad EA = A.$$

4. Для каждого элемента A существует обратный элемент, так что уравнение

$$Ax = E$$

разрешимо.

Таким образом здесь совершенно отказываются от обращения к фантазии. Взамен этого тщательно препарируется логический скелет. С этой тенденцией мы еще будем часто встречаться при продолжении наших лекций. Эта абстрактная формулировка превосходна для разработки доказательств, но совершенно не приспособлена для нахождения новых идей и методов. Она представляет собой известное завершение пройденного пути развития. Поэтому и преподавание она облегчает лишь внешне, постольку, поскольку с ее помощью можно просто и без пробелов доказывать известные теоремы; с другой стороны, она внутренне очень затрудняет учащегося, так как он оказывается поставленным перед чем-то замкнутым и не знает, как пришли к такого рода определениям; к тому же он ничего не может представить себе наглядно. Вообще же этот метод имеет тот недостаток, что он не стимулирует мышления; нужно только следить за тем, чтобы не нарушить указанных четырех законов.

Мы начнем однако с исторического обзора. Понятие о группе развилось первоначально в учении об алгебраических уравнениях. Операциями группы, о которой здесь идет речь, являются $n!$ перестановок n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (в число перестановок мы всегда будем включать и „идентичную операцию“, т. е. ту, которая оставлят каждый корень x на своем месте).

Несомненно, Лагранж (1770) первый установил, что общее решение уравнений второй, третьей и четвертой степени можно понять, лишь принимая во внимание структуру групп, состоящих из названных перестановок из двух, трех, четырех букв.

Из исследователей, которые позже занимались группой всевозможных перестановок n букв, нужно прежде всего отметить Коши, который нашел много относящихся сюда замечательных предложений. В дальнейшем мы будем при случае пользоваться также группой из $\frac{1}{2}n!$ „четных“ перестановок (так называемая „альтернирующая“ группа).

Однако свое центральное значение для теории алгебраических уравнений теория групп приобретает лишь благодаря работам Галуа (1831), которому принадлежит и самый термин „группа“. Лагранж и другие наивно оперировали в области рациональности произвольных переменных коэфициентов уравнения (это мы называем здесь „общими“ уравнениями). Галуа вместо этого (как было отмечено уже прежде, особенно в предыдущей главе) предполагает, что область рациональности определенным образом установлена и утверждает, что по отношению к этой области каждое заданное уравнение характеризуется в указанном выше (стр. 379) смысле определенной группой перестановок корней, которая отнюдь не должна, как у Коши, содержать все перестановки.

Этим была настоятельно поставлена в порядок дня задача исследования всех групп, которые можно составить из перестановок n букв. До этого, собственно говоря, рассматривали только примеры групп, в частности группы, состоящие только из взаимно коммутативных операций; их называют *абелевыми группами.*

Задача изучения всех *резольвент* заданного уравнения приводит затем к задаче подсчета всех *подгрупп* данной группы. Основное понятие здесь создал также Галуа.

Все операции, получающиеся из подстановки T с помощью формулы $S^{-1}TS$, называют *эквивалентными.* Произведение двух подстановок, эквивалентных подстановкам T и U, эквивалентно произведению TU, так как согласно ассоциативному закону

$$S^{-1}TS \cdot S^{-1}US = S^{-1}TUS.$$

Когда подстановка T_i пробегает некоторую подгруппу, то все подгруппы, получающиеся по формуле $S^{-1}T_iS$, также называют *эквивалентными подгруппами.* Подгруппу называют далее *нормальной* или *инвариантной*, если все эквивалентные ей подгруппы совпадают с ней, т. е. если

$$S^{-1}T_iS = T_j,$$

где S есть произвольная операция из заданной группы, а T_i, T_j — операции, принадлежащие рассматриваемой подгруппе.

Далее Галуа называет группу *составной* или *простой*, в зависимости от того, содержит ли она или не содержит инвариантные подгруппы, отличные от самой группы и ее тождественной подгруппы, состоящей из одного только единичного элемента. В первом случае возможно, не выходя за пределы области рациональности корней данного уравнения, свести решение этого уравнения к ряду отдельных вспомогательных уравнений; во втором случае такое сведение невозможно: данное уравнение представляет собой тогда в данной области рациональности нерасчленяемую проблему. Приведу в качестве примера теорию уравнений третьей и четвертой степени. Пусть a, b, c, d суть

корни некоторого уравнения четвертой степени. Эти корни допускают 24 перестановки. В этой группе G_{24} особенно замечательны четыре нормальные подгруппы, содержащие только по четыре перестановки, именно те подгруппы G_4, которые мы получим, если будем переставлять корни всегда попарно, что даст расположения

$$T_1: \; a \; b \; c \; d,$$
$$T_2: \; b \; a \; d \; c,$$
$$T_3: \; c \; d \; a \; b,$$
$$T_4: \; d \; c \; b \; a.$$

Лагранж заметил, что существуют функции от a, b, c, d, принимающие при всех 24 перестановках три различных значения. Одной такой функцией является

$$z_1 = ab + cd,$$

из которой путем перестановок букв a, b, c, d получаются только два других значения этой функции:

$$z_2 = ac + bd,$$
$$z_3 = ad + cb.$$

Каждая из этих трех функций z_1, z_2, z_3 остается неизменной при перестановках подгруппы G_4. Поэтому при всех 24 перестановках букв a, b, c, d совокупность значений z_1, z_2, z_3 подвергается только $\frac{24}{4} = 6$ перестановкам. Они удовлетворяют уравнению третьей степени с группой G_6; это уравнение третьей степени называется „кубической резольвентой“ уравнения четвертой степени. Если бы не существовало нормальных подгрупп G_4, то это сведение уравнения четвертой степени к кубическому уравнению было бы невозможно.

То же относится и к существованию квадратичной резольвенты уравнения третьей степени.

Особой заслугой Галуа является то, что он выяснил в общем виде понятие о нормальной подгруппе и превратил, таким образом, метод, примененный Лагранжем при решении уравнений третьей и четвертой степени, в общий фундаментальный принцип, по-новому освещающий понятие разрешимости любого алгебраического уравнения.

Я не имею возможности проследить здесь дальше за развитием ряда примыкающих сюда теорем (среди которых имеется и решение вопроса о том, когда уравнение решается в радикалах). Я хотел бы только дать почувствовать, что здесь мы имеем в высшей степени интересную и притом совершенно абстрактную область, подводящую новый фундамент под традиционную с 1500 г. задачу решения алгебраических уравнений.

Достижением упоминавшегося раньше труда Камилла Жордана является именно то, что он глубоко проник в эту область

и дал первое систематическое ее изложение. В вышедшей раньше книге Серре *Cours d'algèbre supérieure* („Курс высшей алгебры") вопрос еще проработан неполностью. В частности Жордан обследовал всю алгебраическую геометрию, теорию чисел и теорию функций, чтобы отыскать интересные группы перестановок. Его изложение при этом удивительно тяжеловесное — не французское, а почти немецкое.

Учение о группах перестановок развилось дальше, независимо от всяких приложений к теории уравнений, в самостоятельную дисциплину. Мы встречаем здесь имена Кели, Силова, Дика, Гельдера, Фробениуса, Бернсайда (Burnside), а в последнее время и многих американских ученых. Для многих особая прелесть этой области заключается в том, что в ней можно работать, не зная слишком много об остальной математике и не будучи, таким образом, вынужденным комбинировать много различных циклов идей.

Мы обращаемся теперь к рассмотрению *конечных групп линейных подстановок*. Под подстановкой мы разумеем здесь не простую перестановку порядка расположения букв, как это делает Жордан, а операцию

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

т. е. линейное преобразование. Если угодно, то можно перестановки букв рассматривать как частный случай таких линейных подстановок, положив, например

$$a' = b, \quad b' = a.$$

Простейшей конечной группой линейных подстановок является совокупность подстановок вида

$$z' = \varepsilon^r \cdot z \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \quad (*)$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Это так называемый „циклический случай". Эту группу легко можно далее расширить и превратить в группу из $2n$ подстановок:

$$z' = \varepsilon^r \cdot z, \quad z' = \frac{\varepsilon^r}{z} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \quad (**)$$

где попрежнему $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Другой пример таких конечных групп мы получаем при рассмотрении *правильных многогранников*.

Операциями, о которых здесь идет речь, являются вращения, при которых многогранник приводится в совпадение с самим собой. При таком рассмотрении каждый правильный многогранник эквивалентен своему полярному многограннику, который остается при этих вращениях неизменным так же, как и исходный многогранник. Вершины многогранника, полярного относи-

тельно данного правильного многогранника, соответствуют, как известно, центрам граней последнего. Таким образом мы можем отнести друг другу:

Тетраэдр и *взаимный тетраэдр* (Gegentetraeder);
Октаэдр и *куб*;
Икосаэдр и *пентагондодекаэдр*.

Вращения, совмещающие правильный многогранник с самим собой, образуют в совокупности группу, так как ясно, что два таких последовательно выполненных вращения дают снова вращение, обладающее тем же свойством, причем имеет силу ассоциативный закон.

Для тетраэдра мы получаем группу из

$$4\cdot 2+3\cdot 1+1=12$$

вращений; именно в нее входят $4\cdot 2$ вращений на угол $\frac{2\pi}{3}$ (или $\frac{4\pi}{3}$) вокруг осей, соединяющих вершины тетраэдра с противолежащими вершинами взаимного тетраэдра, три вращения на угол $\frac{2\pi}{2}$ вокруг прямых, соединяющих середины двух противоположных ребер, и „тождественное“ вращение.

Аналогично для октаэдра мы имеем

$$3\cdot 3+4\cdot 2+6\cdot 1+1=24$$

вращений, а для икосаэдра

$$6\cdot 4+10\cdot 2+15\cdot 1+1=60$$

вращений. Таким образом мы получаем:

для тетраэдра и взаимного тетраэдра группу G_{12};
для октаэдра и куба группу G_{24};
для икосаэдра и пентагондодекаэдра группу G_{60}.

При этих исследованиях я открыл еще шестое правильное тело — „*диэдр*“. Если часть плоскости, ограниченную сторонами правильного n-угольника, мы будем рассматривать как двойную, то эту конфигурацию можно считать правильным многогранником, который совмещается с самим собой при n вращениях вокруг своей главной оси и таком же числе переворачиваний вокруг прямых, лежащих в его экваториальной плоскости. [Обычное определение правильных многогранников здесь вполне подходит, разница лишь в том, что объем этого многогранника равен нулю. Соответствующей „группой“ является приведенная выше группа (**).]

Мы ограничиваем теперь наше геометрическое исследование поверхностью сферы, проходящей через вершины правильного многогранника, и переносим на эту поверхность грани и ребра нашего многогранника путем прямолинейной проекции из центра сферы. Теперь мы будем рассматривать сферическую поверхность как носительницу некоторой комплексной переменной $x+iy$.

Каждому вращению соответствует при этом некоторая линейная подстановка $z = x + iy$, группе вращений соответствует группа подстановок.

Мне удалось доказать, что кроме перечисленных не существует никаких *других* конечных групп линейных преобразований одной переменной (Math. Annal., т. 9, 1875; Erlanger Berichte, 1874)[1].

Подстановки тетраэдра и октаэдра часто встречались уже неявно в старой литературе, подстановки же икосаэдра были новыми. При соответствующем выборе координат они изображаются формулами

$$z' = \varepsilon^{\mu} \cdot z,$$

$$z' = -\frac{\varepsilon^{4\mu}}{z^2},$$

$$z' = \varepsilon^{\nu} \cdot \frac{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\,\varepsilon^{\mu} z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\,\varepsilon^{\mu} z + (\varepsilon - \varepsilon^4)},$$

$$z' = -\varepsilon^{4\nu} \cdot \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\,\varepsilon^{\mu} z + (\varepsilon - \varepsilon^4)}{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\,\varepsilon^{\mu} z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)},$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Группы G_{12} тетраэдра и G_{24} октаэдра являются составными, группа же G_{60} икосаэдра — простой.

Эти группы можно еще расширить, именно удвоить, если ввести „диаметральную“ подстановку, которая заменяет каждую точку сферы точкой диаметрально ей противоположной. В расширенную, таким образом, группу включаются и все зеркальные отражения относительно плоскостей симметрии нашей конфигурации, т. е. относительно шести плоскостей для тетраэдра, девяти плоскостей для октаэдра и пятнадцати плоскостей для икосаэдра. Мы получаем, таким образом, „расширенные“ группы:

для тетраэдра $\overline{G}_{24}$,

для октаэдра $\overline{G}_{48}$,

для икосаэдра $\overline{G}_{120}$.

Я хотел бы сделать здесь два замечания, которые непосредственно относятся к сказанному и необходимы в целях подготовки последующего.

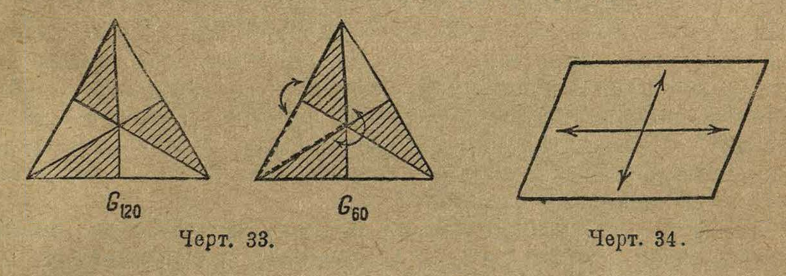
1. Плоскости симметрии делят каждую грань правильного многогранника на шесть конгруэнтных или симметричных треугольников. Таким образом, например, плоскости симметрии икосаэдра делят поверхность сферы на 120 таких треугольников, которые мы будем заштриховывать через один или оставлять свободными. При вращении заштрихованные треугольники переходят в такие же, а свободные — в свободные. Чтобы перевести

---

[1]) См. Klein, Ges. Abh., т. 2, Nr. LI.

заштрихованный треугольник в свободный, нужно ввести еще отражение (или вообще операцию из группы $\overline{G}$, не являющуюся вращением).

По выражению, введенному Фрике, каждый треугольник является *областью прерывности* группы $\overline{G}_{120}$. (Группа $\overline{G}_{120}$ называется прерывной, так как „эквивалентные" в этой группе точки лежат раздельно.) Каждой точке сферы соответствует в каждом треугольнике одна и только одна точка, в которую она может быть переведена операцией из группы $\overline{G}_{120}$. Следовательно, чтобы найти точку, эквивалентную заданной точке сферы относительно группы $\overline{G}_{120}$, нужно перейти к соответствующей точке соседнего треугольника. Таким образом под областью прерывности группы мы разумеем такую область, в пределах которой точка может перемещаться, не попадая на точки, эквивалентные ей относительно этой группы.



Черт. 33. Черт. 34.

Каждые два лежащие рядом треугольника совместно образуют область прерывности группы G_{60}. При этом, однако, нужно следить за тем, чтобы правильно учесть точки, лежащие на границе треугольников. На черт. 33 справа нужно относить к области прерывности только одну сторону и половину основания. Наконец, нужно отметить, что понятие об области прерывности нам знакомо уже по примеру двояко-периодической функции. Параллелограм периодов является областью прерывности для бесконечной группы линейных подстановок

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

причем отдельные стороны попарно соответствуют друг другу и из каждых двух соответствующих сторон только одну нужно относить к области (черт. 34).

2. Между группой G_{60} икосаэдра и группой 60 „четных" перестановок пяти элементов существует замечательное соотношение. Если середины 30 ребер икосаэдра принять за вершины пяти октаэдров, то при 60 вращениях икосаэдра эти октаэдры будут переставляться друг с другом. Таким образом группа G_{60} вращений икосаэдра изоморфна[1]) с группой четных перестановок пяти элементов.

[1]) То-есть, абстрактно говоря, тождественна ей.

Напротив, расширенная группа $\overline{G}_{120}$ икосаэдра не изоморфна со всей совокупностью перестановок пяти элементов. Диаметральная подстановка (с помощью которой мы получили $\overline{G}_{120}$ из G_{60}) оставляет каждый октаэдр сам по себе неизменным и поэтому не имеет никакой связи с перестановками пяти октаэдров. „Расширенная“ группа $\overline{G}_{120}$ содержит в качестве нормальных подгрупп:

а) группу G_{60} вращений,

б) группу G_2 диаметральных отражений.

Напротив, хотя группа G_{120} перестановок пяти элементов содержит нормальную подгруппу G_{30} (альтернирующую группу), она не содержит никакой нормальной подгруппы G_2. Она имеет, следовательно, совершенно иную структуру.

Замечание 1 на стр. 388—389 приводит нас теперь к рассмотрению других прерывных, но не конечных групп линейных подстановок одной переменной, откуда вырастает, наконец, общее учение об однозначных автоморфных функциях. Замечание же 2 приводит к замечательному соотношению между икосаэдром и теорией уравнений пятой степени, на котором мы также должны остановиться подробнее.

Однако раньше нужно сказать несколько слов о дальнейшем развитии этих исследований. Последнее происходило в двух направлениях, которые могут также комбинироваться друг с другом:

1. *Конечные* группы линейных подстановок нескольких переменных. Здесь также продолжил путь К. Жордан; сам я и Валентинер нашли простейшие (не тривиальные) примеры, значение которых позже установил Бличфельдт (Blichfeldt); Фробениус и И. Шур (I. Schur) наметили общую теорию для n переменных. Так же как икосаэдр дает теорию уравнений пятой степени, эта теория приводит нас к теории уравнений шестой и седьмой степени.

2. *Бесконечные* группы линейных подстановок одной переменной, в частности те, которые по Пуанкаре называются „существенно прерывными“, т. е. такие, для которых мы имеем в плоскости $x+iy$ (или соответственно на сфере $x+iy$) конечные области прерывности. Простейшим примером этого являются двояко-периодические функции, для которых параллелограм периодов является областью прерывности бесконечной группы линейных подстановок

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Функции, остающиеся неизменными при таких конечных или бесконечных группах преобразований, я назвал вообще *автоморфными функциями*; о них еще будет подробнее рассказано ниже.

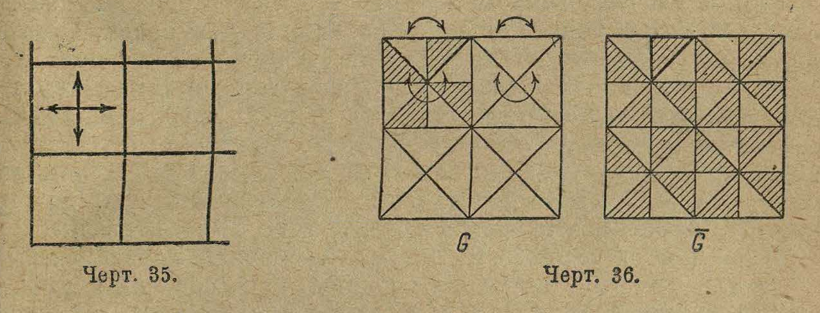
Предварительно однако я хочу показать, как те же рассуждения, связывающие геометрию с теорией групп, с которыми мы познакомились при рассмотрении конечных линейных подстано-

вок, могут найти и практическое приложение, именно в кристаллографии, специально в той части ее, которую теперь называют структурной теорией.

Развитие кристаллографии вообще в значительной мере связано с развитием математики, как уже было отмечено. Я напомню только о „законе зон“ Фр. Неймана, 1823 (см. стр. 258 и сл.).

В дальнейших рассуждениях мы исходим из непрерывной группы всех движений в пространстве, которая состоит из ∞^6 операций. Эту группу мы можем при надобности представлять себе еще дополненной ∞^6 операциями второго рода (отражения, переворачивания). Мы получаем, таким образом, снова группу из ∞^6 операций.

Теперь можно поставить себе задачу получить в самом общем виде существенно прерывные подгруппы G или $\bar{G}$ этой группы



Черт. 35. Черт. 36.

и изучить их области прерывности. Это значит, что пространство должно быть разложено на совокупность многогранников, которые переводятся один в другой операциями той или иной подгруппы. Эти исследования в пространстве очень сложны. Поэтому мы поясним их на одном примере в плоскости. Наши результаты можно будет, очевидно, перенести и на пространство. Мы рассматриваем, стало быть, вместо решетки параллелепипедов в пространстве обычную решетку параллелограмов в плоскости. Положим, например в основу наших рассуждений квадратную решетку. Соответствующая группа движений, для которой квадрат решетки является областью прерывности, состоит вначале только из группы параллельных перенесений (трансляций); см. черт. 35, где стрелки отмечают взаимное сопряжение ребер области прерывности. Квадратную сеть можно, однако, подразделить дальше так, что к ней будут присоединены в качестве дальнейших операций вращения или отражения. Мы получаем при этом разложение плоскости на конгруэнтные или соответственно конгруэнтные и симметричные треугольники (последние мы поочередно покрываем штриховкой и оставляем свободными, см. черт. 36). При вращениях, т. е. при операциях группы G, заштрихованные треугольники переходят в такие же, и то же имеет место для незаштрихованных. С помощью операций расширенной группы G все треугольники могут быть переведены один в другой. Каждый из

этих треугольников является областью прерывности определенной группы, состоящей из вращений и переворачиваний плоскости. При этом область прерывности группы $\overline{G}$ однозначно ограничена отражающими кривыми, тогда как к области прерывности группы G нужно относить только одну сторону и половину основания фундаментального треугольника.

Теперь легко сообразить, что в пространстве существуют аналогичные возможности, исчерпывающее перечисление которых, однако, является более трудным. Соответственно разложению плоскости мы получаем там решетку параллелепипедов, систему кубов, отдельные кубы которой соответствующим образом разделяются на части, и т. д.

Связь этих разложений пространства с кристаллографией устанавливается следующим образом.

Каждое из этих разложений пространства будет определять собой некоторый кристалл или кристаллическую среду, если мы представим себе, что в первой области прерывности находится совершенно произвольный агрегат молекул и что такие же агрегаты находятся и в соответствующих точках других областей.

К вводимой здесь, таким образом, проблеме структурной теории и ее решению кристаллографы приближались очень медленно на протяжении нескольких десятилетий. Ср. реферат Либиша, Шенфлиса и Мюгге в пятом томе „Энциклопедии".

Здесь нужно отметить имена Браве (Bravais), Зонке (Sohnke) и др. Однако первым, нашедшим полное решение, был русский ученый Федоров. В 1891 г. эта теория была заново обоснована Шенфлисом и изложена в его учебнике *Kristallsysteme und Kristallstruktur* („Кристаллические системы и кристаллическая структура"), Leipzig 1891[1]). Результат заключается в том, что существуют 65 групп G и 165 групп $\overline{G}$, т. е. всего 230 групп.

Я не могу не отметить, как медленно прокладывала себе путь эта теория у кристаллографов и физиков. В период около 1890 г. все специалисты привыкли рассматривать кристалл, или, лучше сказать, кристаллическую среду, как заполняющий пространство континуум, обладающий во всех своих точках одними и теми же свойствами. В этом случае нужно только различать, какие возможны группы вращений вокруг неподвижной точки (или, соответственно, какие возможны группы операций второго рода при неподвижной точке), совместимые с известным кристаллографическим законом так называемых рациональных индексов. Это приводит к известному различению 32 „кристаллических систем". Пути дальнейшего развития здесь закрыты. Закон рациональных индексов, являющийся следствием из представлений структурной теории, появляется здесь как deus ex machina.

---

[1]) Новое издание под названием „Theorie der Kristallstruktur" вышло в 1923 г. См. также P. Niggli, Geometrische Kristallographie des Diskontinuums, Leipzig 1919.

Это отрицательное отношение не могло помешать мне в 1893 г. в приветственной речи, обращенной к Международному конгрессу в Чикаго, отметить и подчеркнуть результаты теории[1]), ибо я, как и Шенфлис, был убежден в неизбежном совпадении теоретического умозрения и приложений.

И вот в 1912 г. Лауэ (Laue) открывает дифракцию рентгеновских лучей в кристаллических средах! Теперь мы наблюдаем прерывную структуру кристаллов, т. е. расположение их молекул в пространстве, и применяем именно то, что Федоров и Шенфлис создали как необходимый теоретический субстрат.

II. Автоморфные функции.

Перейдем теперь к теории *автоморфных функций*. Здесь я касаюсь главной области моих собственных работ. Мне очень хочется осветить мои исследования, относящиеся к этой области, с точки зрения личных воспоминаний и довести отчет до того момента, когда болезнь помешала мне продолжать работу, т. е. до 1882/83 г. Быть может, однако, следует предварительно отметить три книги по этому вопросу, написанные мной или под моим влиянием, так как я буду в дальнейшем ссылаться на них:

1. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grade (Клейн, „Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени", 1884).

2. Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen (Клейн-Фрике, „Лекции по теории эллиптических модулярных функций", т. I, 1890; т. II, 1892).

3. Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen (Фрике-Клейн, „Лекции по теории автоморфных функций", т. I, 1897; т. II, 1901, 1911, 1912).

Первая из этих книг задумана по существу как учебник, вторая и третья носят характер монографий. Во второй речь идет о группе подстановок $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, где α, β, γ, δ — целые числа с определителем, равным единице. Вопросы повсюду трактуются в духе теории групп. Разыскиваются простейшие типы подгрупп, заключенных в заданной общей группе, определяются области их прерывности и затем, согласно правилам римановской теории функций, делаются заключения относительно существования и характера соответствующих однозначных автоморфных функций (модулярных функций). Наши прежние рассуждения об эллиптических функциях уже несколько раз касались намеченной здесь постановки вопроса. В третьей из указанных книг определяются с помощью геометрических построений наиболее общие прерывные группы линейных подстановок одной переменной и делаются заключения относительно широты охвата соответствующих однозначных автоморфных функций. Это та область, в которой я в 1881—1882 гг. вступил в соприкосновение и соперниче-

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 2, стр. 613 и сл.

ство с Пуанкаре; наиболее общие ее теоремы, указанные мной, были доказаны только в недавнее время Кебе (Koebe).

В дополнение к указанным сочинениям я отмечу еще здесь же большой реферат Фрике „Об автоморфных функциях, включая и модулярные функции" в Энциклопедии (Enzyklop., II, B 4). Это очень полезная сводка, доведенная до 1913 г.[1]).

Впрочем в дальнейшем я буду подходить к изложению вопроса несколько иначе, чем это соответствует систематическому изложению, ближе придерживаясь исторического развития.

Для того чтобы проникнуть в теорию двояко-периодических функций

$$\wp(u\,|\,\omega_1, \omega_2), \quad \wp'(u\,|\,\omega_1, \omega_2)$$

можно избрать два различных пути. Можно либо исходить из разбиения плоскости u на параллелограмы и отсюда прямо притти к составлению функций $\wp(u)$ и $\wp'(u)$ и к соотношению между ними

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

либо же можно (как это исторически и происходило) исходить из эллиптического интеграла

$$u = \int \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}$$

и убедиться в том, что риманова поверхность, соответствующая

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

будучи подходящим образом разрезана, отображается функцией u на параллелограм, который, по мере того как путь интегрирования пересекает разрезы поверхности, постоянно заново воспроизводится и приводит, таким образом, к решетке параллелограмов.

Совершенно аналогично обстоит дело и с теорией автоморфных функций. Мы можем исходить из плоскости ζ (или соответственно сферы ζ) и ее разбиения на эквивалентные области и затем искать такие однозначные функции от ζ, которые не меняются при соответствующей группе линейных подстановок ζ; либо же мы можем, соответственно историческому ходу развития, исходить из линейного диференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + p_1\frac{d\eta}{dz} + p_2\eta = 0,$$

где p_1 и p_2 являются сначала рациональными, а позже алгебраическими функциями от z, принадлежащими соответствующей римановой поверхности над плоскостью z. При этом я возвра-

[1]) В дальнейшем нужно также принимать во внимание дополнительные замечания и пояснения к соответствующим работам Клейна, сделанные при издании его трехтомного собрания сочинений (1921—1923 гг.). *Прим. ред. нем. изд.*

щаюсь к выводам относительно линейных диференциальных уравнений, о которых была уже речь в главе шестой.

Таким образом здесь мы снова примыкаем к Риману, именно к его знаменитой лекции о гипергеометрическом ряде, прочитанной им зимой 1858/59 г. Эта лекция была застенографирована будущим физиком фон-Бецольдом и оставалась неизвестной широким кругам, пока она не была переслана мне в 1897 г. и издана в своих существенных частях в 1902 г. Нетером и Виртингером в их дополнениях к собранию сочинений Римана. Результатом этого было то, что многое из того, чего мы как раз должны сейчас коснуться, было впоследствии заново открыто и опубликовано другими. Я напомню в частности о работе Шварца *Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt* („О тех случаях, когда гауссов гипергеометрический ряд представляет алгебраическую функцию своего четвертого элемента", Ges. Abh., т. 2, стр. 211 и сл.). Предварительное сообщение о результатах было опубликовано им в Цюрихе в 1871 г. (Ges. Abh., т. 2, стр. 172 и сл.). Упомяну также и о некоторых деталях моей собственной работы *Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*[1]) („О преобразовании эллиптических функций и решении уравнений пятой степени", Math. Annalen, т. 14, 1878). Я хочу отметить, что и здесь Гаусс предвосхитил многое, как мы можем видеть из его литературного наследства (см. Gauss'Werke, т. 8).

Для того чтобы мой реферат не оказался слишком расплывчатым, я хочу,—конечно, не приводя доказательств—остановиться на некоторых деталях.

Гипергеометрический ряд, который Гаусс обозначил через $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)} z^2 + \ldots$$

и который сходится для $|z| < 1$ (иногда также для $|z| = 1$), представляет собой частный интеграл линейного диференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}\frac{d\eta}{dz} + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\eta = 0$$

с тремя особыми точками $z = 0, 1, \infty$.

Все решения этого диференциального уравнения могут быть изображены при помощи гипергеометрического ряда, который расположен по одному из шести аргументов

$$z,\ 1-z,\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{1-z},\ \frac{z}{1-z},\ \frac{z-1}{z}$$

и сходится в зависимости от аргумента либо в единичном круге

---

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 3, стр. 13 и сл.

E_0 вокруг точки нуль, либо в единичном круге E_1 вокруг точки $z=1$, либо вне E_0, либо вне E_1, либо в полуплоскости влево или вправо от прямой, соединяющей точки пересечения этих кругов (черт. 37). Составление этих решений и изучение их взаимных соотношений представляет собой задачу более кропотливую, нежели сложную; мы на ней сейчас задерживаться не станем.

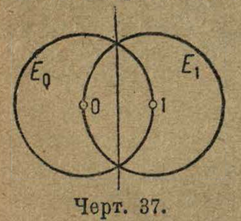
Таково в элементарной форме то, что изложил Риман в своей лекции 1858/59 г. и позже Шварц.

Обозначим какие-нибудь два частных решения диференциального уравнения через η_1 и η_2 и положим

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\zeta.$$

Все решения диференциального уравнения могут быть получены из η_1 и η_2 в виде

$$\eta=m\eta_1+n\eta_2;$$



Черт. 37.

в частности, когда z совершает полный обход в своей области, η_1 и η_2 переходят в некоторые линейные комбинации

$$\eta_1'=\alpha\eta_1+\beta\eta_2,$$
$$\eta_2'=\gamma\eta_1+\delta\eta_2,$$

из которых путем последовательного применения различных обходов возникает целая группа линейных подстановок, которую мы раньше назвали „группой монодромии“ линейного диференциального уравнения [1]).

Отношение $\zeta=\frac{\eta_1}{\eta_2}$ подвергается при этих обходах в плоскости z дробно-линейным подстановкам

$$\zeta'=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}.$$

Из исходного диференциального уравнения второго порядка

$$\eta''+p_1\eta'+p_2\eta=0,$$

мы получаем для ζ диференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2=2p_2-\frac{1}{2}p_1^2-p_1'.$$

Выражение в левой части (по предложению Кели) часто называют *диференциальным выражением Шварца*. Подставляя вместо p_1 и p_2 коэфициенты гипергеометрического диференциального уравнения, получаем

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2=\frac{1-\lambda^2}{2z^2}+\frac{1-\mu^2}{2(1-z)^2}-\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{2z(1-z)},$$

[1]) Величины α, β, γ, δ в подстановках, конечно, не имеют ничего общего с параметрами ряда $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$.

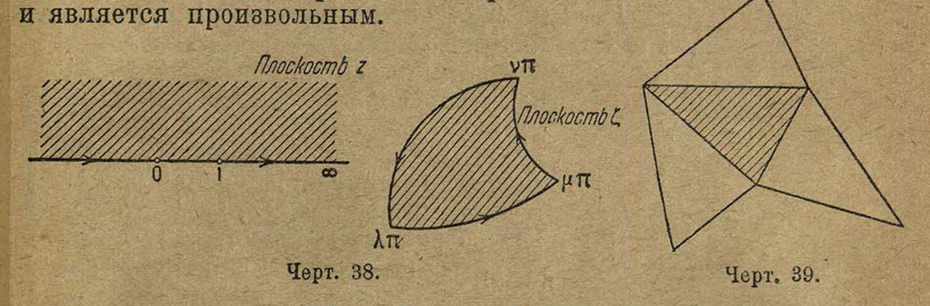
где $\lambda^2=(1-\gamma)^2$, $\mu^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2$, $\nu^2=(\alpha-\beta)^2$ и λ, μ, ν, в предположении, что α, β, γ — вещественные числа, являются положительными. Совокупность подстановок

$$\zeta'=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$$

мы будем в дальнейшем называть также группой монодромии диференциального уравнения для ζ.

Мы видим, как мы подходим здесь к группам линейных подстановок одной переменной!

Исходя из этого, Риман и Шварц доказывают, что каждое частное решение ζ нашего диференциального уравнения третьего порядка в случае вещественных λ, μ, ν дает очень простое конформное отображение верхней полуплоскости z, ограниченной вещественной осью, именно отображение ее на треугольник, образуемый дугами окружностей, пересекающимися под углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ (черт. 38). Более точное расположение этого треугольника зависит от выбора частного решения ζ и является произвольным.



Черт. 38.

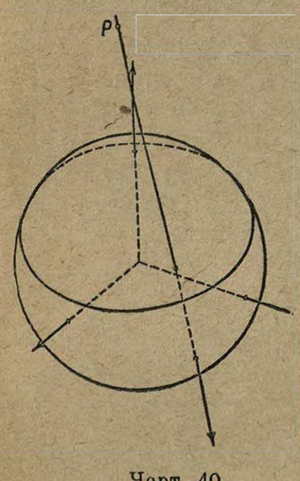
Черт. 39.

При этом нужно только следить за направлением обхода. Если на вещественной оси установить направление, указывающее от $-\infty$ к $+\infty$, то положительная полуплоскость отображается на внутреннюю часть треугольника, обходимого против часовой стрелки.

Само по себе это построение является одним из красивейших примеров конформного отображения двух односвязных областей. Но особенно замечательно то, что здесь, исходя из одного такого треугольника, можно чисто геометрически построить весь дальнейший ход функции ζ. Здесь можно осуществить аналитическое продолжение, не прибегая к громоздкому аппарату бесконечных степенных рядов! Это осуществляется с помощью так называемого *принципа симметрии (принципа отражения)*. Зеркально отражая с помощью инверсии треугольник относительно одной из его сторон, я сейчас же получаю картину отрицательной полуплоскости z и т. д.

Если оставаться на плоскости, то особенно простая и типичная картина получается в случае прямолинейного треугольника; в этом случае $\lambda+\mu+\nu=1$ (черт. 39).

Другие случаи легче рассмотреть на шаре. С помощью стереографической проекции на сферу ζ наш треугольник, составленный из трех круговых дуг, переходит в такой же треугольник на сфере, т. е. в треугольник, ограниченный тремя плоскими сечениями сферы. Отражение от стороны треугольника означает здесь отражение от вырезывающей ее плоскости, т. е. операцию, которая заменяет каждую точку сферы той точкой, которая лежит с данной точкой и с полюсом плоскости относительно сферы на одной прямой (черт. 40). В частности если плоскость проходит через центр шара, то полюс уходит в бесконечность и наше „отражение" совпадает с обычным зеркальным отражением.



Черт. 40.

Теперь уже легко видеть связь с *правильными многогранниками*. Каждому правильному многограннику, например икосаэдру, мы отнесли определенное разбиение описанной около него сферы на треугольники (ограниченные плоскостями симметрии правильного многогранника; для икосаэдра — это 120 поочередно заштрихованных и свободных треугольников). Прежде эти треугольники представляли собой области прерывности определенных групп вращений, расширенных введением отражений. Теперь мы видим, что те же треугольники появляются как частный случай при изучении гипергеометрических функций. Нужно только рассматривать каждый треугольник как конформное отображение соответственно положительной или отрицательной полуплоскости z, чтобы в совокупности треугольников получить совокупность тех изображений обеих полуплоскостей, которые создает соответствующая функция при произвольном аналитическом продолжении.

Я хочу еще отметить, что нашу функцию ζ Шварц обозначил буквой s, или, подробнее, $s(\lambda, \mu, \nu; z)$, рассматривая ее как отображение плоскости z на сферу s, так как конформное отображение становится особенно наглядным, если его производить на сферическую поверхность. За этой функцией утвердилось название „треугольной функции" („Dreiecksfunktion"), см. мои литографированные лекции 1893/94 г.— *Über die hypergeometrische Funktion* („О гипергеометрических функциях").

Теперь я обращаюсь в частности к *икосаэдру*. Предварительно, однако, я хочу еще раз напомнить, что мы пришли двумя путями к разбиению шара на треугольники плоскостями симметрии правильного многогранника. Один путь ведет от теории конечных групп линейных подстановок, другой — от теории гипергеометрических функций. То, что там было областью прерывности

группы, здесь есть осуществляемое функцией ζ [или $s(\lambda, \mu, \nu; z)$] конформное отображение плоскости z и называется *фундаментальной областью* (Fundamentalbereich) функции ζ.

В частности функцию ζ, встречающуюся нам в случае икосаэдра, мы по Шварцу можем обозначить

$$s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}; z\right),$$

так как речь идет об отображении положительной полуплоскости на сферический треугольник с углами $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}$. Этим случаем мы и займемся теперь подробнее вследствие тех разнообразных соотношений, которые здесь можно установить.

Функция $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}; z\right)$, так же как и аналогичные функции, соответствующие другим правильным многогранникам, характеризуется следующими свойствами:

1. Треугольники, получаемые при отображении плоскости z или соответственно обеих полуплоскостей, покрывают сферу ζ один раз и *без пробелов*.

2. Для этого покрытия сферы достаточно конечного количества треугольников (60 или 120) — в отличие от случая прямолинейного треугольника с углами $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, с которыми мы встречались, когда говорили о кристаллической структуре (см. стр. 391, черт. 36), и где мы имели однократное покрытие плоскости бесконечно большим числом треугольников (впрочем точка $\zeta = \infty$ являлась здесь точкой сгущения этих треугольников).

Поэтому в случае икосаэдра мы можем притти к такому заключению: $\zeta(z)$ есть 60-значная функция, так как каждому значению z соответствует определенная точка в каждом из 60 заштрихованных или незаштрихованных треугольников; функция же $z(\zeta)$ однозначна. На сфере в соответствующих вершинах сходятся соответственно 3, 2 и 5 пар треугольников. Поэтому, соответственно этому правильному разбиению сферы, мы имеем над плоскостью z 60-листную риманову поверхность, листы которой связаны в точках $z = 0, 1, \infty$ соответственно по 3, 2 и 5. Так как функция $z(\zeta)$ однозначна, а функция $\zeta(z)$ — 60-значна, то z есть *рациональная* функция 60-й степени от ζ:

$$z = R_{60}(\zeta),$$

строение которой мы можем установить еще точнее.

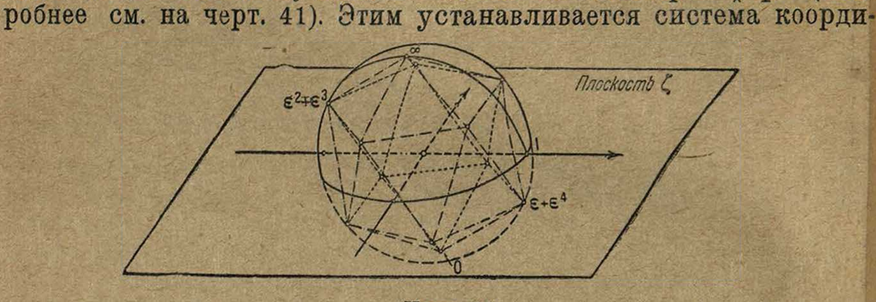
Точки $z = 0, 1, \infty$ должны давать соответственно трехкратные, двукратные и пятикратные корни ζ. Так как z должна быть рациональной функцией 60-й степени от ζ, то мы можем выразить это пропорцией

$$z : z - 1 : 1 = \varphi_{20}^3 : \psi_{30}^2 : \chi_{12}^5,$$

где φ, ψ, χ суть полиномы указанных степеней относительно ζ.

Шварц первый вычислил эти полиномы, разыскав их нули на сфере ζ и затем перемножив соответствующие множители, линейные относительно ζ. Я заметил, что достаточно вычислить χ_{12}, и тогда полиномы φ_{20} и ψ_{30} могут быть получены с помощью простых рассуждений из теории инвариантов.

Вычислим теперь χ_{12}. Для этого мы ориентируем икосаэдр так, чтобы одна его вершина совпала с точкой $\zeta = 0$, другая — с точкой $\zeta = \infty$ и две других вершины лежали на меридиане вещественных чисел. Пусть $\zeta = 1$ лежит на экваторе сферы (подробнее см. на черт. 41). Этим устанавливается система коорди-



Черт. 41.

нат. Для двух вершин, лежащих на меридиане вещественных чисел и отличных от 0 и ∞, мы находим значения ζ:

$$\varepsilon + \varepsilon^4 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^3 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Эти значения получаются из подстановок икосаэдра

$$-\zeta' = \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\,\varepsilon^{\mu}\zeta_0 + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\,\varepsilon^{\mu}\zeta_0 + (\varepsilon-\varepsilon^4)}; \quad -\zeta' = \frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\,\varepsilon^{\mu}\zeta_0 + (\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\,\varepsilon^{\mu}\zeta_0 + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)},$$

если положить $\zeta_0 = 0$. Остальные вершины мы получим умножением на ε^{ν}, где $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$. Таким образом для 12 вершин мы получаем значения

$$\begin{array}{ll} \zeta = 0, & \zeta = \varepsilon^{\nu}\,(\varepsilon + \varepsilon^4) \\ \zeta = \infty, & \zeta = \varepsilon^{\nu}\,(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) \end{array} \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Теперь полезно (для того чтобы отчетливо ввести и значение $\zeta = \infty$) сделать ζ однородным, т. е. представить его в виде отношения $\zeta_1 : \zeta_2$. Тогда

$$\chi_{12} = \zeta_1\zeta_2\,[\zeta_1^5 - (\varepsilon + \varepsilon^4)^5\,\zeta_2^5]\cdot[\zeta_1^5 - (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)^5\,\zeta_2^5]$$

или после умножения

$$\chi_{12} = \zeta_1\zeta_2\,(\zeta_1^{10} + 11\zeta_1^5\zeta_2^5 - \zeta_2^{10}).$$

В дальнейшем мы будем обозначать эту нашу основную форму через f. (Собственно говоря, мы могли бы ввести и любое кратное

ее, но удобнее опустить все ненужные численные множители.) Положив f равным нулю, мы получим, следовательно, 12 вершин икосаэдра.

Мы определим теперь φ_{20} и ψ_{30} с помощью соображений из теории инвариантов.

Отделив соответствующие числовые множители, мы по правилам формальной теории инвариантов получим из f в качестве простейших ковариантов гессиан H и функциональный определитель T, построенный из f и H:

$$H = \frac{1}{121}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad T = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix}.$$

Форма H имеет степень 20, так как каждый член определителя является полиномом 10-й степени; определитель же T является функцией 30-й степени, так как f_1 и f_2 имеют степень 11, а H_1, H_2 — степень 19. Теперь можно показать, что наша функция φ_{20} совпадает с гессианом формы f, а ψ_{30} — с определителем $(H, f) = T$.

Это можно показать очень просто: H и T как коварианты формы f остаются, подобно f, неизменными при 60 вращениях икосаэдра, если условиться, что дробно-линейным подстановкам ζ соответствуют однородные линейные подстановки ζ_1, ζ_2 с определителем 1. Приравнивая H нулю, мы получаем, таким образом, 20 точек сферы, которые при операциях группы G_{60} переходят в самих себя. Приравнивая T нулю, мы получаем 30 точек с теми же свойствами. Но мы знаем, что вообще при вращениях группы икосаэдра G_{60} существует только 60 эквивалентных точек, в частности же переходят друг в друга 12 вершин икосаэдра, 20 вершин пентагондодекаэдра и 30 середин ребер. Совокупность точек, остающихся неизменными при вращениях группы G_{60}, должна, таким образом, состоять из таких отдельных групп точек. Число точек, которые она содержит, поэтому всегда может быть написано в виде $20\alpha + 12\beta + 20\gamma + 30\delta$, где α, β, γ, δ — целые числа. Уравнения

$$60\alpha + 12\beta + 20\gamma + 30\delta = 20,$$

$$60\alpha + 12\beta + 20\gamma + 30\delta = 30$$

имеют только одно целочисленное решение, именно

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 0;$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1.$$

Это означает, что $H = 0$ дает 20 вершин пентагондодекаэдра, т. е. совпадает с φ_{20}, а $T = 0$ дает 30 середин ребер, т. е. совпадает с ψ_{30}. При этом мы не обращали внимания на остающиеся произвольными численные множители.

Вычислим теперь H и T (опуская не интересующие нас численные множители); мы получим

$$H = -(\zeta_1^{20} + \zeta_2^{20}) + 228(\zeta_1^{15}\zeta_2^5 - \zeta_2^{15}\zeta_1^5) - 494\zeta_1^{10}\zeta_2^{10},$$

$$T = (\zeta_1^{30} + \zeta_2^{30}) + 522(\zeta_1^{25}\zeta_2^5 - \zeta_2^{25}\zeta_1^5) - 10\,005(\zeta_1^{20}\zeta_2^{10} - \zeta_2^{20}\zeta_1^{10}),$$

откуда вытекает „*уравнение икосаэдра*“ в виде

$$z : z - 1 : 1 = H^3 : -T^2 : 1728 f^5.$$

(В свое время для большей верности я проверил подробными вычислениями тождество

$$T^2 = -H^3 + 1728 f^5.)$$

Таким образом z является в нашей общей терминологии однозначной автоморфной функцией от ζ, которая, конечно, носит еще гораздо более элементарный характер, чем те примеры, с которыми мы встретимся дальше.

Мы сделаем однако небольшой экскурс, рассматривая нашу формулу, которую мы назвали *уравнением икосаэдра*, как алгебраическое уравнение 60-й степени от ζ, и установив ее место в общем учении об алгебраических уравнениях, т. е. еще раз вернувшись в известном смысле к прошлой главе.

Деление сферы дает нам непосредственно 60 областей, в которых мы при заданном z должны искать 60 соответствующих значений ζ. То, что называют „отделением корней“ и что прежде всего необходимо при численном решении уравнений, здесь дается сразу. (В частности при вещественном z существуют четыре и только четыре вещественных значения ζ.)

Если мы нашли один корень ζ_0 и если присоединим величину ε ($\varepsilon^5 = 1$), то мы получим рациональным путем все остальные корни с помощью 60 подстановок икосаэдра в виде

$$\varepsilon^{\mu}\zeta_0, \quad -\varepsilon^{\nu}\frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^{\mu}\zeta_0 + (\varepsilon - \varepsilon^4)}{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^{\mu}\zeta_0 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)},$$

$$\varepsilon^{\mu}\zeta_0^{-1}, \quad \varepsilon^{\nu}\frac{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^{\mu}\zeta_0 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^{\mu}\zeta_0 + (\varepsilon - \varepsilon^4)}.$$

Уравнения, все корни которых в избранной области рациональности выражаются рационально через *один*, называют *уравнениями Галуа* (так как Галуа показал, каким образом к ним сводятся все остальные уравнения). При этом группа Галуа для таких уравнений изоморфна с группой рациональных подстановок. Резюмируя, мы можем сказать: в области рациональности ε уравнение икосаэдра есть уравнение Галуа, и его группа Галуа изоморфна с группой G_{60} вращений икосаэдра.

Таким образом соответственно подгруппам вращений икосаэдра мы можем построить более низкие резольвенты уравнения икосаэдра, в частности, согласно нашим прежним замечаниям (стр. 390), *резольвенты пятой степени*.

Изящество указанного построения заключается в том, что все здесь можно явно вычислить и при этом знать, как это нужно делать наиболее простым способом.

Простейшими группами точек, которые занимают при вращениях икосаэдра пять положений, являются вершины 5 октаэдров, которые можно привести в соответствие с 30 точками, делящими пополам ребра икосаэдра. (Каждый из них остается инвариантным при 12 вращениях тетраэдрической группы, входящей в группу икосаэдра.) Еще более простыми кажутся на первый взгляд 2 тетраэдра, на которые можно расщепить 8 принадлежащих октаэдру вершин. Но, как можно показать, в однородном написании остается инвариантной по отношению к подстановкам группы тетраэдра не сама соответствующая форма, а лишь ее третья степень!

Первый октаэдр можно вычислить по формуле

$$t_0 = \zeta_1^6 + 2\zeta_1^5\zeta_2 - 5\zeta_1^4\zeta_2^2 - 5\zeta_1^2\zeta_2^4 - 2\zeta_1\zeta_2^5 + \zeta_2^6,$$

откуда остальные t_ν получаются с помощью подстановок

$$\begin{aligned} \zeta_1' &= \varepsilon^{\nu}\zeta_1 \\ \zeta_2' &= \varepsilon^{-\nu}\zeta_2 \end{aligned} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Для этих форм t_ν можно вычислить затем резольвенту *теории форм*:

$$t^5 - 10f\cdot t^3 + 45f^2\cdot t - T = 0,$$

откуда для $r = \frac{t^2}{f}$ получается простейшая резольвента *теории функций*:

$$z : (z-1) : 1 = (r-3)^3(r^2 - 11r + 64) : r(r^2 - 10r + 45)^2 : -1728.$$

Как бы мы однако ни искали резольвенты, — уравнение икосаэдра *не разрешается* в радикалах, так как группа G_{60} является „простой“ [(см. стр. 384; элементарное доказательство, не предполагающее знакомства с теорией Галуа, см. в Math. Annalen, т. 61, 1905 [1])].

Я замечу к этому, что собственно задача алгебры в каждом данном случае заключается в сведении решения данного уравнения к ряду чистых уравнений; решение же этих уравнений, т. е. извлечение корней, является делом „трансцендентным“, оно осуществляется с помощью биномиального ряда. Вообще же для решения каждого встречающегося „простого“ уравнения нужно искать особого разложения в ряд.

Следуя Риману-Шварцу, мы можем вычислить корни уравнения икосаэдра с помощью следующего по простоте разложения в ряд, именно с помощью гипергеометрического ряда.

---

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 2, стр. 481 и сл.

Я хочу указать здесь для области сходимости $|z| \geqslant 1$ пять корней, лежащих в окрестности точки $\zeta = 0$.

Имеем

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt[5]{1728}} \cdot \frac{F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}; \frac{1}{z}\right)}{F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}; \frac{1}{z}\right)}$$

(где первый член легко проверить по уравнению икосаэдра). Это выражение сходится однако довольно плохо, что впрочем имеет место и для биномиального ряда.

В итоге мы видим, что уравнение икосаэдра мы можем рассматривать как *нормальное уравнение*, решение которого по простоте занимает следующее место после чистых уравнений $\zeta^n = z$.

Мы познакомились уже с простейшим уравнением пятой степени, которое может быть решено с помощью уравнения икосаэдра. То же относится вообще к любому уравнению пятой степени, о чем я хотел бы дать несколько исторических указаний.

Проблема решения уравнений пятой степени насчитывает к настоящему времени около четырех столетий, так как она естественно возникла после того, как в годы 1515—1540 удалось решить в радикалах уравнения третьей и четвертой степеней. В 1515 г. Сципион дель-Ферро (Scipione del Ferro) нашел решение общего уравнения третьей степени, которое ошибочно приписывают обычно Кардану [1] (Cardanus). Около 1540 г. Людовик Феррари (Ludovico Ferrari) пришел к решению уравнения четвертой степени. За этим последовали многочисленные попытки сделать то же для уравнений пятой степени [2]. С таких попыток начал, как я говорил в главе третьей, и Абель. Ошибочное доказательство разрешимости обеспечило ему стипендию и возможность продолжать занятия! Однако в 1824 г. он установил, что уравнения пятой степени в общем виде не могут быть разрешены в радикалах. Это доказательство невозможности решения однако не помешало тому, что попытки достигнуть этой цели продолжались; Майер-Гирш (Meyer-Hirsch), известный берлинский частный преподаватель, умерший в 1851 г., сошел на этом с ума. И тем не менее попытки не прекращались.

Во главе этого развития стоит снова Галуа, доказавший в 1831 г. теорему о том, что при преобразованиях пятого порядка эллиптических функций мы приходим к уравнениям пятой степени с группой G_{60}, так что во всяком случае существуют примеры уравнений пятой степени, которые должны разрешаться с помощью модулярных функций. Сама по себе

[1]) Об отдельных подробностях см. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, 2-е изд. (Berlin 1921—1924), т. 3. стр. 71 и сл.

[2]) Tropfke, там же, стр. 90 и сл.

группа общего уравнения пятой степени есть $G_{5!} = G_{120}$, если же присоединить еще квадратный корень из дискриминанта уравнения, то она сводится к группе G_{60} (именно к группе *четных* перестановок пяти корней).

За этим следует достопамятный 1858 год, когда, с одной стороны, начал свои лекции о гипергеометрическом ряде Риман, а с другой стороны, Эрмит и затем под его влиянием Кронекер показали, как можно с помощью элементарных методов так преобразовать общее уравнение пятой степени, чтобы оно решалось в эллиптических модулярных функциях [1]).

В 1861 г. Кронекер (Berliner Monatsberichte, 1861; Crelle, т. 59) проник в теорию значительно глубже, не дойдя однако еще до уравнения икосаэдра (к которому он подошел очень близко). Действительно, *существенное* заключается в том, чтобы связать решение с *уравнением икосаэдра*; привлечение эллиптических функций играет такую же роль, как привлечение логарифмов при извлечении корней. В дальнейшем значение введения эллиптических функций будет уяснено более подробно.

Связь с икосаэдром (общее функционально-теоретическое значение которой было выявлено еще в лекциях Римана, т. е. в 1858/59 г.) заключается в следующем. Можно элементарным путем (с помощью так называемого преобразования Чирнгаузена) привести уравнение пятой степени к виду

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

(я буду называть это уравнение *главным уравнением пятой степени*). Тогда для пяти его корней y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 имеют место соотношения

$$\sum_0^4 y_\rho = \sum_0^4 y_\rho^2 = 0.$$

Если ввести выражения Лагранжа

$$p_\nu = y_0 + \varepsilon^\nu y_1 + \varepsilon^{2\nu} y_2 + \varepsilon^{3\nu} y_3 + \varepsilon^{4\nu} y_4 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4),$$

то, с одной стороны,

$$p_0 = 0,$$

а с другой —

$$p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0.$$

Последнее уравнение мы будем рассматривать как уравнение поверхности второго порядка, которая переходит в самое себя при 120 перестановках пяти корней, т. е. при 120 линейных преобразованиях величин p_1, p_2, p_3, p_4 или, иначе говоря, при 120 коллинеациях пространства.

Из этого следует, что при 60 *четных* перестановках корней y_ν, каждая из обеих систем прямолинейных образующих F_2 переходит в самое себя. Такого рода заключение делалось

[1]) Comptes rendus, т. 46, стр. 508 и сл.; Oeuvres d'Hermite, т. 2, стр. 5.

впоследствии в самых разнообразных областях. Отсюда же остается только один шаг, чтобы увидеть, что параметры ζ и ζ' обеих образующих

$$-\frac{p_1}{p_2}=\frac{p_3}{p_4} \quad \text{и} \quad -\frac{p_2}{p_4}=\frac{p_1}{p_3}$$

при 60 четных перестановках корней y подвергаются как раз 60 подстановкам икосаэдра и, следовательно, зависят от уравнения икосаэдра, в котором z есть рациональная функция от коэфициентов α, β, γ и квадратного корня из дискриминанта уравнения [см. *Vorlesung über das Ikosaeder* („Лекция об икосаэдре"), гл. 3; о том, как явно выражается это z и как, наоборот, после вычисления ζ или ζ' получить корни заданного уравнения пятой степени,—можно прочесть в этой моей книге].

Здесь будет совершенно уместно закончить этот раздел похвальным словом правильным многогранникам. Их история связана со всем развитием математики. Пифагорейцам они представлялись символом мистического совершенства. Греческие натурфилософы ставили их в параллель с пятью элементами. Греческим геометрам удалось доказать, что не существует никаких правильных тел, кроме пяти известных, и что эти пять тел можно построить из радиуса описанного шара с помощью циркуля и линейки. Тринадцать книг „Начал" Эвклида составлены как раз так, что построение правильных многогранников является их завершением.

На протяжении всех средних веков они оставались предметом мистического почтения и символом твердости характера. В гербе моей родины имеется правильный тетраэдр с подписью

„Viereckiger Stein, wie er auch fällt,
stets mit des Spitze nach oben sich stellt"

(„Четырехугольный камень, как бы он ни упал, всегда обращен вершиной вверх"). Кеплер пользовался правильными телами, чтобы в смелом полете фантазии связать друг с другом размеры планетных орбит. И в новое время они снова входят в круг внимания математиков и удивительным образом сочетают в себе геометрию, теорию групп, алгебру и теорию функций, указывая путь к дальнейшим исследованиям.

Случай икосаэдра

$$\zeta=s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}; z\right),$$

который мы выше рассматривали отдельно, был замечателен тем, что здесь *конечное* число треугольников при повторении ровно укладывалось на сферу; дальнейший ход мыслей, который мы проследим, приводит к рассмотрению случаев, когда то же имеет место для *бесконечного* числа треугольников.

Очевидно, мы всегда получим ровное расположение тругольников друг подле друга, если положим

$$\lambda=\frac{1}{l}, \quad \mu=\frac{1}{m}, \quad \nu=\frac{-1}{n},$$

где l, m, n — целые числа, бо̀льшие чем 2.

При этом нужно различать три существенно различных случая, когда $\lambda+\mu+\nu$ больше, равно или меньше единицы.

Если $\lambda+\mu+\nu>1$, то простые рассуждения теории чисел приводят нас к четырем возможностям, соответствующим треугольникам правильных тел:

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{n} \ldots \text{диэдр,}$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} \ldots \text{тетраэдр,}$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4} \ldots \text{октаэдр,}$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5} \ldots \text{икосаэдр.}$$

(См. чертежи в книге Klein-Fricke, Modulfunktionen, т. I, стр. 75, 76, 104—106.)

Если $\lambda+\mu+\nu=1$, то можно исходный треугольник взять прямолинейным, что приводит к фигурам, укладывающимся в сеть параллелограмов. Здесь возможны три случая (там же, стр. 107):

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}.$$

Второй из этих случаев мы уже рассматривали выше в качестве примера. Вся плоскость (сфера) покрывается семейством треугольников за исключением бесконечно удаленной точки, являющейся предельной.

Обратимся теперь к третьему случаю:

$$\lambda+\mu+\nu<1,$$

которому соответствует бесконечное множество различных троек значений λ, μ, ν.

Три стороны такого треугольника имеют общий вещественный ортогональный круг, воспроизводящийся при всех отражениях, и бесконечное количество треугольников, возникающих при воспроизведении, располагается так, что этот *ортогональный круг* является их *естественной границей* (см., например,

для случая $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$ *Modulfunktionen*, т. I, стр. 109, черт. 33).

В эти фигуры, встречающиеся еще у Гаусса (см. главу первую, стр. 77; Gauss'Werke, т. 8, стр. 104), нужно вдуматься, не упуская из виду, что мы находимся в области инверсионной геометрии. В частности нужно представить себе, какой вид они принимают, когда общий ортогональный круг берется, что́ очень удобно, в виде прямой линии, в частности вещественной оси.

Среди этих фигур третьего рода в частности имеются фигуры с углами

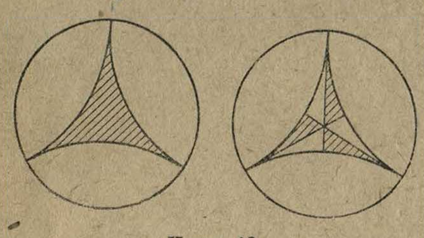
$$0, \quad 0, \quad 0$$

и

$$\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{3}, \ 0,$$

вводящие нас в *теорию эллиптических модулярных функций*; о них мы уже говорили выше несколько раз и теперь остановимся на них подробнее.

Если мы возьмем исходный треугольник с углами 0, 0, 0, то ортогональным кругом является круг, описанный около этого треугольника. При отражении этого треугольника около одной из его сторон мы получаем снова треугольник, вершины которого лежат на ортогональном круге. Продолжая далее такие отражения, мы получаем однократное и сплошное покрытие всей внутренности круга треугольниками, которые становятся все меньше и меньше и вершины которых лежат на периферии круга. Из треугольника с углами 0 мы сейчас же получаем и второй случай. Для простоты возьмем треугольник с углами 0, 0, 0 равносторонним, что не ограничивает общности наших выводов. Если мы проведем высоты этого треугольника (черт. 42), то он окажется разложенным на шесть треугольников с углами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0. Каждый из этих маленьких треугольников дает при отражении остальные пять, так как каждые два смежных треугольника симметричны по отношению к общей стороне. Применяя теперь неограниченный процесс отражения к этим треугольникам, мы получим очевидно ту же фигуру, что и в первом случае, если там мы разделим каждый треугольник на шесть треугольников надлежаще проведенными кругами высоты (Klein-Fricke, там же черт. на стр. 111, 112).



Черт. 42.

Если перевести граничную окружность в вещественную ось, то получим фигуры, приведенные на стр. 273 (случай 1) и стр. 113 (случай 2). В качестве исходных треугольников мы получаем в частности приведенные на черт. 43.

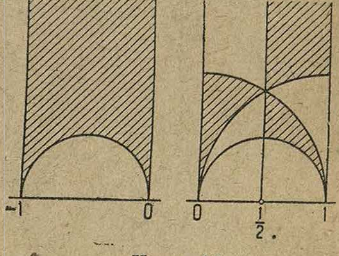
Заменим теперь, как это принято в теории эллиптических модулярных функций, обозначение ζ буквой ω. Отражения (которые аналитически получаются при замене ω на $-\bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ есть комплексная величина, сопряженная с ω) мы оставим в стороне. Тогда для треугольника с углами $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 мы имеем группу $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, где α, β, γ, δ суть некоторые целые числа с определителем 1. Для треугольника же с нулевыми углами мы получим ту подгруппу этой группы, для которой

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2},$$

что я назвал *главной конгруэнцией второй ступени*.

Как же входят эти группы и фигуры в элементарную теорию эллиптических функций, в частности в теорию эллиптических модулярных функций?

Я говорил уже об этом выше, в главе первой, посвященной Гауссу, и здесь могу резюмировать только результат; отчасти мы касались этого и там, где речь шла о работах Вейерштрасса. Кроме того, я могу отослать к курсу эллиптических функций Фрике [1]).



Черт. 43.

Рациональными инвариантами эллиптических интегралов первого рода по отношению к линейным преобразованиям первичных периодов ω_1, ω_2 являются g_2, g_3 и дискриминант

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Отсюда мы получаем абсолютный инвариант $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$. Если положим $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$, то $\omega(J) = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0; J\right)$, что поддается интегрированию при помощи гипергеометрического ряда. В частности для исходной пары треугольников нашей нормальной фигуры

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\left\{\ln 1728\,J + \frac{\partial}{\partial\rho}\ln F\left(\rho + \frac{1}{12}, \rho + \frac{5}{12}, 2\rho + 1; \frac{1}{J}\right)\right\}_{\rho=0} =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\ln 1728\,J - \frac{31i}{144\pi}\cdot\frac{1}{J} - \frac{13\,157\,i}{165\,888\,\pi}\cdot\frac{1}{J^2} - \ldots$$

(Эта формула имеет несколько иной вид, чем в случае икосаэдра, так как элемент γ того гипергеометрического ряда, с которым мы здесь имеем дело, является целым числом.)

---

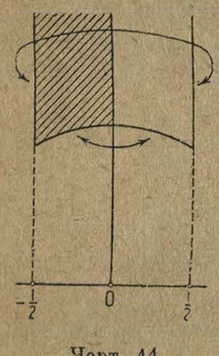
[1]) R. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, Leipzig, т. 1, 1916, т. 2, 1922.

В качестве соответствующей исходной фигуры нужно взять показанный на черт. 44 треугольник; связь между его сторонами отмечена стрелками.

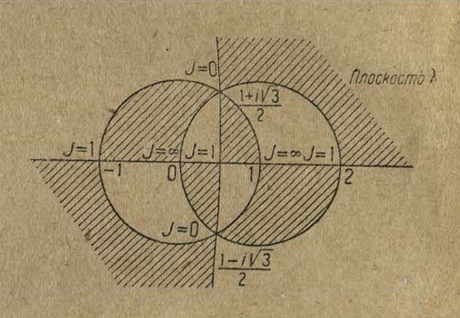
Подстановки $\omega' = \omega + 1$, $\omega' = -\frac{1}{\omega}$, преобразующие друг в друга соответствующие части границы, „создают" совместно из этих треугольников всю группу с определителем

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

В качестве *иррационального инварианта* мы получаем двойное отношение λ четырех точек разветвления римановой по-



Черт. 44.



Черт. 45.

верхности, соответствующей квадратному корню, стоящему под интегралом первого рода. Величина λ связана с рациональным инвариантом J соотношением

$$J : J - 1 : 1 = 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 : 27\lambda^2(1 - \lambda)^2.$$

У Лежандра и Якоби двойное отношение обозначалось соответственно через c^2 и k^2, у Вейерштрасса—через $\frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}$.

Таким образом J есть рациональная функция шестой степени от λ и, обратно, λ есть шестизначная алгебраическая функция от J. Мы получаем, таким образом, разделение плоскости λ на 12 областей, которые являются отображениями попеременно верхней и нижней полуплоскостей и соответственно должны быть заштрихованы или оставлены свободными (черт. 45).

Таким образом оказывается, что

$$\lambda = k^2 = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; J\right),$$

так что мы имеем частный случай диэдра. Величине k^2 соответствует шестилистная риманова поверхность над плоскостью J.

Изображения точек разветвления этой поверхности лежат в точках

$$\lambda = 0,\ 1,\ \infty,$$

$$\lambda = -1,\ \frac{1}{2},\ 2,$$

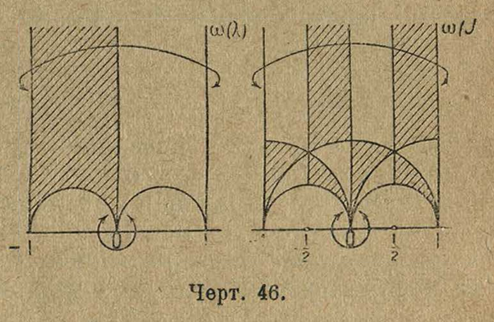
$$\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

а соответствующие значения J, как легко проверить, равны

$$J = \infty,\ J = 1,\ J = 0.$$

Из чертежа мы, стало быть, непосредственно видим, что при $J=0$ шесть листов циклически связаны по три в двух точках разветвления, тогда как при $J=1$ и $J=\infty$ по два листа связаны в трех точках разветвления.

Если мы теперь рассечем плоскость λ вдоль положительной вещественной оси от 0 до ∞, то путем непрерывной деформации (ср. чертежи на стр. 294—295 *Modulfunktionen*, т. I.) получим в плоскости ω фигуру для $\omega = s(0,\ 0,\ 0;\ \lambda)$ или, принимая во внимание разбиение плоскости на треугольники J, фигуру для $\omega = s\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 0;\ J\right)$ (см. черт. 46). Подстановки



Черт. 46.

$$\omega' = \omega + 2,$$

$$\omega' = \frac{\omega}{2\omega + 1},$$

преобразующие друг в друга соответствующие части границы, создают в совокупности подстановки $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *главной конгруэнции второй ступени*.

Каждый отдельный треугольник плоскости $\omega(J)$ представляет собой конформное отображение верхней или нижней полуплоскости J. Следовательно, каждому значению ω соответствует некоторое вполне определенное значение J. Точно так же, как было показано выше, каждому значению ω соответствует одно и только одно значение k^2.

Функция $k^2(J)$ является первым встретившимся нам здесь примером алгебраической функции от J, которая с помощью ω „*униформизируется*“ (или, как говорили прежде, примером алгебраического уравнения, которое с помощью ω „решается“):

обе функции J и k^2 являются *однозначными* функциями от ω. Я не буду здесь давать явные формулы для $\omega(k^2)$.

К этим рассуждениям я хочу присоединить еще несколько исторических указаний.

О Гауссе мы уже говорили выше. Риман был первым, кто с успехом продолжал эти исследования в своих уже неоднократно упоминавшихся лекциях 1858/59 г. Он прежде всего отметил колоссальную униформизирующую силу, которая заключена в функции $\omega(k^2)$. Теперь мы выразили бы это так: все функции от J, которые разветвляются только при $J=0, 1, \infty$, притом так, что при $J=0$ листы, не изолированные друг от друга, разветвляются по 3, а при $J=1$ — по 2, тогда как разветвление при $J=\infty$ остается произвольным, — являются однозначными функциями от ω. Что же касается функций от k^2, то все те из них, которые разветвляются только при 0, 1, ∞, являются однозначными функциями от ω вне зависимости от характера разветвления!

Примеры:

Все функции $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0; J\right)$ являются однозначными функциями от ω [этим отмеченная выше однозначность функции $k^2(J)$ включается в более общую закономерность]. В частности, стало быть, икосаэдральная иррациональность $\zeta(J)$ является однозначной функцией от ω, или, как мы видели выше, уравнение икосаэдра может быть разрешено в модулярных функциях. Как это конкретно делается, мы еще увидим ниже.

Всякий корень $\sqrt[n]{k^2}$ или $\sqrt[n]{1-k^2}$, или даже $\sqrt[n]{k^2(1-k^2)}$, а также $\ln k^2$, $\ln(1-k^2)$ и $\ln k^2(1-k^2)$, далее всякая s-функция $s(\lambda, \mu, \nu; k^2)$, вообще всякий гипергеометрический ряд $F(\alpha, \beta, \gamma; k^2)$ — все они униформизируются с помощью ω. (Последнее замечание я сделал в 1878 г. в 14 томе Mathematische Annalen и был им очень горд [1]).] Когда затем, в 1897 г., я получил тетрадь Бецольда с лекциями Римана, я увидел, что они заканчиваются как раз этим предложением, которое Бецольд, быть может потому, что он собирался уехать на каникулы путешествовать, не переписал полностью (см. стр. 93 дополнений Нетера-Виртингера).

Начиная с Римана, изучение модулярных фигур постепенно углублялось. Здесь я должен прежде всего отметить труд Дедекинда (Crelle, т. 83, 1877), который оказал мне значительную поддержку в начатых незадолго перед тем работах по этому вопросу. Оттуда ведет свое начало и термин „эллиптические модулярные функции“.

С этих пор рассматривавшаяся здесь треугольная фигура приобрела широкую известность. Уже в 1879 г., пользуясь ею, Пикар доказал, хотя и несовершенным образом (Comptes rendus,

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 3, стр. 27, 63.

т. 83), важную и носящую его имя теорему, в силу которой однозначная аналитическая функция в окрестности изолированной существенно особой точки может принимать не больше двух значений. К этому примыкают затем работы Шоттки, Ландау, Каратеодори и др.

Другая линия развития, которая начинается также от Гаусса, но в дальнейшем протекает независимо, исходит из использования общих эллиптических функций, в частности тэта-функций.

В этом направлении, наряду с Абелем и Якоби, нужно назвать имя Эрмита, который в 1858 г. в Comptes rendus (т. 46) исследовал поведение функций $\sqrt[8]{k^2}$ и $\sqrt[8]{1-k^2}$, а позже и функции $\sqrt[8]{k^2(1-k^2)}$ по отношению к линейным преобразованиям ω, пользуясь обозначениями $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ для этих функций (Oeuvres, т. II, стр. 5 и сл. и 22 и сл.).

Полной функционально-теоретической ясности в этом вопросе Эрмит однако не достиг, ибо он выражает удивление по поводу того, что $\chi(\omega)$ есть равным образом вполне определенная функция („une fonction également bien déterminée"), тогда как мы знаем, что всякий корень $\sqrt[n]{k^2(1-k^2)}$ есть однозначная функция от ω[1]). Тем искуснее оперирует Эрмит аналитическими функциями, которые получаются из теории тэта-функций для применяемых им эллиптических модулярных функций. Это так называемые q-формулы, где q есть якобиево обозначение для $e^{i\pi\omega}$[2]). В качестве примера я приведу только соответствующие формулы для g_2 и g_3:

$$g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

$$g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^{2n}}{1-q^{2n}}\right).$$

С ними я хочу сопоставить ряды Эйзенштейна, которых я уже касался выше и которые, как сказал позже Пуанкаре, „дают бо́льшее духовное удовлетворение":

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

$$g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}.$$

---

[1]) Hermite, Oeuvres, т. II, стр. 28.

[2]) Ср. к этому чертеж у Фрике (Fricke, Elliptische Funktionen, т. I, стр. 300), который получается путем отображения параллельной полосы разбиения плоскости ω на треугольники на внутренность единичного круга в плоскости q^2. Точка $+i\infty$ переходит при этом в точку $q=0$, и исходный треугольник нашего черт. 43 (стр. 409) становится очень маленьким.

Обе формулы обычно выводят из теории двояко-периодических функций. Очень красивый прямой переход от последних формул к вышенаписанным указал в своей диссертации Гурвиц (Math. Ann., т. 18, 1881).

Исходя из вышеуказанных рассуждений, можно развить замечательную *алгебраическую* теорию, учение о „*преобразованиях*" эллиптических функций, в частности эллиптических модулярных функций (ср. выше стр. 74).

Пусть $n = ad - bc$ есть определитель целых чисел a, b, c, d. Исследуем соотношения, имеющие место между

$$J\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right) = J' \text{ и } J(\omega)$$

или между

$$k^2\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right) \qquad \text{и } k^2(\omega).$$

Это называют „преобразованием n-го порядка". J' и J связаны алгебраическим уравнением, которое, например, в случае, когда n есть простое число, имеет степень $n+1$. Эти уравнения носят название „*модулярных уравнений*".

Лежандр, Якоби и их ученики находили удовольствие в вычислении этих функций в различных формах для наиболее простых случаев. Они получали при этом целочисленные коэфициенты!

Затем появился Галуа и сделал огромный шаг вперед. Он определяет для случая простого числа n группу уравнения. После присоединения

$$\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n}$$

она оказывается группой

$$G_{\frac{n(n^2-1)}{2}},$$

которая легко может быть определена с точки зрения теории чисел. Эта группа оказывается для $n > 3$ *простой*; решение модулярного уравнения в радикалах при этом невозможно; всякая „резольвента" модулярного уравнения имеет ту же группу, что и само уравнение. В частности для $n = 5$, 7, 11 получаются резольвенты степени n, т. е. степени на единицу более низкой, чем степень модулярного уравнения; эти резольвенты

для $n = 5$ пятой степени с группой G_{60},

„ $n = 7$ седьмой степени с группой G_{168},

„ $n = 11$ одиннадцатой степени с группой G_{660}.

Для бо́льших простых чисел такое понижение степени невозможно[1]).

После этого в 1859 г. Эрмит (Comptes rendus, т. 48 и 49; Oeuvres, т. II, стр. 38—82, особенно Art. XIV—XVI) поставил задачу действительного разыскания этих резольвент низшей степени. Таким образом он пришел к уравнению пятой степени, которое, как мы показали выше, решается в эллиптических модулярных функциях. Для уравнения седьмой степени он также получил простой результат, для уравнения же одиннадцатой степени не мог решить задачу полностью.

В 14 и 15 томах Mathematische Annalen я поставил перед собой задачу внести ясность во всю эту область с помощью методов геометрической теории функций. Я достиг в этом отношении полного успеха для $n = 5, 7, 11$, и это привело к новой программе эллиптических модулярных функций, сочетающей теорию групп и геометрию (1879)[2]).

Об этой общей программе эллиптических модулярных функций нужно сказать несколько слов, так как она образует естественный переход к общей теории автоморфных функций. Она характеризуется тенденцией „сочетания Галуа с Риманом". Я сформулирую поставленную мною здесь проблему в общей форме двумя путями.

1. Нужно перечислить все подгруппы, заключающиеся в совокупности ω-подстановок $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, и посмотреть, сколько двойных треугольников на плоскости ω нужно уложить рядом друг с другом, чтобы получить первую область прерывности подгруппы. Наконец нужно эту область прерывности, между сторонами которой устанавливается в силу „образующих" подстановок подгруппы попарное соответствие и которая представляет собой, таким образом, идеальную замкнутую поверхность, рассматривать как риманову поверхность и задаться вопросом о простейших алгебраических функциях, которые могут существовать на ней, согласно принципам Римана. „Область прерывности" превращается, таким образом, в функционально-теоретическую „фундаментальную область" или „фундаментальный многоугольник", как я говорил вначале.

Если же эта формулировка кажется слишком абстрактной, можно сформулировать проблему так:

2. Над плоскостью J мы строим риманову поверхность, которая разветвляется только при $J = 0, 1, \infty$, и притом по

---

[1]) Первое доказательство этой теоремы Галуа дал Бетти в 1853 г. (E. Betti, Ann. di Sc. mat. e fis., т. 4; Opere mat., т. I, стр. 81 и сл.), которому вообще принадлежит крупная заслуга, заключающаяся в том, что он впервые своими глубокими рассуждениями сделал теорию Галуа доступной математическому миру. Полное исследование группы модулярного уравнения дал затем Гирстер (Gierster, Math. Annalen, т. 18, стр. 319 и сл., 1884).

[2]) Klein, Ges. Abh., т. 3, стр. 169 и сл. („Zur Systematik der Theorie der elliptischen Modulfunktionen").

схеме $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 0 (см. стр. 412), и задаемся вопросом о простейших существующих на ней функциях (или соответственно об уравнениях, которыми они связаны), затем мы переносим все рассмотрение в плоскость ω, где функции становятся однозначными и подходящим образом разрезанная риманова поверхность отображается на известную фундаментальную область, состоящую только из треугольников, стороны которых попарно связаны подстановками ω, определяющимися этим соответствием сторон.

Здесь мы имеем, таким образом, полную смычку теории групп и теории функций. В прежних моих работах, чтобы не выходить из *алгебраической* области, я ограничивался фундаментальными многоугольниками с конечным числом ω-треугольников; ничто однако не мешает, в соответствии с современной постановкой вопроса, рассматривать и многоугольники с бесконечно большим числом треугольников. Примером таких многоугольников могут служить $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}; J\right)$ или $\ln k^2$, или $s(\lambda, \mu, \gamma; k^2)$.

Эту общую проблему эллиптических модулярных функций в ее второй формулировке мы уяснили себе уже на стр. 410 на примере уравнения шестой степени, которое связывает двойное отношение λ с J; мы нашли там, что это приводит нас к главной конгруэнции второй ступени.

Теперь мы применим те же рассуждения к *уравнению икосаэдра*. Вместо двойного отношения λ здесь мы имеем функцию $\zeta = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}; J\right)$, которой соответствует 60-листная риманова поверхность над плоскостью J. Разрежем теперь икосаэдрически разбитую поверхность сферы, как апельсин, на десять равных долек, идущих от ∞ до 0, и разложим их в десяти смежных вертикальных полосках плоскости ω, имеющих ширину $\frac{1}{2}$ (см. „Modulfunktionen", т. 1, стр. 355, черт. 83). Из икосаэдрического деления сферы легко видеть, как смыкаются треугольники в плоскости ω. Соответствующие ω-подстановки оказываются конгруэнтными по модулю 5 с идентичной подстановкой $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и в совокупности образуют как раз *главную конгруэнцию пятой ступени*. Действительно, существует 60 неконгруэнтных по модулю 5 ω-подстановок, и поэтому область прерывности главной конгруэнции пятой ступени (которая охватывает все ω-подстановки, совпадающие по модулю 5 с идентичной подстановкой) должна состоять из 60 двойных треугольников. Обратно, сфера икосаэдра является однозначным отображением этой области прерывности. На ней не существует функции более простой, чем наша икосаэдрическая величина ζ. Таким образом эта величина ζ оказывается не только примером модуля главной конгруэнции пятой ступени, но и вообще про-

стейшей модулярной функцией, соответствующей этой главной конгруэнции!

Это не только уясняет, почему можно решить уравнение икосаэдра в эллиптических функциях, но и почему уравнение икосаэдра в системе эллиптических функций для пятой ступени занимает то же положение, что и уравнение двойного отношения во второй ступени.

Вместе с тем на этом основано все то, что можно сказать о решении уравнения пятой степени в эллиптических модулярных функциях; это решение существует, так как уравнение пятой степени можно решить с помощью уравнения икосаэдра и т. д.

Мы не будем здесь приводить вычислений для выражения ζ через тэта-функции (т. е. *„q-формулы“*), которые я дал позже [1]). В них соединены Риман, Галуа и Якоби. Можно было бы и в обратном порядке, исходя из тэта-функций, легко построить всю теорию пятой (и седьмой) ступени, если бы только было известно, чего нужно искать. Формулы могучи, но слепы!

Я хочу еще рассмотреть следующий за этим намеченный Галуа случай $n=7$.

Существует $7\cdot\frac{49-1}{2}=168$ неконгруэнтных по модулю 7 подстановок

$$\omega'=\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}.$$

Соответственно этим 168 подстановкам ω' мы построим над плоскостью J 168-листную риманову поверхность, листы которой разветвляются в точках 0, 1, ∞ по 3, 2, 7. Согласно сказанному на стр. 300, ее род определяется из соотношения

$$p=\frac{w}{2}-n+1=\frac{56\cdot 2+84\cdot 1+24\cdot 6}{2}-167,$$

т. е. $p=3$.

Это приводит нас, таким образом, к теории алгебраических образов с $p=3$, а в качестве образа такого рода мы можем взять плоскую кривую четвертого порядка.

Однако прежде чем развить эту мысль, спросим себя, можем ли мы составить себе такое же ясное представление о связности $2\cdot 168$ полуплоскостей в этом случае, какое давала нам сеть икосаэдрических треугольников в случае $n=5$.

Это удается в действительности с помощью функции

$$s\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{7};J\right);$$

хотя сама эта функция бесконечно многозначна, но внутри сети ее треугольников наша риманова поверхность должна быть распростерта однозначно. Мы получаем в плоскости переменной s

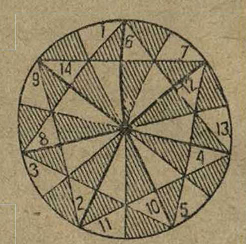
---

[1]) Math. Annalen, т. 17, 1880/81; Ges. Abh., т. 3, стр. 186 и сл. См. далее „Modulfunktionen“, т. 2, 5-й отдел.

Черт. 47.



Вершины
одного вида



Вершины
другого вида

Соответствие сторон:

1 к 6
3 „ 8
5 „ 10
7 „ 12
9 „ 14
11 „ 2
13 „ 4

правильный 14-угольник (черт. 47), каждый из 14 секторов которого состоит из 24 попеременно заштрихованных и свободных треугольников, являющихся изображениями соответственно верхней и нижней полуплоскости J. Стороны нашего 14-угольника соответствуют, таким образом, обеим сторонам тех $7 = 2 \cdot 3 + 1$ разрезов, которые соединяют на римановой поверхности с $p = 3$ (которая может быть представлена как кольцевая поверхность с тремя отверстиями) точки O и O', соответствующие $J = \infty$. Сумма углов в вершинах O и O' равна 2π. Замкнутая риманова поверхность может, таким образом, быть перенесена на нашу s-фигуру без искажения углов.

Исключительно делом привычки является умение оперировать такими „*идеально замкнутыми*“ фундаментальными областями с такой же уверенностью и даже с еще большим удобством, чем с фактически замкнутой 168-листной поверхностью. Здесь можно, действительно, вычертить все пути; например проведенная на чертеже пунктирная кривая является замкнутым путем; чтобы убедиться в этом, достаточно обратить внимание на порядок соответствия сторон.

Я замечу еще, что здесь не только J однозначно по отношению к s, но и s „не разветвляется“ на 168-листной поверхности над плоскостью J. Мы приходим, таким образом, к важному понятию о неразветвленной на римановой поверхности s-функции, которая, конечно, при всех обходах (дробно) линейно воспроизводится и, таким образом, становится бесконечно многозначной; она отображает окрестность каждой точки римановой поверхности на простую окрестность точки сферы s.

Чтобы перенести нашу риманову поверхность на плоскость ω, мы разрежем нашу s-фигуру на 14 секторов и каждый такой сектор поместим в вертикальную полоску ω-плоскости шириной $\frac{1}{2}$; на черт. 48 воспроизведена одна такая полоска (с 12 заштрихованными и 12 свободными треугольниками, $14 \cdot 12 = 168$). Подстановки, преобразующие соответствующие части границы друг в друга, создают при этом *главную конгруэнцию седьмой ступени.*

Оставим теперь плоскость ω и обратимся к алгебраическим функциям римановой поверхности.

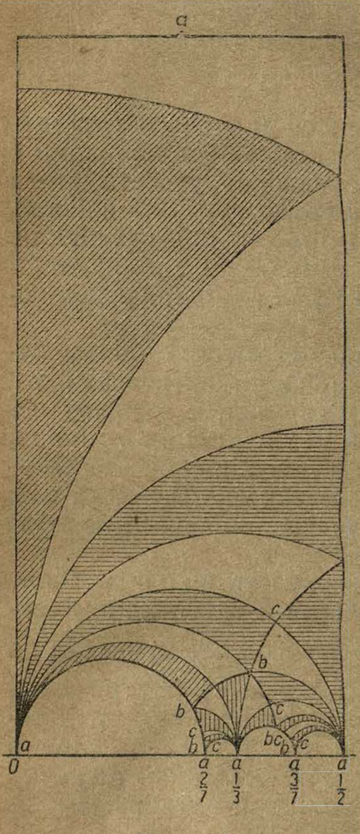
Так как $p = 3$, то мы получим простейшие функции, сказав так: существуют три повсюду конечных интеграла u_1, u_2, u_3, дифференциалы которых мы положим пропорциональными $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$du_1 : du_2 : du_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3.$$

Эти φ, или соответственно их отношения, являются простейшими алгебраическими функциями поверхности (как мы подробно показали в главе седьмой). Между ними имеет место уравнение четвертой степени $F_4(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$, которое определяет плоскую кривую четвертого порядка. Теперь нужно: 1) действительно получить уравнение этой кривой четвертого порядка, 2) изобразить на ней J как рациональную функцию от φ, принимающую

каждое значение в 168 точках кривой; эти точки только для $J=0$ сливаются по три, для $J=1$ по две и для $J=\infty$ по семи, для всех же остальных значений J они раздельны.

Это мне удалось достичь в 1878 г., сказавши, что наша особая кривая C_4 в соответствии с тем способом, каким построена ее риманова поверхность из s-треугольников, должна так же переходить в самое себя при 168 однозначных преобразованиях, как переходит в самое себя сфера икосаэдра при 60 вращениях; эти однозначные преобразования (как уже *было сказано в главе седьмой*, стр. 355), должны быть далее *линейны* относительно переменных φ.



Черт. 48.

Отсюда вытекает, что должна существовать группа G_{168} коллинеаций φ-плоскости (что тогда казалось новым и удивительным).

Легко, далее, простыми рассуждениями убедиться в том, что простейшая форма уравнения нашей кривой C_4 есть

$$\varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_2^3\varphi_3 + \varphi_3^3\varphi_1 = 0.$$

Наконец можно, с помощью заключений, основанных на теории инвариантов, действительно, построить J как рациональную функцию 42-й степени от φ:

$$J : J - 1 : 1 = \Phi_{14}^3 : \Psi_{21}^2 : X_6^7.$$

Все сказанное приведено в 14 томе Math. Annalen[1]), и если бы мы захотели остановиться здесь подробнее на кривых четвертого порядка, то мы нашли бы там очень красивые примеры.

Геометры приняли в общем виде все эти рассуждения. Алгебраисты нашли здесь ясную связь с модулярным уравнением восьмой степени для преобразований седьмого порядка эллиптических функций и соответствующих резольвент седьмой степени. Наконец и аналитик получает выражение φ_1, φ_2, φ_3 и всех рационально построенных из них функций через тэта-функции[2]) (Math. Annalen, т. 17, 1881).

Резюмируя все сказанное, мы видим, что проблемы, связанные с преобразованием седьмого порядка эллиптических

---

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 3, стр. 90 и сл.
[2]) Klein, Ges. Abh, т. 3, стр. 186 и сл.

функций, разрешаются теорией икосаэдра в такой же полной мере, как и преобразования пятого порядка с помощью теории икосаэдра.

Образ нашей римановой поверхности в плоскости s, или, иначе говоря, тот факт, что кривая C_4 *униформизируется* с помощью $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}; J\right)$, стал, однако, образцом и для другой области; это тем более замечательно, что до сих пор применение функции $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}; J\right)$ вводилось только для того, чтобы сделать картину более наглядной.

Мы будем сначала рассматривать этот факт сам по себе, отвлекаясь от того, что соответственно особой природе нашей кривой C_4 многоугольник s-плоскости оказывается разложенным на $2 \cdot 168$ треугольников.

Тогда мы скажем: нам удалось так отобразить данную кривую C_4 с помощью существующей на ней и нигде по отношению к ней не разветвляющейся функции s, что стороны отображаемой области связываются друг с другом линейными подстановками s, которые переводят некоторый постоянный круг в самого себя, причем все дальнейшие воспроизведения области с помощью подстановок все более и более заполняют внутренность этого круга, но так, что это покрытие всюду однократно. *Кривая C_4 с помощью функции s униформизируется простейшим образом, причем отображение повсюду конформно.* Плоскость s (точнее внутренность граничного круга в этой плоскости) может быть при этом, обратно, представлена с помощью C_4 как риманова поверхность, которая *перекрывает* область C_4 бесконечное число раз, но при этом по отношению к этой области нигде не разветвляется!

Сам собой возникает вопрос: возможно ли нечто подобное по отношению к произвольной кривой C_4? Так возникает перед нами в неопределенных очертаниях „*центральная теорема об автоморфных функциях*“, как я сообщил о ней в двадцатом томе Mathematische Annalen, в работе, датированной 27 марта 1882 г. [1]), в связи с публикациями Пуанкаре от 1881 г.

Сначала мы убедимся в том, что подсчет числа постоянных действительно подтверждает это. Представим себе граничный круг в плоскости s, который переходит сам в себя при ∞^3 линейных подстановках (с тремя вещественными параметрами).

Построим произвольный 14-угольник, стороны которого попарно связаны линейными подстановками этого семейства, в качестве фундаментальной области для кривой C_4. Сумма углов при обеих идеальных вершинах O и O' (см. стр. 419) должна, конечно, быть равна 2π, для того чтобы s оставалось неразветвленным на соответствующей римановой поверхности с $p=3$. Из того, что стороны должны быть семь раз попарно связаны,

[1]) Позже я назвал ее „теоремой о граничном круге“ („Grenzkreistheorem“). См. также Klein, Ges. Abh., т. 3, стр. 627 и сл.

вытекает семь условий. Требование относительно суммы углов при O и O' дает еще два условия.

Таким образом наш многоугольник зависит от $2 \cdot 14 - 7 - 2 = 19$ вещественных постоянных, из которых, однако, нужно считать только 16, так как ничто в кривой C_4 не изменится, если я преобразую многоугольник, как целое, с помощью одной из тех ∞^3 подстановок, которые переводят граничный круг в самого себя.

К тому же числу 16 можно притти, однако, и с другой стороны, если рассмотреть самый общий вид кривой четвертого порядка. Действительно, кривая зависит, как мы прежде видели (стр. 355), от $3p - 3 = 6$ *римановых „модулей", т. е.* имеет шесть абсолютных инвариантов. Они являются комплексными числами, т. е. дают 12 вещественных постоянных. Далее мы располагаем еще двумя точками O и O' на C_4, которые, будучи соединены семью поперечными разрезами, дают то разбиение римановой поверхности кривой C_4, которое соответствует нашему 14-угольнику. Каждая из этих точек определяется на римановой поверхности кривой C_4 двумя вещественными постоянными. Таким образом всего мы получаем $12 + 2 \cdot 2 = 16$ вещественных постоянных.

Резюмируя теперь самое существенное, мы можем сказать, что модулярные функции, или, в более общей форме, „треугольные функции", *привели нас к общим автоморфным* функциям, которые внутри некоторого круга однозначны и имеют этот круг своей естественной границей!

Сами они отнюдь не являются единственными однозначными автоморфными функциями; напротив, существует бесконечное количество видов таких функций. Достаточно указать на функции, которые известны нам из наследия Римана от 1876 г. и которые независимо от него были найдены затем Шоттки[1]) (Диссертация, Берлин 1876; Crelle, т. 83, 1877). Речь идет там об области прерывности, ограниченной n раздельно лежащими полными кругами, которая воспроизводится путем зеркального отражения от каждого из этих кругов. Если это симметрическое воспроизведение исходной области продолжать неограниченно, то мы получаем покрытие всей плоскости за исключением бесконечного множества граничных точек, причем это множество не является счетным. (Примеры такого рода фигур мы найдем в книге Klein-Fricke, Automorphe Funktionen, т. 1, стр. 418, 432, 439, 435.)

Здесь настало время, когда я должен рассказать о появлении А. Пуанкаре (Henri Poincaré) и о тех личных отношениях, которые у нас установились и которые явились основой для всего дальнейшего развития этой теории.

Раньше, однако, я должен предпослать несколько замечаний относительно терминологии. Пуанкаре, который вначале очень

---

[1]) См. по этому поводу дополнительные замечания Клейна к изданию его собрания сочинений, в особенности т. 3, стр. 577 и сл., а также переписку Клейна и Пуанкаре: там же, стр. 587 и сл. *Прим. ред. нем. изд.*

плохо знал положение дел внутри Германии, называл группы, имеющие граничный круг, „группами Фукса“ („groupes fuchsiens“), хотя Фукс не имеет в этой области накаких заслуг. Когда я обратил его внимание на общие функции этого рода, он назвал их „функциями Клейна“ („fonctions kleinéennes“). Здесь установилась, таким образом, большая историческая путаница.

В Германии затем нашло всеобщее сочувствие мое предложение отказаться от всяких персональных обозначений и ввести термин „автоморфные функции“. Мы различаем, таким образом, автоморфные функции с граничным кругом, с бесконечным количеством граничных точек и т. д.

То выдающееся значение, которое имел в дальнейшем Анри Пуанкаре во всей нашей науке, заставляет меня привести несколько биографических данных о нем.

Анри Пуанкаре, как и Эрмит, родился в Нанси (1854). Известный президент французской республики является его двоюродным братом. Уже в средней и высшей школе он выделялся своими выдающимися успехами, что отличает его от многих других первоклассных талантов. В 1873 г. он был принят первым на основании известных по своей строгости приемных экзаменов в Политехническую школу и соответственно в 1875 г. был принят в Ecole des Mines (Горный институт); сюда принимались наиболее выдающиеся абитуриенты Политехнической школы, так как отсюда им открывалась дорога к наиболее видным государственным должностям. Однако практическая деятельность, к которой он питал мало склонности, не могла приковать его к себе. В 1879 г. он начал свою академическую деятельность сначала как лектор (Chargé des cours) на Faculté des Sciences в Каэне. (Начало деятельности в провинциальном университете является обычным.) С 1881 г. он живет в Париже, занимая различнейшие должности, сначала как представитель анализа, затем в 1885 г. как представитель математической физики и наконец с 1896 г. возглавляет кафедру астрономии. Уже из этих указаний видно, как непрестанно втягивал он в круг своих работ все новые области. С 1887 г. он стал членом Института (т. е. Академии наук) и затем получал все новые и новые почетные звания, так что вскоре он оказался общепризнанным главным представителем французской математики, пользующимся широкой известностью и славой, и стал гордостью своего отечества.

Пуанкаре скоропостижно скончался в 1912 г. в результате операции.

Биографические материалы о нем имеются в большом количестве. Так, например, к 1909 г. относятся статья Лебона в Savants du jour и работа Тулуза, подвергающая психологическому анализу своеобразие духовной деятельности Пуанкаре [1]).

---

[1]) H. Toulouse, H. Poincaré, Paris 1910. Указатель статей и т. п. можно найти также в Rendiconti del Circolo matem. di Palermo, в „Дополнениях“,

Я хочу теперь попытаться охарактеризовать Пуанкаре как математика.

Он отличался совершенно исключительной плодовитостью и многосторонностью, которые напоминают Коши. Даже в последние годы своей жизни он с удивительной легкостью охватывает проблемы, возникающие где-либо в области точных наук, и творчески преобразует их, повсюду открывая новые пути.

Некоторую заслугу в этой многогранности имеет, несомненно, основательная подготовка, которую дает твердо расчлененная французская система обучения, дающая возможность в молодые годы овладеть традиционными частями всей математики, — в противоположность Германии, где молодой математик охотно примыкает к какому-нибудь одному определенному учителю, что более благоприятно для быстрого созревания ad hoc, но часто мешает дальнейшему многостороннему развитию. В личном обращении Пуанкаре был прост и любезен, но больше воспринимал, чем сообщал.

Пуанкаре является подлинным гением, который повсюду с первого взгляда умел схватить самое существенное. Геометрия и анализ были развиты у него равномерно, дар открытия и сила доказательства гармонически уравновешивались в нем. Только область собственных приложений математики он оставлял в стороне, в отличие от таких исследователей, как Архимед, Ньютон, Гаусс, которые владели и экспериментальной работой и измерением и труды которых я поэтому ставлю выше. Конечно и у него были свои слабые стороны. Подобно Коши, Пуанкаре публиковал очень быстро и поэтому не очень тщательно отделывал форму своих работ. В его первых бурных публикациях есть поэтому не только много преждевременного, но даже много лишнего и преувеличенного. Напротив, позже у него выработался блестящий ясный стиль, который, в соединении с массой глубоких мыслей, обеспечил между прочим успех его общеизвестных математически-философских сочинений.

Во всем этом он является полной противоположностью своему учителю Эрмиту, у которого добросовестная проработка деталей в такой мере выпирала на передний план, что он иногда терял из-за этого ядро проблемы и напрасно блуждал по окольным путям (я имею здесь в виду в частности его обширную работу от 1866 г. об уравнениях пятой степени, в которой он без нужды связывал эту теорию с теорией инвариантов бинарных форм пятой степени).

Полностью осветить все значение достижений Пуанкаре нам удастся только в дальнейших разделах [1]). Здесь я хочу только, в связи с моими собственными работами, сообщить лишь о ран-

---

стр. 13—32; далее см. статью Дарбу, предпосланную второму тому собрания сочинений (Oeuvres) Пуанкаре. Наконец Анри Пуанкаре посвящены томы 38 (1921) и 39 журнала Acta mathematica.

[1]) Клейн предполагал написать еще отдельную главу о Пуанкаре (так же как и о Ли). *Прим. ред. нем. изд.*

ней эпохе теории автоморфных функций (1881—1882). Относящиеся сюда работы составляют начало публикаций Пуанкаре, если не считать предыдущей диссертации 1878/79 г. о диференциальных уравнениях в частных производных. В 1880 г. он уже направил в Академию работу на премию, которая относилась к автоморфным функциям. За этим последовала бурная серия публикаций в Comptes rendus за 1881 г., тт. 92, 93; за один год Пуанкаре опубликовал не меньше 13 работ, результаты которых были затем сведены им под названием *Sur les fonctions uniformes, qui se reproduisent par des substitutions linéaires* [1]) („О функциях, воспроизводящихся при линейном преобразовании", Math. Annalen, *т. 19, стр. 553—564*).

Речь идет здесь главным образом о функциях с граничным кругом. Новым является, во-первых, то, что Пуанкаре мужественно строит наиболее общую фундаментальную область, как я пытался показать это для случая 14-угольника при $p=3$; конечно, я сам думал еще раньше об общем случае, но слишком крепко держался за образование путем отражения, согласно принципу симметрии. Во-вторых, ново то, что он составил аналитический закон образования автоморфных функций, так называемые *ряды Пуанкаре* (которые он сам называл θ-рядами). Пусть нам даны подстановки группы (мы будем теперь писать ζ вместо s)

$$\zeta' = \frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}, \quad \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1.$$

Если граничный круг примем за вещественную ось, то α, β, γ, δ будут вещественными числами. Группа является существенно прерывной, так как она обладает конечной областью прерывности. Возвращаясь затем снова к лежащему в конечной области граничному кругу, Пуанкаре рассматривает суммы

$$\sum_i \frac{1}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}},$$

которые напоминают эйзенштейновские суммы в теории эллиптических модулярных функций [подробное сопоставление проводится у Раузенбергера (Rausenberger, Mathematische Annalen, т. 20, 1882)]. Относительно этих сумм он доказывает, что при $m \geqslant 2$ они абсолютно сходятся. Если написать их в однородной форме:

$$\sum \frac{1}{(\gamma_i \zeta_1 + \delta_i \zeta_2)^{2m}},$$

то легко видеть, что мы имеем *автоморфные формы*, и ясно, как из отношения таких форм составляются *автоморфные функции*. Здесь существует, таким образом, полная аналогия с получением J в случае эллиптических модулярных функций $\left(J = \frac{g_2^3}{\Delta}\right)$.

---

[1]) Poincaré, Oeuvres, т. II, стр. 12 и сл.

Наконец Пуанкаре глубоко изучил униформизирующую силу новых функций. В частности он установил для плоскости z теорему, которую я назвал *первой основной теоремой*, т. е. *теорему о граничном круге.*

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ суть некоторые n точек плоскости, а $l_1, \ldots, l_n$ — произвольные вещественные целые числа, соответствующие данным точкам в этой последовательности и в предельном случае могущие стать бесконечными. Тогда всегда существует *одна* (и по существу только одна) однозначно обратимая (т. е. обратная функция которой однозначна) функция

$$\zeta\left(\frac{1}{l_1}, \ldots, \frac{1}{l_n}; \; z\right),$$

[которая включает в себя как частный случай функцию $\zeta(0, \ldots, 0; z)$]. Обратная функция $z(\zeta)$ существует при этом в „граничном круге" плоскости ζ; угол в плоскости z с вершиной в α_i уменьшается при отображении на l_i-ю часть.

Каждая из этих функций униформизирует широкий круг функций; в предельном случае, когда все l_i становятся бесконечными, мы получаем даже униформизирование *всех* функций от z, которые разветвляются только при $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Характер разветвления при этом может быть произвольным.

Мы видим, что это является обобщением наших прежних указаний относительно

$$s\left(\frac{1}{l_1}, \; \frac{1}{l_2}, \; \frac{1}{l_3}; \; z\right)$$

(l_1, l_2, l_3 соответствуют 0, 1, ∞). Различие, однако, заключается в том, что диференциальное уравнение функции s, — т. е. для случая, когда имеются только три особые точки, — может быть сразу написано в вполне определенной форме, тогда как для $n > 3$ после задания α_i и l_i в диференциальном уравнении остаются еще $n-3$ неизвестных постоянных и остается еще доказать, что эти постоянные однозначно определяются с помощью требования об однозначной обратимости внутри некоторого граничного круга (с другой стороны, $n = 3$ есть низший случай, в котором l_i действительно могут быть взяты произвольно).

Уже на статье Пуанкаре в т. 19 Mathematische Annalen, подытоживающей полученные им результаты, отразилось влияние переписки, в которую я вступил с Пуанкаре, начиная с июня 1881 г.

Когда Пуанкаре начал свои публикации в Comptes rendus, он не знал ни теории Римана, т. е. не был знаком с понятием „жанра" поверхности (риманово число p), не говоря уже о новом обосновании этой теории Шварцем, — ни наших работ в Mathematische Annalen; он усвоил их затем с удивительной быстротой. Я также впервые обратил его внимание на то, что, наряду с функциями с граничным кругом, может существовать еще бесчисленное множество иных видов автоморфных функций [1].

[1] Об одной ошибке в работе Пуанкаре см. Klein, Ges. Abh., т. 3 стр. 714 и сл.

Я хочу еще — частично в дополнение к прежним указаниям — рассказать о примыкающих сюда моих собственных работах. Я был тогда, в 1881 г., занят переработкой основных идей римановой „Теории алгебраических функций и их интегралов“, как она изложена в моей работе, сделанной осенью 1881 г. и разосланной к рождеству того же года, хотя она и помечена 1882 г. Эта работа содержит между прочим существенно новую точку зрения; именно, что римановы поверхности одного и того же жанра p образуют связное многообразие (в чем Шварц еще долго сомневался, так как он привык классифицировать алгебраические образы по ведущим свое начало от Вейерштрасса нормальным формам). *Это дало мне возможность обобщить* фундаментальную теорему, которую Пуанкаре доказал для простой плоскости z, на римановы поверхности с любым p и вместе с тем на случай автоморфных функций, которые не обязательно имеют постоянный граничный круг.

Моя первая заметка по этому поводу, которую я опубликовал в девятнадцатом томе Matematische Annalen к началу 1882 г., соединяет и то и другое. Я не буду здесь останавливаться на ней подробнее, а перейду сразу ко второй заметке от 27 марта 1882 г. (Mathem. Annalen, т. 20), в которой я опубликовал ту основную теорему, которую я выше из-за ее простоты назвал *центральной теоремой* (*теоремой о граничном круге*), именно, что любую риманову поверхность с $p \geqslant 2$, не имеющую никаких точек разветвления, можно с помощью автоморфных функций с граничным кругом униформизировать одним и только одним способом.

Эта теорема, как и более позднее изложение всей моей теории, помещенное осенью 1882 г. в двадцать первом томе Mathematische Annalen [1]), возникла при очень затруднительных внешних условиях, о которых я хочу рассказать, так как мне не хотелось бы, чтобы воспоминание о них погибло вместе со мной; к тому же с тех пор прошло столько времени, что я могу быть объективен во всех деталях.

С осени 1880 г. я был в Лейпциге и был там сильно загружен, наряду с моими научными работами, множеством организационных и педагогических задач. Осень 1881 г. я проводил для отдыха на берегу Северного моря (в Боркуме), где я написал работу о Римане и получил упомянутую выше центральную теорему, которую я, однако, сумел записать только во время рождественских вакаций. По совету врачей я решил пасху 1882 г. провести также на Северном море в Нордернее (Norderney). Я хотел там в покое написать вторую часть моего сочинения о Римане, именно разработать в новой форме доказательства существования алгебраических функций на заданных римановых поверхностях. Я мог, однако, выдержать там только восемь дней, так как из-за сильных бурь нельзя было выйти на улицу и у меня развилась сильная астма. Я решил как можно скорее

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 3, стр. 630 и сл.

переехать на свою родину, в Дюссельдорф. В последнюю ночь, с 22 на 23 марта, которую я из-за астмы провел сидя на софе, внезапно, около $2^1/_2$ часов, передо мной возникла центральная теорема в том виде, как она была уже намечена фигурой 14-угольника в т. 14 [1]). На следующий день, в почтовой карете, которая шла тогда от Нордена к Эмдену, я продумал еще раз во всех деталях все, что я нашел. Теперь *я знал*, что я имею важную теорему. Прибыв в Дюссельдорф, я сейчас же записал ее, датировав 27 марта, послал Тейбнеру и просил корректурные оттиски послать Пуанкаре, Шварцу и Гурвицу. Шварц впрочем из-за ошибки в подсчете констант придерживался сначала мнения, что *теорема неверна; однако позже* он сам дал очень важные основные идеи для новых методов доказательства.

Доказательство, действительно, давалось очень туго. Я пользовался так называемым *методом непрерывности*, который сопоставляет многообразие римановых поверхностей с одним и тем же p с соответствующим многообразием автоморфных групп с граничным кругом. Я никогда не сомневался в том, что метод доказательства правилен, но постоянно наталкивался на недостаточность моих знаний в теории функций или на недостаточность самой этой теории; возможность разрешения этих трудностей мне приходилось пока постулировать, и фактически это было сделано Кебе *лишь 30 годами позже (в 1912 г.)*.

Это не помешало мне *найти летом 1882 г.* еще более общую основную теорему, охватывающую все предыдущие мои результаты из тт. 19 и 20, и подготовить, сначала в виде семинарских лекций, разработку всей концепции. Лекции эти тогда записал Штуди. Большинство *моих работ я подготовлял* таким образом, что сначала читал соответствующие *лекции*, а затем во время вакаций редактировал их. В осенние каникулы 1882 г. в Табарце (Тюрингия) возникла затем работа, напечатанная в 21 томе и законченная 6 октября 1882 г. Несмотря на то, что в этой работе кое-что не совсем совершенно и недостаточно закончено, ее общий ход и построение идей в ней сохранились и в дальнейшем, и не были изменены последующими публикациями Пуанкаре в тт. 1, 3, 4, 5 основанного в ту пору журнала Acta mathematica [2]).

Фактически мне снова удалось немного опередить Пуанкаре. Мои отдельные оттиски были разосланы в конце ноября 1882 г., тогда как первая тетрадь „Acta“, содержавшая первую работу Пуанкаре, появилась в начале декабря того же года. Эта тетрадь содержит впрочем только первую часть теории — построение области прерывности в случае, когда имеется неподвижный граничный круг.

Цена, которою мне пришлось заплатить за мои работы, была во всяком случае очень велика, так как мое здоровье оказалось

---

[1]) Klein, Ges. Abh., т. 3, стр. 126.

[2]) Poincaré, Oeuvres, т. II, стр. 108 и сл.

совершенно расшатанным. В последующие годы мне приходилось брать несколько раз продолжительные отпуска и отказаться от всякой творческой деятельности. Только к осени 1884 г. положение несколько улучшилось, но прежней степени творческой активности я уже не достиг никогда. Я в большей мере посвятил себя обработке моих прежних идей и позже, когда я уже был в Геттингене, расширению круга моих работ и общим задачам организации нашей науки. Поэтому в дальнейшем я уже касался автоморфных функций только случайно. Моя собственная творческая деятельность в области теоретической математики закончилась в 1882 г. Все дальнейшее, поскольку оно не является разработкой прежних идей, относится лишь к деталям.

Таким образом поле деятельности перед Пуанкаре было свободно, и он опубликовал до 1884 г. в Acta mathematica пять больших работ об этих новых функциях. В т. 1 мы находим, помимо упомянутого построения наиболее общей рассмотренной им области прерывности, также теорию соответствующих рядов. Из основных теорем Пуанкаре рассматривает вообще лишь случай с граничным кругом, и это он делает годом позже в четвертом томе. Здесь он существенно пополнил доказательство, но еще не довел его до полного завершения (ср. сообщение Фрике в Трудах Гейдельбергского международного конгресса 1905 г., стр. 246 и сл.). В остальном Пуанкаре также пользуется методом непрерывности, и его доказательство по существу расчленено так же, как мое. В других случаях Пуанкаре наткнулся на пока непреодолимые трудности, так как он обнаружил, что здесь мы сталкиваемся с открытыми многообразиями (которым нельзя отнести определенной границы).

Мне особенно важно в связи с этим отметить положение Пуанкаре по отношению к Риману. Существование автоморфных функций Пуанкаре выводит не из принципов Римана, а из их выражения в виде своих тэта-рядов. Но при доказательстве непрерывности он должен опираться на предложение о том, что совокупность всех алгебраических образов с заданным p образует континуум, что до сих пор могло быть доказано лишь на основании принципов Римана. Таким образом в решающем пункте зависимость Пуанкаре от Римана сохраняется.

Таким образом то название, которое я дал своей работе в т. 21 Mathematische Annalen, — *Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie* („Новые материалы к римановой теории функций"), — является *адэкватным выражением* исторического развития. Несмотря на очень важные функционально-теоретические попытки, которых мы касались в предыдущей главе и которые связаны с именами Вейерштрасса, Клебша, Брилля-Нетера и Дедекинда-Вебера, Кронекера, Гильберта, — точка зрения Римана все же до сегодняшнего дня является могучим ферментом во всей области теории функций.

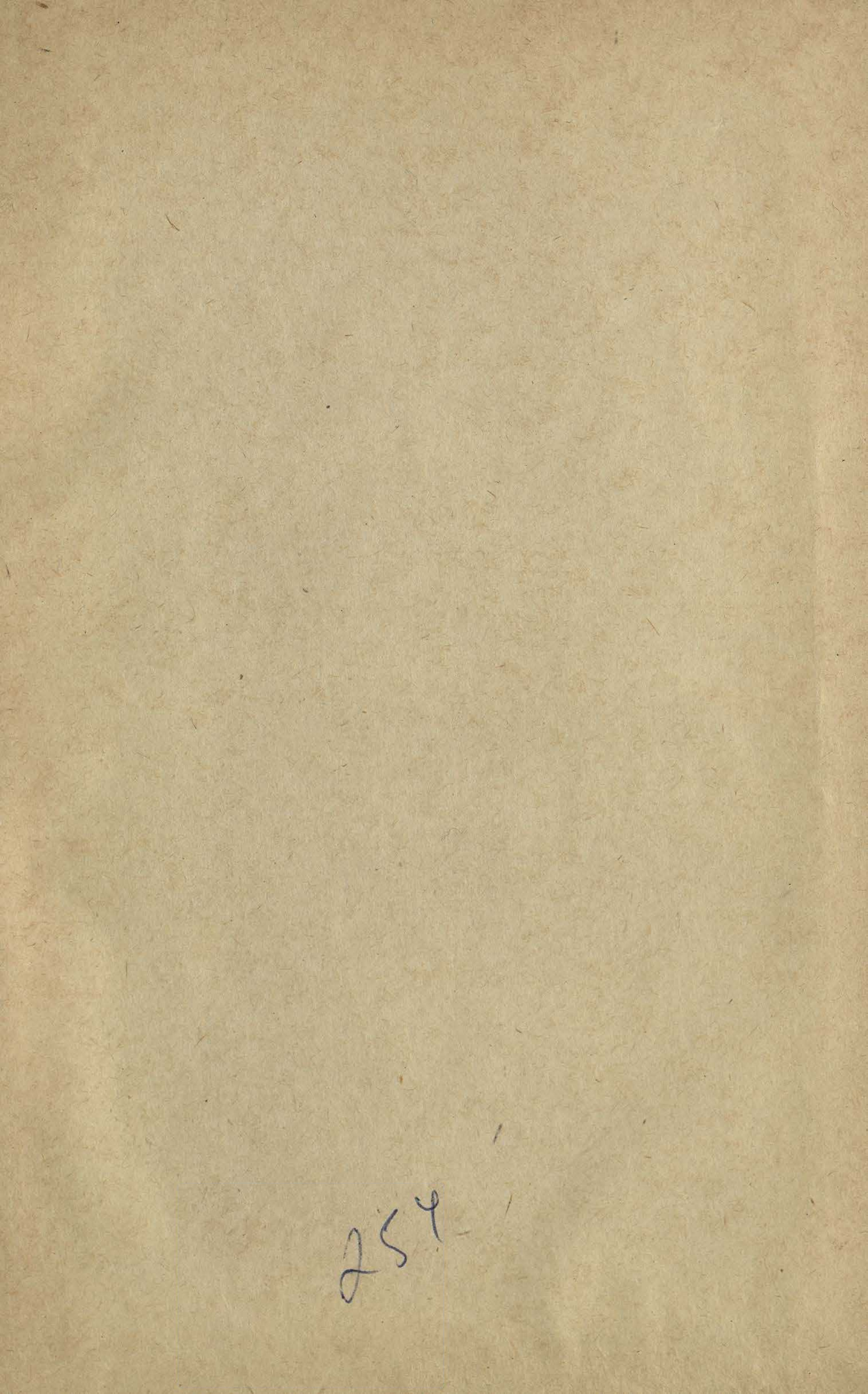
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Курсивом отмечены места, в которых приводятся важнейшие сведения о названном лице. Наоборот, ссылки на те места книги, в которых то или иное лицо упоминается либо в цитате, либо в несущественной для него связи, в указателе вовсе не приводятся.

ОПЕЧАТКИ

Строка	*Напечатано*	*Следует*	*По чьей вине*
4 сверху	свечения	сечения	редактора
17 „	$A, \sqrt{f_6(A); B,}$	$A, \sqrt{f_6(A)}; B,$	тип. и коррект.
15 „	$\sum_{i=0}^{n} a_{1i}x_i,$	$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i,$	коррект.
15 снизу	$v = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_a}$	$a_\alpha = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}$	типогр.
1 и 2 снизу	произволь-	произвольных	„
2 сверху	bewe ende	bewegende	„
14 снизу	$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$	$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$	коррект.
17 „	z_3	z_n	редактора
2 „	G	$\bar{G}$	коррект.
4 „	Неман Франц	Нейман Франц	редактора

лейн


254


2007075867